BULLETIN DE LA S. M. F.

GUNNAR FORST

Note sur des principes duaux en théorie du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 269-270
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__269_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 269-270.

NOTE SUR DES PRINCIPES DUAUX EN THÉORIE DU POTENTIEL

PAR

GUNNAR FORST (*)
[Københavns Universitet]

RÉSUMÉ. — Un résultat de dualité des principes du type domination et balayage pour quatre noyaux unifie les deux théorèmes de dualité de BERG.

ABSTRACT. — A duality result for some four-kernel domination and balayage principles unifies two duality theorems of BERG.

Nous allons utiliser les notations de BERG [1]. Soient K, L, M et N des noyaux continus sur X.

DÉFINITION (*cf.* OHTSUKA [2]). — On dit que K, L, M, N vérifient le *principe de domination* (de quatre noyaux), noté $D(K, L, M, N)$, si, pour $f, g \in C_c^+(X)$,

$$Kf \leqslant Lg \quad \text{sur supp}(f) \quad \Rightarrow \quad Mf \leqslant Ng \quad \text{sur } X.$$

DÉFINITION. — On dit que K, L, M, N vérifient le *principe de balayage* (de quatre noyaux), noté $B(K, L, M, N)$, si, pour tout ouvert relativement compact $\omega \subseteq X$ et toute $\mu \in M_c^+(X)$, il existe $\mu' \in M_c^+(X)$ telle que $\text{supp}(\mu') \subseteq \bar{\omega}$ et

$$M^*\mu \leqslant K^*\mu' \quad \text{sur } \omega \qquad \text{et} \qquad L^*\mu' \leqslant N^*\mu \quad \text{sur } X.$$

Le *noyau transposé* d'un noyau continu K est noté K^*. Il est clair que nous avons

$$\begin{aligned} D(K, L, K, L) &\Leftrightarrow K \prec L \text{(principe relatif de domination)};\\ D(K, K, L, L) &\Leftrightarrow K \sqsubset L \text{(principe transitif de domination)};\\ B(K, L, K, L) &\Leftrightarrow K \sqsubset^* L \text{(principe transitif du balayage)};\\ B(K, K, L, L) &\Leftrightarrow K \prec^* L \text{(principe relatif du balayage)}; \end{aligned}$$

et le résultat suivant entraîne donc les théorèmes 1 et 2 de [1].

(*) Texte reçu le 4 septembre 1978.
Gunnar FORST, Matematisk Institut, Universitetsparken 5, DK-2100 København ø.

THÉORÈME. — *Soient K, L, M, N des noyaux continus sur X, et supposons que L soit strictement positif. Alors :*

$$D(K, L, M, N) \Leftrightarrow B(K, L, M, N).$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2 de [1]. Par un argument classique on a « $\Leftarrow$ ». Inversement, pour un ouvert relativement compact $\omega \subseteq X$, on considère l'ensemble

$$B = \{(K^*\sigma - \xi, L^*\sigma + \eta);\ \sigma \in M_c^+(\overline{\omega}),\ \eta \in M^+(X),\ \xi \in M(X),\ \xi|_\omega \geqslant 0\},$$

et il s'agit de montrer l'inclusion

$$\{(M^*\mu, N^*\mu);\ a \in M_c^+(X)\} \subseteq B. \tag{1}$$

L'ensemble B est un cône convexe vaguement fermé (ici on utilise que L est strictement positif). Si (1) n'est pas vérifiée, il existe $\mu \in M_c^+(X)$ et, par le théorème de Hahn-Banach, un couple $(f, g) \in C_c(X) \times C_c(X)$ tel que

$$\langle M^*\mu, f\rangle + \langle N^*\mu, g\rangle < 0,$$

et

$$\langle \tau', f\rangle + \langle \tau'', g\rangle \geqslant 0 \quad \text{pour tout } (\tau', \tau'') \in B.$$

Il est facile de voir (comme dans [1]) que c'est en contradiction avec $D(K, L, M, N)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERG (C.). — Principes duaux en théorie du potentiel, *Bull. Soc. math. France*, t. 106, 1978, p. 365-372.

[2] OHTSUKA (M.). — A remark on duality of domination principle, *Hiroshima math. J.*, t. 5, 1975, p. 561-562.