BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN DE CANNIÈRE

# Produit croisé d'une algèbre de Kac par un groupe localement compact

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 107 (1979), p. 337-372

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__337_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Bull. Soc. math. France*,
107, 1979, p. 337-372.

# PRODUIT CROISÉ D'UNE ALGÈBRE DE KAC PAR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

PAR

JEAN DE CANNIÈRE (*)
[Katholieke Universiteit Leuven]

RÉSUMÉ. — A partir d'une algèbre de Kac $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ et d'une action $\alpha$ d'un groupe localement compact $G$ sur $M$ (vérifiant certaines propriétés), on construit une nouvelle algèbre de Kac $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$, en munissant le produit croisé $M \otimes_\alpha G$ des structures nécessaires. On étudie également l'algèbre de Kac duale de $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$.

ABSTRACT. — If $\mathbf{K} = (M, \varkappa, \Gamma, \varphi)$ is a Kac algebra and $\alpha$ is an action of a locally compact group $G$ on $M$ (satisfying some additional properties), it is shown that the crossed product $M \otimes_\alpha G$ can be endowed with the necessary structure so as to yield a new Kac algebra $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$. Furthermore, an investigation of the dual Kac algebra of $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$ is made.

## Introduction

La théorie des algèbres de Kac, développée par M. ENOCK et J.-M. SCHWARTZ (entre autres) dans [4] et [16], se propose d'étudier une certaine catégorie (dont les objets sont des algèbres de von Neumann munies de structures supplémentaires) qui englobe celle des groupes localement compacts, et qui admet un foncteur de dualité généralisant la dualité de Pontrjagin pour les groupes localement compacts abéliens.

Cette théorie présente une sérieuse lacune, à savoir la pénurie d'exemples qui ne se réduisent pas immédiatement au cas des groupes. En effet, à une exception près [12], toutes les algèbres de Kac connues sont soit abéliennes ou symétriques (c'est-à-dire des algèbres de groupe, *voir* [4]), soit des produits tensoriels de telles algèbres [17].

(*) Texte reçu le 20 octobre 1978.
Jean DE CANNIÈRE, Departement Wiskunde, Katholieke Universiteit Leuven, Celestijnenlaan 200-B, B-3030 Leuven (Belgique).

Les résultats exposés ici, qui décrivent une nouvelle façon de construire des exemples, ne comblent pas cette lacune d'une manière pleinement satisfaisante, puisque la construction s'effectuera à partir d'une algèbre de Kac donnée au préalable, qui sera donc fatalement du type décrit plus haut, et d'un groupe. On montrera néanmoins dans [2] qu'on peut obtenir ainsi des contre-exemples intéressants ([2], théorème 3.8 et remarque 4.6).

Plus précisément, soient $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $G$ un groupe localement compact, $\alpha$ une action de $G$ sur $M$. On démontrera qu'il est possible de munir le produit croisé $M \otimes_\alpha G$ de $M$ par $G$ d'une structure d'algèbre de Kac, lorsque $\alpha$ vérifie certaines conditions.

L'étude de ces conditions est entreprise dans la seconde partie du paragraphe 2, une première partie étant réservée au rappel de la définition des algèbres de Kac, et à la démonstration de quelques lemmes à leur sujet.

Les définitions d'un coproduit $\tilde{\Gamma}$, d'une involution $\tilde{\varkappa}$ et d'un poids $\tilde{\varphi}$ sur $M \otimes_\alpha G$ au paragraphe 3 sont fort naturelles. En particulier, le poids $\tilde{\varphi}$ n'est autre que le poids dual de $\varphi$ ([19], [8], [9], [5]). Le théorème 1 énonce qu'on obtient bien ainsi une algèbre de Kac $(M \otimes_\alpha G, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ (qu'on appellera le produit croisé de $\mathbf{K}$ par $G$).

Le paragraphe 4 a pour but de déterminer l'algèbre duale du produit croisé défini précédemment. L'énoncé du théorème 2 est assez surprenant : Il s'avère que l'algèbre de von Neumann sous-jacente à l'algèbre duale est le produit tensoriel $\hat{M} \otimes L^\infty(G)$, et que le poids de Haar correspondant est le produit tensoriel $\hat{\varphi} \otimes \mathscr{F}$. A la lumière de la proposition I.4 de [17], il est clair que la structure coalgébrique, en revanche, devra être « tordue » par rapport à la structure produit tensoriel (cette idée est précisée dans la proposition 4.10).

Les quelques exemples développés au paragraphe 5 permettent finalement d'illustrer et de rendre plausible les résultats obtenus.

Le tout est précédé d'un paragraphe premier, de caractère essentiellement technique, qui contient des résultats préliminaires indispensables.

On remarquera, pour terminer, que ce qui suit ne constitue vraisemblablement qu'un premier pas vers la définition d'une notion plus générale de « produit semi-direct d'algèbres de Kac ». Les résultats décrits dans [6] et [3] permettent en effet d'envisager une telle généralisation.

Je tiens à exprimer ma gratitude à A. Van Daele, qui m'a suggéré le problème et a suivi avec une attention active les ébauches successives de solution.

Je suis reconnaissant à M. ENOCK et J.-M. SCHWARTZ, qui ont donné à Louvain deux conférences au sujet des algèbres de Kac, et qui m'ont signalé l'existence d'un exemple intéressant dans [12].

Enfin, je désire remercier également U. HAAGERUP qui ne m'a pas seulement aidé à vaincre certaines difficultés techniques, mais m'a en outre permis de prendre connaissance d'un manuscrit [11], qui est à la base d'une simplification substantielle du raisonnement (il en existe à présent un tirage préliminaire).

## 1. Rappels et résultats préliminaires

Dans la suite, $M$ est une algèbre de von Neumann, $\mathscr{H}$ un espace hilbertien, $G$ un groupe l. c. (localement compact) muni d'une mesure de Haar fixe, $\Delta_G$ la fonction modulaire sur $G$.

On notera $i_M$ l'automorphisme identique de $M$, $1_M$ l'élément unité de $M$ et $1_{\mathscr{H}}$ l'opérateur identique sur $\mathscr{H}$. On préférera cependant écrire $1_G$ lorsque $\mathscr{H} = L^2(G)$.

$K(G)$, $K(G, \mathscr{H})$ et $K(G, M)$ désigneront respectivement l'ensemble des fonctions complexes continues sur $G$ à support compact, celui des fonctions continues sur $G$ à valeurs dans $\mathscr{H}$ et à support compact, et finalement celui des fonctions sur $G$ à valeurs dans $M$, $\star$-ultrafortement continues et à support compact. $K(G, \mathscr{H})$ est dense dans $L^2(G, \mathscr{H})$, qu'on notera $\tilde{\mathscr{H}}$ et qu'on identifiera à $\mathscr{H} \otimes L^2(G)$. Tout $x \in K(G, M)$, considéré comme champ mesurable d'opérateurs, définit un élément de $M \otimes L^\infty(G)$ qu'on notera également $x$ (on observera que tout $x \in K(G, M)$ est borné en norme). De plus, tout élément de $K(G, M)$ est scalairement intégrable pour la topologie ultrafaible sur $M$, et l'intégrale appartient à $M$.

On utilisera sans référence particulière les notations habituelles de la théorie des poids n. f. s. (normaux, fidèles, semi-finis) [1].

Par $\mathscr{F}$, on entendra le poids n. f. s. sur $L^\infty(G)$ correspondant à la mesure de Haar choisie sur $G$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\mathscr{F}(f) = \int_G f(g)\, dg, \qquad f \in L^\infty(G)_+$$

(on utilise l'intégrale supérieure essentielle).

Les résultats dont on aura besoin dans la suite ont principalement trait à trois sujets : les poids opératoriels, les produits croisés et les poids duaux.

**(A) Poids opératoriels**

La notion a été introduite par HAAGERUP dans [10].

Soient $M$, $N$ des algèbres de von Neumann, $\varphi$ un poids n. f. s. sur $N$. Alors $i_M \otimes \varphi$ peut être considéré comme un poids opératoriel de $M \otimes N$ sur $M$ (à condition d'identifier $M \otimes \mathbf{C}$ et $M$) ([10], déf. 5.6). La plupart des poids opératoriels qu'on utilisera seront de ce type.

On démontre facilement, à leur sujet, le lemme suivant :

LEMME 1.1. — *(a) Soient $M$, $N$ des algèbres de von Neumann, $\varphi$ un poids n. f. s. sur $N$. Pour tout $\omega \in (M_*)_+$ et tout $x$ dans l'extension de la partie positive de $M \otimes N$* ([10], déf. 1.1), *on a*

$$\omega((i_M \otimes \varphi)(x)) = \varphi((\omega \otimes i_N)(x)).$$

*(b) Soient $M_1$, $M_2$, $N$ des algèbres de von Neumann, $\alpha$ un homorphisme normal de $M_1$ dans $M_2$, $\varphi$ un poids n. f. s. sur $N$. Alors*

$$(i_{M_2} \otimes \varphi)((\alpha \otimes i_N)(x)) = \alpha((i_{M_1} \otimes \varphi)(x)),$$

*pour tout $x$ dans l'extension de la partie positive de $M_1 \otimes N$.*

LEMME 1.2. — *Soit $x \in K(G, M)$ positif, c'est-à-dire $x(g) \geqslant 0$ pour tout $g \in G$. En considérant $x$ comme un élément positif de $M \otimes L^\infty(G)$, on a*

$$(i_M \otimes \mathscr{F})(x) = \int_G x(g)\, dg.$$

*Démonstration.* — Soit $\omega \in (M_*)_+$. On vérifie aisément que

$((\omega \otimes i_{L^\infty(G)})(x))(g) = \omega(x(g))$ l. p. p. (localement presque partout).

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\omega((i_M \otimes \mathscr{F})(x)) &= \mathscr{F}((\omega \otimes i_{L^\infty(G)})(x)) \quad \text{d'après 1.1 } (a)\\ &= \int_G \omega(x(g))\, dg\\ &= \omega\left(\int_G x(g)\, dg\right),\end{aligned}$$

d'après la définition de l'intégrale de $x$. Le lemme est ainsi démontré.

LEMME 1.3. — *(a) Soit $x$ comme dans le lemme précédent, et soit $\varphi$ un poids n. f. s. sur $M$. Alors*

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \mathscr{F})(x) &= \varphi\left(\int_G x(g)\, dg\right)\\ &= \int_G \varphi(x(g))\, dg.\end{aligned}$$

(*b*) *Soit encore* $\varphi$ *un poids n. f. s. sur* $M$, *et soit* $x \in K(G, M)$ *tel que* $x(g) \in n_\varphi$ *p. p.* (*presque partout*), *et que la fonction* $g \mapsto \|\Lambda_\varphi(x(g))\|$, *définie p. p., soit de carré intégrable. Alors la fonction* $g \mapsto \Lambda_\varphi(x(g))$ *appartient à* $L^2(G, \mathscr{H}_\varphi)$.

*Démonstration.* — (*a*) On a

$$(\varphi \otimes \mathscr{F})(x) = \varphi((i_M \otimes \mathscr{F})(x)) \quad \text{d'après [10], théorème 5.5}$$
$$= \varphi\left(\int_G x(g)\,dg\right) \quad \text{d'après 1.2.}$$

D'autre part, $\varphi$ est la borne supérieure d'un système filtrant croissant $\{\omega_\iota\} \subset (M_*)_+$. Par conséquent,

$$\varphi\left(\int_G x(g)\,dg\right) = \sup \omega_\iota\left(\int_G x(g)\,dg\right)$$
$$= \sup \int_G \omega_\iota(x(g))\,dg = \int_G \sup \omega_\iota(x(g))\,dg,$$

puisque toutes les fonctions $g \mapsto \omega_\iota(x(g))$ sont positives et continues. Finalement,

$$\varphi\left(\int_G x(g)\,dg\right) = \int_G \varphi(x(g))\,dg.$$

(*b*) Notons d'abord que la fonction $g \mapsto (\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \xi)$ est p. p. limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues à support compact, et est donc mesurable pour tout $\xi \in \mathscr{H}_\varphi$. Comme

$$|(\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \xi)| \leq \|\Lambda_\varphi(x(g))\| . \|\xi\| \quad \text{p. p.},$$

elle appartient à $L^2(G)$.

D'après (*a*), on a

$$(1) \quad (\varphi \otimes \mathscr{F})(x^* x) = \int_G \varphi(x(g)^* x(g))\,dg = \int_G \|\Lambda_\varphi(x(g))\|^2\,dg < \infty,$$

et donc $x \in n_{\varphi \otimes \mathscr{F}}$.

Soient $y \in n_\varphi$, $f \in K(G)$. On a

$$y \otimes f \in n_{\varphi \otimes \mathscr{F}}, \qquad \Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(y \otimes f) = \Lambda_\varphi(y) \otimes f,$$

et par conséquent

$$(\varphi \otimes \mathscr{F})((y \otimes f)^* x) = \int_G \overline{f(g)}((\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x))(g) \mid \Lambda_\varphi(y))\,dg.$$

D'autre part, on déduit de (1) par polarisation que

$$(\varphi \otimes \mathscr{F})((y \otimes f)^* x) = \int_G \overline{f(g)}(\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \Lambda_\varphi(y))\,dg.$$

Comme ces égalités valent pour tout $f \in K(G)$, on a, par densité de $K(G)$ dans $L^2(G)$,

$$((\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x))(g) \mid \Lambda_\varphi(y)) = (\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \Lambda_\varphi(y)) \quad \text{p.p.},$$

pour tout $y \in n_\varphi$. Il en résulte immédiatement

$$(2) \qquad ((\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x))(g) \mid \xi) = (\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \xi) \quad \text{p.p.} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathscr{H}_\varphi.$$

On sait que $\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x)$ appartient à $L^2(G, \mathscr{H}_\varphi)$, et prend donc presque toutes ses valeurs dans un sous-espace fermé à base dénombrable de $\mathscr{H}_\varphi$. Soit $e$ le projecteur sur ce sous-espace. Il résulte de (2) que

$$(\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x))(g) = e\Lambda_\varphi(x(g)) \quad \text{p.p.}$$

et par suite que

$$\| \Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x) \|^2 = \int_G \| e\Lambda_\varphi(x(g)) \|^2 \, dg.$$

D'après (1), on a également

$$\| \Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x) \|^2 = \int_G \| \Lambda_\varphi(x(g)) \|^2 \, dg;$$

on déduit des deux dernières égalités que

$$\Lambda_\varphi(x(g)) = e\Lambda_\varphi(x(g)) = (\Lambda_{\varphi \otimes \mathscr{F}}(x))(g) \quad \text{p.p.}$$

et donc que $g \mapsto \Lambda_\varphi(x(g))$ appartient à $L^2(G, \mathscr{H}_\varphi)$.

**(B) Produits croisés**

Depuis la parution de [19], il existe plusieurs exposés de la théorie des produits croisés (*voir* par exemple [21]). On se bornera donc à rappeler les notations usuelles.

Soit $\alpha$ une action ultrafaiblement continue d'un groupe l. c. $G$ sur une algèbre de von Neumann $M$. On notera $\tilde{M} = M \otimes_\alpha G$ le produit croisé de $M$ par $G$ relativement à $\alpha$ (en général, le symbole $\sim$ marquera tous les objets définis par rapport au produit croisé). On suppose en outre que $M$ opère dans un espace hilbertien $\mathscr{H}$, et que $\alpha$ admet une implémentation par une représentation unitaire continue $g \mapsto u_g$ de $G$ dans $\mathscr{H}$.

DÉFINITIONS 1.4. — (*a*) On désignera par $\pi$ l'homomorphisme normal fidèle de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \otimes L^\infty(G)$ vérifiant :

$$(\pi(x)\xi)(g) = u_g^{-1} x u_g \xi(g) \quad \text{pour tous } x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}),$$

$\xi \in K(G, \mathscr{H})$ et $g \in G$ ([21], déf. 2.4).

(*b*) Soit $g \mapsto \lambda_g$ (resp. $g \mapsto \rho_g$) la représentation régulière gauche (resp. droite) de $G$ dans $L^2(G)$. On pose $\lambda(g) = 1_{\mathscr{H}} \otimes \lambda_g$ pour tout $g \in G$. Par définition, $\tilde{M}$ est engendrée par les opérateurs $\pi(x)$, $x \in M$, et $\lambda(g)$, $g \in G$.

(*c*) On notera $\mathscr{M}(G)$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\lambda_g$, $g \in G$.

(*d*) Soit $V$ l'opérateur unitaire sur $\tilde{\mathscr{H}} = L^2(G, \mathscr{H}) = \mathscr{H} \otimes L^2(G)$ vérifiant :

$$(V\xi)(g) = u_g \xi(g) \quad \text{pour tous } \xi \in K(G, \mathscr{H}) \text{ et } g \in G.$$

On se rappellera que

$$V\pi(x)V^* = x \otimes 1_G \quad \text{pour tout } x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}), \tag{1.4.1}$$

et

$$V\lambda(g)V^* = u_g \otimes \lambda_g \quad \text{pour tout } g \in G \tag{1.4.2}$$

([21], prop. 2.12).

(*e*) Comme en [8] (lemme 2.3 (*e*)), on définit une application $\mu$ de $K(G, M)$ dans $\tilde{M}$ par

$$\mu(x) = \int_G \lambda(g)\pi(x(g))\,dg \quad \text{pour tout } x \in K(G, M).$$

On sait que $\mu(K(G, M))$ est une sous-algèbre involutive ultrafaiblement dense de $\tilde{M}$.

On aura besoin d'une représentation maniable des éléments du prédual $\tilde{M}_*$. A cet effet, on pose la définition ci-après :

DÉFINITION 1.5. — Soit $\omega \in \tilde{M}_*$. Pour tout $g \in G$, on définit $\omega(g) \in M_*$ par

$$\langle x, \omega(g) \rangle = \langle \pi(x)\lambda(g^{-1}), \omega \rangle, \qquad x \in M.$$

(On notera que cette définition a un sens, puisque l'application $x \mapsto \langle \pi(x)\lambda(g^{-1}), \omega \rangle$ est linéaire et ultrafaiblement continue.)

LEMME 1.6. — (*a*) *L'application $g \mapsto \omega(g)$ est continue (pour la topologie normique sur $M_*$).*

(*b*) $\|\omega(g)\| \leqslant \|\omega\|$ *pour tout $g \in G$.*

Il est possible de retrouver $\omega$ à partir de l'application $g \mapsto \omega(g)$ :

LEMME 1.7. — *Soient encore $\omega$ et $g \mapsto \omega(g)$ comme en* 1.5. *Pour tout $x \in K(G, M)$, on a*

$$\langle \mu(x)^*, \omega \rangle = \int_G \langle x(g)^*, \omega(g) \rangle\,dg.$$

*Démonstration.* — Il est clair d'après 1.4 (*e*) que

$$\mu(x)^* = \int_G \pi(x(g)^*)\lambda(g^{-1})\,dg,$$

et donc

$$\langle \mu(x)^*, \omega \rangle = \int_G \langle \pi(x(g)^*)\lambda(g^{-1}), \omega \rangle\, dg$$
$$= \int_G \langle x(g)^*, \omega(g) \rangle\, dg, \quad \text{d'après } 1.5.$$

Ce lemme justifie l'identification de $\tilde{M}_*$ à un certain ensemble d'applications de $G$ dans $M_*$, la relation entre $\omega$ et $\omega(g)$ étant donnée par 1.5 et 1.7. Il est possible de calculer directement $\omega(g)$ lorsque $\omega = \omega_{\xi, \eta}$ où $\xi, \eta \in \tilde{\mathscr{H}}$.

LEMME 1.8. — *Soient* $\xi, \eta \in \tilde{\mathscr{H}}$, $g \in G$. On a

$$\omega_{\xi, \eta}(g) = \int_G \omega_{\xi(gh), \eta(h)} \circ \alpha_{h^{-1}}\, dh,$$

*l'intégrale étant entendue scalairement.*

*Démonstration.* — Soit $x \in M$. On a

$$\langle x, \omega_{\xi,\eta}(g) \rangle = \langle \pi(x)\lambda(g^{-1}), \omega_{\xi,\eta} \rangle, \quad \text{d'après } 1.5,$$
$$= \int_G (\alpha_{h^{-1}}(x)\xi(gh) \mid \eta(h))\, dh, \quad \text{d'après } 1.4\ (a) \text{ et } (b),$$
$$= \int_G \langle x, \omega_{\xi(gh), \eta(h)} \circ \alpha_{h^{-1}} \rangle\, dh,$$

ce qui implique que la fonction $h \mapsto \omega_{\xi(gh), \eta(h)} \circ \alpha_{h^{-1}}$ est scalairement intégrable, d'intégrale $\omega_{\xi, \eta}(g)$.

Si $\xi$ et $\eta$ sont à support compact, on voit que $\omega_{\xi, \eta}$ a également un support compact.

### (C) Poids duaux

Le concept de poids dual a été introduit par TAKESAKI ([19], déf. 5.14). Ici on utilisera les définitions équivalentes qui en ont été données dans [9] et [5].

Dans ce qui suit, $M$, $G$, $\alpha$ et $\tilde{M}$ sont comme en (B). En outre, $\varphi$ est un poids n. f. s. sur $M$.

DÉFINITIONS 1.9. — (*a*) On notera $\delta$ l'homomorphisme normal fidèle de $\tilde{M}$ dans $\tilde{M} \otimes \mathscr{M}(G)$ vérifiant :

$$\delta(\pi(x)) = \pi(x) \otimes 1_G, \qquad x \in \tilde{M}$$

et

$$\delta(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda_g, \qquad g \in G$$

([13], théorème 1; pour les notations, *voir* 1.4 (*a*), (*b*) et (*c*)).

(*b*) Soit $\psi_G$ le poids canonique sur $\mathcal{M}(G)$ ([9], déf. 2.2). En posant

$$T(x) = (i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G)(\delta(x)) \quad \text{pour tout } x \in \tilde{M}_+,$$

on définit un poids opératoriel $T$ de $\tilde{M}$ sur $\pi(M)$ ([5], lemme 2).

(*c*) Le poids n. f. s. $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi^{-1} \circ T$ sur $\tilde{M}$ s'appelle le poids dual de $\varphi$ ([9], th. 3.1 (*d*); [5]).

LEMME 1.10. — *Soit $x \in K(G, M)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu(x) \in n_{\tilde{\varphi}}$ (1.4 (*e*)).

(ii) $x(g) \in n_\varphi$ *p. p., et la fonction* $g \mapsto \| \Lambda_\varphi(x(g)) \|$, *définie p. p., est de carré intégrable.*

*Si l'une ou l'autre de ces conditions est vérifiée, on a*

$$\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x))(g) = \Lambda_\varphi(x(g)) \quad p.\,p.$$

*Démonstration.* — Soit $T$ comme en 1.9 (*b*). D'après [9] (th. 3.1 (*c*)) et [8] (lemme 2.3 (*b*)), on a

$$T(\mu(x)^* \mu(x)) = \pi\left(\int_G x(g)^* x(g)\, dg\right).$$

Par conséquent,

$$(1) \qquad \tilde{\varphi}(\mu(x)^* \mu(x)) = \varphi\left(\int_G x(g)^* x(g)\, dg\right), \quad \text{d'après 1.9 } (c)$$
$$= \int_G \varphi(x(g)^* x(g))\, dg, \quad \text{d'après 1.3 } (a),$$

ce qui implique la première partie du lemme.

On suppose maintenant que $x$ vérifie (i) et (ii). Soient $y \in n_\varphi, f \in K(G)$. D'après [8] (th. 3.2 (1)), on a

$$\mu(y \otimes f) \in n_{\tilde{\varphi}}, \qquad \Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(y \otimes f) = \Lambda_\varphi(y) \otimes f,$$

et donc

$$(2) \qquad \tilde{\varphi}(\mu(y \otimes f)^* \mu(x)) = \int_G \overline{f(g)} (\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x))(g) \mid \Lambda_\varphi(y))\, dg.$$

D'autre part, on déduit de (1) par polarisation que

$$(3) \qquad \tilde{\varphi}(\mu(y \otimes f)^* \mu(x)) = \int_G \overline{f(g)}\, \varphi(y^* x(g))\, dg$$
$$= \int_G \overline{f(g)} (\Lambda_\varphi(x(g)) \mid \Lambda_\varphi(y))\, dg.$$

On sait d'après 1.3 ($b$) que la fonction $g \mapsto \Lambda_\varphi(x(g))$ appartient à $L^2(G, \mathscr{H}_\varphi) = \mathscr{H}_{\tilde{\varphi}}$; le lemme résulte alors d'une comparaison de (2) et (3), par densité du produit tensoriel algébrique $\Lambda_\varphi(n_\varphi) \odot K(G)$ dans $\mathscr{H}_{\tilde{\varphi}}$.

DÉFINITIONS 1.11. — ($a$) On notera $\mathfrak{A}_\varphi$ et $\mathfrak{A}_{\tilde{\varphi}}$ les algèbres hilbertiennes à gauche achevées associées à $\varphi$ et $\tilde{\varphi}$ d'après [1], et $\mathfrak{A}'_\varphi$ et $\mathfrak{A}'_{\tilde{\varphi}}$ les algèbres hilbertiennes à droite correspondantes. Les représentations régulières de ces algèbres seront notées $\pi_l$, $\tilde{\pi}_l$, $\pi_r$ et $\tilde{\pi}_r$, respectivement.

($b$) Notons $C_\varphi$ l'ensemble des $x \in K(G, M)$ vérifiant les conditions équivalentes du lemme 1.10.

LEMME 1.12 (*cf.* [19], lemme 5.18). — *On suppose que* $\varphi$ *est relativement invariant par* $\alpha$ ([19], déf. 5.1), *c'est-à-dire que, pour tout* $g \in G$, *il existe un nombre* $\chi(g) > 0$ *tel que* $\varphi \circ \alpha_g = \chi(g)\varphi$.

($a$) *On a* $\alpha_g(n_\varphi) = n_\varphi$ *pour tout* $g \in G$, *et l'implémentation canonique* $g \mapsto u_g$ *de* $\alpha$ *dans* $\mathscr{H}_\varphi$ [7] *vérifie :*

$$u_g \Lambda_\varphi(x) = \chi(g)^{-1/2} \Lambda_\varphi(\alpha_g(x)),$$

*pour tous* $x \in n_\varphi$ *et* $g \in G$.

($b$) *Avec les notations introduites en* 1.11 ($a$), *on a*

$$\mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G) \subset \mathfrak{A}'_{\tilde{\varphi}} \quad (\textit{produit tensoriel algébrique})$$

*et*

$$\tilde{\pi}_r(\xi \otimes f) = (\pi_r(\xi) \otimes 1_G) \int_G f(g^{-1}) \chi(g)^{1/2} \Delta_G(g)^{-1/2} u_g \otimes \rho_g \, dg,$$

$$(\xi \otimes f)^b(g) = \overline{f(g^{-1})} \chi(g)^{1/2} u_g^{-1} \xi^b,$$

*pour tous* $\xi \in \mathfrak{A}'_\varphi$ *et* $f \in K(G)$ ($\rho_g$ *a été défini en* 1.4 ($b$)).

*Démonstration.* — ($a$) est une conséquence immédiate de [8], lemme 2.11.

Notons $y \in \tilde{M}'$ et $\zeta \in \mathscr{H}_{\tilde{\varphi}} = \tilde{\mathscr{H}}_\varphi$ les membres de droite des égalités figurant dans la seconde partie de l'énoncé.

Soient $x \in C_\varphi$ (1.11 ($b$)) et $\eta \in K(G, \mathscr{H}_\varphi)$. On a

$$\begin{aligned}(y \Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x)) \mid \eta) &= \int_G \int_G f(g^{-1}) \chi(g)^{1/2} (\pi_r(\xi) u_g \Lambda_\varphi(x(hg)) \mid \eta(h)) \, dh \, dg, \\ &\quad \text{d'après } 1.10, \\ &= \int_G \int_G f(g^{-1}) (\pi_r(\xi) \Lambda_\varphi(\alpha_g(x(hg))) \mid \eta(h)) \, dh \, dg, \\ &\quad \text{d'après la première partie du lemme,} \\ &= \int_G \int_G f(g^{-1}) (\alpha_g(x(hg)) \xi \mid \eta(h)) \, dh \, dg, \\ &= (\mu(x)(\xi \otimes f) \mid \eta) \ \text{ d'après [8], lemme 2.4.}\end{aligned}$$

Par densité, on obtient :

$$y\Lambda_{\tilde\varphi}(\mu(x)) = \mu(x)(\xi \otimes f) \quad \text{pour tout } x \in C_\varphi.$$

D'autre part, pour tous $x \in C_\varphi$ et $\eta \in K(G, \mathscr{H}_\varphi)$, on a

$$\begin{aligned}(y^* \Lambda_{\tilde\varphi}(\mu(x)) \mid \eta) &= \int_G \int_G \overline{f(g^{-1})}\, \chi(g)^{1/2} (\Lambda_\varphi(x(h)) \mid \pi_r(\xi) u_g \eta(hg))\, dh\, dg, \\ &\quad \text{d'après 1.10,} \\ &= \int_G \int_G \overline{f(g^{-1})}\, \chi(g)^{1/2} (u_g^{-1} x(h) \xi^b \mid \eta(hg))\, dg\, dh \\ &= \int_G \int_G \overline{f(g^{-1} h)}\, \chi(h^{-1} g)^{1/2} (u_{g^{-1}h} x(h) \xi^b \mid \eta(g))\, dh\, dg \\ &= \int_G \int_G \overline{f(h)}\, \chi(h^{-1})^{1/2} (\alpha_h(x(gh)) u_h \xi^b \mid \eta(g))\, dg\, dh \\ &= (\mu(x)\zeta \mid \eta) \quad \text{d'après [8], lemme 2.4,}\end{aligned}$$

d'où

$$y^* \Lambda_{\tilde\varphi}(\mu(x)) = \mu(x)\zeta \quad \text{pour tout } x \in C_\varphi.$$

D'après [8], $\Lambda_{\tilde\varphi}(\mu(C_\varphi))$ contient une algèbre hilbertienne équivalente à $\mathfrak{A}_{\tilde\varphi}$. On peut dès lors appliquer le lemme 2.3 de [20] pour conclure que

$$\xi \otimes f \in \mathfrak{A}'_{\tilde\varphi}, \qquad \tilde\pi_r(\xi \otimes f) = y \quad \text{et} \quad (\xi \otimes f)^b = \zeta.$$

Notons que la fonction $g \mapsto \chi(g)$ est nécessairement continue, par suite de la continuité de $g \mapsto u_g$ ([19], cor. 3.6).

## 2. Action d'un groupe sur une algèbre de Kac

DÉFINITION 2.1 (*cf.* [16], th. II.16). — Une *algèbre de Kac* est un quadruplet $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ vérifiant :

(K-i) $(M, \Gamma, \varkappa)$ est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive ([4], déf. 1.2.1);

(K-ii) $\varphi$ est un poids n. f. s. sur $M$;

(K-iii) pour tout $x \in M_+$, on a $(i_M \otimes \varphi)(\Gamma(x)) = \varphi(x) 1_M$;

(K-iv) pour tous $x, y \in n_\varphi$, on a

$$(i_M \otimes \varphi)((1_M \otimes y^*)\Gamma(x)) = \varkappa((i_M \otimes \varphi)(\Gamma(y^*)(1_M \otimes x))).$$

(K-v) $\varkappa \circ \sigma_t^\varphi = \sigma_{-t}^\varphi \circ \varkappa$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Le poids $\varphi$ (qui est unique, à un facteur positif près [16], th. III.3) sera appelé poids de Haar sur $(M, \Gamma, \varkappa)$ ou, par abus de langage, sur $M$

([16], déf. I.13). On supposera toujours que $M$ opère sur l'espace hilbertien $\mathcal{H}_\varphi$, qui sera simplement noté $\mathcal{H}$.

Pour la théorie des algèbres de Kac, on se référera à [4] et [16], dont on empruntera les concepts et les notations nécessaires. Tel sera, en particulier, le cas pour l'opérateur fondamental $W$, la représentation de Fourier $\lambda$, l'algèbre duale $\hat{\mathbf{K}} = (\hat{M}, \hat{\Gamma}, \hat{\varkappa}, \hat{\varphi})$ et le groupe intrinsèque $G(\mathbf{K})$, associés à une algèbre de Kac $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ ([4], prop. 2.1.1, rem. 2.1.11, déf. 4.2.3; [16], th. I.10). Le prédual $M_*$ est une algèbre de Banach pour le produit $\star$ et l'involution $\circ$ ([4], déf. 1.2.2). Comme en [4] (déf. 1.1.3), on définit également le sous-espace $\mathcal{L}_\varphi$ de $M_*$ et l'application $a$ de $\mathcal{L}_\varphi$ dans $\mathcal{H}$.

Convenons encore de noter $\Delta$ (resp. $\hat{\Delta}$) l'opérateur modulaire associé à $\varphi$ (resp. $\hat{\varphi}$), et $J$ (resp. $\hat{J}$) l'involution correspondante de $\mathcal{H}$.

A tout groupe l. c. $G$, on peut associer deux algèbres de Kac.

DÉFINITIONS 2.2. — Soit $G$ un groupe l. c.

(*a*) On notera $KS(G) = (\mathcal{M}(G), \Gamma_G, \varkappa_G, \psi_G)$ (1.4 (*c*); 1.9 (*b*)) l'algèbre de Kac symétrique associée à $G$ ([4], prop. 8.1.3). Rappelons les formules

(2.2.1) $$\Gamma_G(\lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g$$
et
(2.2.2) $$\varkappa_G(\lambda_g) = \lambda_g^{-1} \quad \text{pour tout } g \in G \quad (1.4\ (b)).$$

On notera $J_G$ l'involution de $L^2(G)$ associée.

(*b*) L'algèbre de Kac abélienne associée à $G$ ([4], prop. 8.1.1) sera notée $KA(G) = (L^\infty(G), \hat{\Gamma}_G, \hat{\varkappa}_G, \mathcal{F})$, où on a

(2.2.3) $$(\hat{\Gamma}_G f)(g, h) = f(gh)$$
et
(2.2.4) $$(\hat{\varkappa}_G f)(g) = f(g^{-1}) \quad \text{l. p. p.}$$

pour tout $f \in L^\infty(G)$. L'involution $\hat{J}_G$ de $L^2(G)$ associée vérifie :

(2.2.5) $$(\hat{J}_G f)(g) = \overline{f(g)} \quad \text{p. p.}$$

pour tout $f \in L^2(G)$ ([4], 8.1.7).

(*c*) Par $U$, on désignera l'opérateur fondamental de $KS(G)$, c'est-à-dire l'opérateur unitaire de $L^2(G \times G)$ qui vérifie :

(2.2.6) $$(Uf)(g, h) = f(h^{-1}g, h),$$

pour tous $f \in K(G \times G)$, $g, h \in G$ ([4], 8.1.7).

On aura besoin de quelques résultats supplémentaires au sujet des algèbres de Kac. Tout d'abord, il est possible de reformuler l'axiome (K-iv) à l'aide de l'opérateur fondamental $W$ (qui est défini pour tout quadruplet $(M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ vérifiant (K-i), (K-ii) et (K-iii); [4], prop. 2.1.1) :

LEMME 2.3. — (*a*) *Soit* $(M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *un quadruplet vérifiant* (K-i), (K-ii) et (K-iii). *Alors* (K-iv) *est équivalent à* (K-iv)′ :

$$(\omega \circ \varkappa \otimes i_{\widehat{M}})(W) = (\omega \otimes i_{\widehat{M}})(W^*) \quad \textit{pour tout } \omega \in M_*.$$

(*b*) *En outre*, (K-iv)′ *est équivalent à la propriété*

$$(W(V\alpha \otimes \beta) \,|\, V\gamma \otimes \delta) = (\gamma \otimes \beta \,|\, W(\alpha \otimes \delta))$$

*pour tous* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathscr{H}$, *où* $V$ *est une implémentation quelconque de* $\varkappa$.

*Démonstration.* — (*a*) Toute algèbre de Kac vérifie (K-iv)′ ([16], lemme II.13). D'autre part, en parcourant la démonstration du lemme II.14 de [16], on se rend compte que (K-i), (K-ii), (K-iii) et (K-iv)′ impliquent (K-iv).

(*b*) Se déduit sans difficulté de la relation $\omega_{\alpha,\beta} \circ \varkappa = \omega_{V\beta,\, V\alpha}$ $(\alpha, \beta \in \mathscr{H})$, utilisée au cours de la démonstration de la proposition 2.2.4 de [4].

DÉFINITION 2.4. — Soient $M$ une algèbre de von Neumann, $\omega \in M_*$, $x \in M$. On définit $x.\omega \in M_*$ par

$$\langle y, x.\omega \rangle = \langle yx, \omega \rangle \quad \text{pour tout } y \in M.$$

LEMME 2.5. — *Soit* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac :*

(*a*) $\mathscr{L}_\varphi$ *est un idéal à gauche de* $M_*$;

(*b*) *pour tous* $\omega \in M_*$ *et* $\omega' \in L_\varphi$ *on a* $\lambda(\omega)\, a(\omega') = a(\omega \star \omega')$;

(*c*) *pour tous* $\omega \in \mathscr{L}_\varphi$ *et* $x \in M$, *on a* $x.\omega \in \mathscr{L}_\varphi$ *et* $a(x.\omega) = xa(\omega)$.

*Démonstration.* — (*a*) Résulte de la proposition 2.1.3 (*b*) de [4], et de [11], corollaire 7 ;

(*b*) pour tout $\omega' \in \mathscr{L}_\varphi$, on a $\lambda(\omega') \in n_{\hat{\varphi}}$ et $\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega')) = a(\omega')$ ([4], prop. 3.1.9).

Soit $\omega \in M_*$; on a

$$\begin{aligned}\lambda(\omega)\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega')) &= \Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega)\lambda(\omega')) \\ &= \Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega \star \omega')), \quad \text{d'après [4], prop. 2.1.9,} \\ &= a(\omega \star \omega'), \quad \text{d'après } (a) \text{ et [4], prop. 3.1.9.}\end{aligned}$$

(*c*) Soient $\omega \in \mathscr{L}_\varphi$, $x \in M$, $y \in n_\varphi$. On a

$$\begin{aligned}\langle y^*, x.\omega \rangle &= \langle y^* x, \omega \rangle, \quad \text{d'après } 2.4,\\ &= (a(\omega) \mid \Lambda_\varphi(x^* y)), \quad \text{d'après [4], déf. } 1.1.3,\\ &= (a(\omega) \mid x^* \Lambda_\varphi(y)),\\ &= (xa(\omega) \mid \Lambda_\varphi(y)),\end{aligned}$$

ce qui implique le lemme d'après [4], déf. 1.1.3.

LEMME 2.6. — *Soient* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac,* $G(\mathbf{K})$ *son groupe intrinsèque,* $u \in G(\mathbf{K})$ :

(*a*) *Pour tous* $\omega, \omega' \in M_*$, *on a* $u.(\omega \star \omega') = (u.\omega) \star (u.\omega')$.

(*b*) *Pour tout* $\omega \in M_*$, *on a* $u \lambda(\omega) u^* = \lambda(u.\omega)$.

*Démonstration.* — (*a*) Soit $x \in M$. Comme $\Gamma(u) = u \otimes u$, on a

$$\begin{aligned}\langle x, u.(\omega \star \omega') \rangle &= \langle xu, \omega \star \omega' \rangle, \quad \text{d'après } 2.4,\\ &= \langle \Gamma(xu), \omega \otimes \omega' \rangle, \quad \text{d'après [4], déf. } 1.2.2,\\ &= \langle \Gamma(x)(u \otimes u), \omega \otimes \omega' \rangle\\ &= \langle \Gamma(x), u.\omega \otimes u.\omega' \rangle, \quad \text{d'après } 2.4,\\ &= \langle x, (u.\omega) \star (u.\omega') \rangle, \quad \text{d'après [4], déf. } 1.2.2.\end{aligned}$$

(*b*) Soit $\omega' \in \mathscr{L}_\varphi$. On a

$$\begin{aligned}u \lambda(\omega) u^* a(\omega') &= u \lambda(\omega) a(u^*.\omega'), \quad \text{d'après } 2.5\ (c),\\ &= ua(\omega \star (u^*.\omega')), \quad \text{d'après } 2.5\ (b),\\ &= a(u.(\omega \star (u^*.\omega'))), \quad \text{d'après } 2.5\ (c),\\ &= a((u.\omega) \star \omega'), \quad \text{d'après } (a) \text{ ci-dessus},\\ &= \lambda(u.\omega) a(\omega'), \quad \text{d'après } 2.5\ (b).\end{aligned}$$

Comme $a(\mathscr{L}_\varphi)$ est dense dans $\mathscr{H}$ ([4], rem. 1.1.4), on a bien $u \lambda(\omega) u^* = \lambda(u.\omega)$.

Introduisons à présent la notion principale de ce paragraphe.

DÉFINITION 2.7. — Soient $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $G$ un groupe l. c., $\alpha : G \to \operatorname{Aut} M$ une action ultrafaiblement continue de $G$ sur $M$. On dira que $\alpha$ est *une action de G sur* $\mathbf{K}$ si :

(i) $\Gamma \circ \alpha_g = (\alpha_g \otimes \alpha_g) \circ \Gamma$;

(ii) $\varkappa \circ \alpha_g = \alpha_g \circ \varkappa$ pour tout $g \in G$.

On remarquera qu'il n'est pas question de $\varphi$ dans cette définition. En fait, les conditions (i) et (ii) impliquent un comportement particulièrement favorable de $\alpha$ par rapport à $\varphi$. D'après [16], cor. III.4, $\alpha_g$ est un $\mathscr{K}$-automorphisme de $\mathbf{K}$ pour tout $g \in G$ ([4], déf. 5.1.2); par conséquent il existe un nombre positif $\chi(g)$ tel que

$$\varphi \circ \alpha_g = \chi(g)\,\varphi, \tag{2.7.1}$$

c'est-à-dire que $\varphi$ est relativement invariant par $\alpha$.

L'implémentation canonique $g \mapsto u_g$ de $\alpha$ est donc donnée par 1.12 (*a*). Elle a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.8 :

(*a*) $u_g J = J u_g$ *pour tout* $g \in G$.

(*b*) $\omega_{\beta,\gamma} \circ \alpha_g^{-1} = \omega_{u_g\beta, u_g\gamma}$, $\beta$; $\gamma \in \mathscr{H}$, $g \in G$.

(*c*) $(u_g \otimes u_g) W = W(u_g \otimes u_g)$, $g \in G$.

(*d*) $\lambda(\omega \circ \alpha_g^{-1}) = u_g \lambda(\omega) u_g^{-1}$, $\omega \in M_*$, $g \in G$.

(*e*) *pour tout* $\omega \in \mathscr{L}_\varphi$, *on a* $\omega \circ \alpha_g \in \mathscr{L}_\varphi$ *pour tout* $g \in G$, *et*

$$a(\omega \circ \alpha_g) = \chi(g)^{1/2} u_g^{-1} a(\omega).$$

(*f*) $u_g \widehat{\Delta} u_g^{-1} = \widehat{\Delta}$, $g \in G$.

*Démonstration.* – (*a*) se vérifie par définition de l'implémentation canonique ([7], th. 3.2), tandis que (*b*), (*c*), (*d*), (*e*) et (*f*) correspondent à [4], prop. 5.4.1, (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) et (*g*), respectivement.

Il résulte de 2.8 (*d*) que, pour tout $g \in G$, l'application $\lambda(\omega) \mapsto \lambda(\omega \circ \alpha_g^{-1})$ se prolonge par continuité en un automorphisme $\widehat{\alpha}_g$ de $\widehat{M}$, implémenté par $u_g$. Ces automorphismes forment un groupe par lequel $G$ agit sur $\widehat{M}$; cette action est ultrafaiblement continue. En outre, 2.8 (*c*) et (*a*) impliquent que $\widehat{\alpha}$ vérifie les conditions 2.7 par rapport à $\widehat{\mathbf{K}} = (\widehat{M}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\varkappa}, \widehat{\varphi})$ ([4], 3.2.1 et 3.3.2). Ceci justifie la définition suivante :

DÉFINITION 2.9. – Soit $\alpha$ une action de $G$ sur $\mathbf{K}$. L'action $\widehat{\alpha}$ de $G$ sur $\widehat{\mathbf{K}}$ sera appelée *l'action associée à* $\alpha$.

PROPOSITION 2.10. – *En utilisant les notations de* 2.7 *et* 2.9, *on a :*

(*a*) $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\alpha}_g = \chi(g)^{-1} \widehat{\varphi}$, $g \in G$.

(*b*) $\widehat{\alpha}$ *est canoniquement implémenté par* $g \mapsto u_g$.

(*c*) $u_g \widehat{J} = \widehat{J} u_g$, $g \in G$.

*Démonstration.* – D'après [4], prop. 6.2.2, $\widehat{\alpha}_g$ n'est autre chose que l'automorphisme dual de $\alpha_g^{-1}$. Dans ces conditions, (*a*) résulte de [4], th. 6.2.4 (dans l'énoncé duquel il convient cependant de remplacer $k_u^{-1}$ par $k_u$).

Soit $\omega \in \mathscr{L}_\varphi$. Pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} u_g \Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega)) &= u_g a(\omega), \quad \text{d'après [4], prop. 3.1.9,} \\ &= \chi(g)^{1/2} a(\omega \circ \alpha_g^{-1}), \quad \text{d'après 2.8 } (e), \\ &= \chi(g)^{1/2} \Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega \circ \alpha_g^{-1})), \quad \text{d'après [4], prop. 3.1.9,} \\ &= \chi(g)^{1/2} \Lambda_{\hat{\varphi}}(\hat{\alpha}_g(\lambda(w))), \quad \text{d'après 2.9.} \end{aligned}$$

Compte tenu de (*a*), cette dernière égalité correspond à 1.12 (*a*), et on conclut par densité de $a(\mathscr{L}_\varphi)$ dans $\mathscr{H}$ ([4], rem. 1.1.4).

(*c*) se déduit alors par dualité de 2.8 (*a*).

## 3. Produit croisé d'une algèbre de Kac par un groupe

Dans tout ce paragraphe, $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ est une algèbre de Kac, $G$ un groupe l. c. muni d'une mesure de Haar fixe, $\alpha$ une action de $G$ sur $\mathbf{K}$. Il s'agira de montrer que le produit croisé $M \otimes_\alpha G$ (qu'on notera souvent $\widetilde{M}$) peut être muni d'une structure fort naturelle d'algèbre de Kac. On examinera, dans l'ordre, le coproduit, l'involution et le poids de Haar.

Les lettres $\sigma$, $\sigma_G$ et $\Sigma$ désigneront les opérateurs unitaires sur $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$, $L^2(G) \otimes L^2(G)$ et $\widetilde{\mathscr{H}} \otimes \widetilde{\mathscr{H}}$ respectivement, qui « échangent les facteurs ». De même, $\tau : L^2(G) \otimes \mathscr{H} \mapsto \mathscr{H} \otimes L^2(G)$ sera défini par la relation

$$\tau(f \otimes \xi) = \xi \otimes f, \qquad f \in L^2(G), \qquad \xi \in \mathscr{H}.$$

DÉFINITION 3.1. — Soient $U$ et $\pi$ comme en 2.2 (*c*) et 1.4 (*a*), respectivement. On pose

(*a*) $\widetilde{U} = (1_{\mathscr{H}} \otimes \tau^* \otimes 1_G)(1_{\mathscr{H}} \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes U)(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau \otimes 1_G)$.

(*b*) $\widetilde{W} = (\pi \otimes \pi)(W)\,\widetilde{U}$.

$\widetilde{U}$ et $\widetilde{W}$ sont des opérateurs unitaires sur $\widetilde{\mathscr{H}} \otimes \widetilde{\mathscr{H}}$. Pour tous

$$\xi \in K(G \otimes G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}), \qquad g, h \in G,$$

on a les relations

(3.1.1) $\qquad (\widetilde{U}\xi)(g, h) = \xi(h^{-1}g, h)$, d'après 2.2.6,

(3.1.2) $\qquad (\widetilde{U}^*\xi)(g, h) = \xi(hg, h)$,

(3.1.3) $\qquad (\widetilde{W}\xi)(g, h) = (u_g^{-1} \otimes u_h^{-1}) W (u_g \otimes u_h) \xi(h^{-1}g, h)$,

et, en utilisant 2.8 (*c*),

(3.1.4) $\qquad (\widetilde{W}^*\xi)(g, h) = (u_g^{-1} \otimes 1_{\mathscr{H}}) W^* (u_g \otimes 1_{\mathscr{H}}) \xi(hg, h)$.

LEMME 3.2 :

(*a*) $\tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))\, \tilde{W}^* = (\pi \otimes \pi)(\Gamma(x)),\ x \in M.$

(*b*) $\tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \lambda(g))\, \tilde{W}^* = \lambda(g) \otimes \lambda(g),\ g \in G.$

*Démonstration.* – (*a*) Soient $x \in M$, $\xi \in K(G \times G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H})$, $g, h \in G$. On a

$$\begin{aligned}(\tilde{U}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))\, \tilde{U}^* \xi)(g, h) &= ((1_{\mathscr{H}} \otimes 1_G \otimes \pi(x))\, \tilde{U}^* \xi)(h^{-1} g, h), \\ &\quad \text{d'après } 3.1.1, \\ &= (1_{\mathscr{H}} \otimes \alpha_h^{-1}(x))(\tilde{U}^* \xi)(h^{-1} g, h), \\ &\quad \text{d'après } 1.4\ (a), \\ &= (1_{\mathscr{H}} \otimes \alpha_h^{-1}(x))\, \xi(g, h), \\ &\quad \text{d'après } 3.1.2, \\ &= ((1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))\, \xi)(g, h), \\ &\quad \text{d'après } 1.4\ (a).\end{aligned}$$

Par continuité, il en résulte $\tilde{U}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))\, \tilde{U}^* = 1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x)$ pour tout $x \in M$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))\tilde{W}^* &= (\pi \otimes \pi)(W)(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \pi(x))(\pi \otimes \pi)(W^*), \quad \text{d'après } 3.1\ (b), \\ &= (\pi \otimes \pi)(W(1_{\mathscr{H}} \otimes x)W^*), \\ &= (\pi \otimes \pi)(\Gamma(x)), \quad \text{d'après [4], prop. } 2.1.5\ (c),\end{aligned}$$

pour tout $x \in M$, ce qu'il fallait démontrer.

(*b*) Soient $\xi \in K(G \times G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H})$, $g, h, k \in G$. Alors

$$\begin{aligned}&(\tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \lambda(g))\tilde{W}^* \xi)(h, k) \\ &\quad = (u_h^{-1} \otimes u_k^{-1}) W(u_h \otimes u_k)((1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes \lambda(g))\tilde{W}^* \xi)(k^{-1} h, k), \\ &\quad\quad \text{d'après } 3.1.3, \\ &\quad = (u_h^{-1} \otimes u_k^{-1}) W(u_h \otimes u_k)(\tilde{W}^* \xi)(k^{-1} h, g^{-1} k), \\ &\quad = (u_{h^{-1}} \otimes u_{k^{-1}}) W(u_k \otimes u_k) W^*(u_{k^{-1}h} \otimes 1_{\mathscr{H}})\, \xi(g^{-1} h, g^{-1} k), \\ &\quad\quad \text{d'après } 3.1.4, \\ &\quad = \xi(g^{-1} h, g^{-1} k),\end{aligned}$$

d'après 2.8 (*c*), d'où le résultat par continuité.

PROPOSITION 3.3. – *Pour tout* $x \in \tilde{M}$, *on définit* $\tilde{\Gamma}(x) = \tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}} \otimes x)\, \tilde{W}^*$. *Alors* $\tilde{\Gamma}$ *est un coproduit sur* $\tilde{M}$ ([4], déf. 1.2.1.2) *qui vérifie :*

(3.3.1) $$\tilde{\Gamma}(\pi(x)) = (\pi \otimes \pi)(\Gamma(x)), \qquad x \in M,$$

(3.3.2) $$\tilde{\Gamma}(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g), \qquad g \in G.$$

*Démonstration.* — Il est clair, d'après 3.2, que $\tilde{\Gamma}$ est un homomorphisme normal fidèle de $\tilde{M}$ dans $\tilde{M} \otimes \tilde{M}$ tel que $\tilde{\Gamma}(1_{\tilde{M}}) = 1_{\tilde{M}} \otimes 1_{\tilde{M}}$. Il reste donc à vérifier la seule coassociativité. Il suffit de le faire sur les générateurs $\pi(x)$, $x \in M$, et $\lambda(g)$, $g \in G$, de $\tilde{M}$, en utilisant un argument de continuité.

Soit donc d'abord $x \in M$. On a

$$\begin{aligned}((i_{\tilde{M}} \otimes \tilde{\Gamma})\tilde{\Gamma})(\pi(x)) &= (i_{\tilde{M}} \otimes \tilde{\Gamma})((\pi \otimes \pi)(\Gamma(x))), \quad \text{d'après 3.2 } (a),\\ &= (\pi \otimes \pi \otimes \pi)(((i_M \otimes \Gamma)\Gamma)(x)), \quad \text{d'après 3.2 } (a),\\ &= (\pi \otimes \pi \otimes \pi)(((\Gamma \otimes i_M)\Gamma)(x))\\ &\quad \text{par la coassociativité de } \Gamma,\\ &= ((\tilde{\Gamma} \otimes i_{\tilde{M}})\tilde{\Gamma})(\pi(x)), \quad \text{en utilisant deux fois 3.2 } (a).\end{aligned}$$

Supposons ensuite $g \in G$. Alors

$$\begin{aligned}((i_{\tilde{M}} \otimes \tilde{\Gamma})\tilde{\Gamma})(\lambda(g)) &= (i_{\tilde{M}} \otimes \tilde{\Gamma})(\lambda(g) \otimes \lambda(g))\\ &= \lambda(g) \otimes \lambda(g) \otimes \lambda(g)\\ &= ((\tilde{\Gamma} \otimes i_{\tilde{M}})\tilde{\Gamma})(\lambda(g)),\end{aligned}$$

par un usage répété de 3.2 $(b)$.

En vue de la définition d'une involution de $\tilde{M}$, on a besoin de certaines propriétés de l'involution $\hat{J} \otimes \hat{J}_G$ de $\mathscr{H}$ (2.2.5).

LEMME 3.4. — *Soit $V$ comme en* 1.4 $(d)$. *On a :*

$(a)$ $(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)V = V(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)$.

$(b)$ $(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)\,\pi(x)^*\,(\hat{J} \otimes \hat{J}_G) = \pi(\varkappa(x))$, $x \in M$.

$(c)$ $(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)\,\lambda(g)^*\,(\hat{J} \otimes \hat{J}_G) = \lambda(g^{-1})$, $g \in G$.

*Démonstration.* — $(a)$ Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{H}$, $f_1, f_2 \in L^2(G)$. On a

$$\begin{aligned}&((\hat{J} \otimes \hat{J}_G)V(\xi_1 \otimes f_1) \mid \xi_2 \otimes f_2)\\ &= ((\hat{J} \otimes \hat{J}_G)(\xi_2 \otimes f_2) \mid V(\xi_1 \otimes f_1))\\ &= \int_G \overline{f_1(g)}\,\overline{f_2(g)}\,(\hat{J}\xi_2 \mid u_g \xi_1)\,dg, \quad \text{d'après 1.4 } (d) \text{ et 2.2.5},\\ &= \int_G \overline{f_1(g)}\,\overline{f_2(g)}\,(\hat{J} u_g \xi_1 \mid \xi_2)\,dg\\ &= \int_G \overline{f_1(g)}\,\overline{f_2(g)}\,(u_g \hat{J}\,\xi_1 \mid \xi_2)\,dg, \quad \text{d'après 2.10 } (c),\\ &= (V(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)(\xi_1 \otimes f_1) \mid \xi_2 \otimes f_2),\end{aligned}$$

d'où le résultat par continuité.

(*b*) Soit $x \in M$. Alors

$$\begin{aligned}(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)\pi(x)^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G) &= V^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)V\pi(x^*)V^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)V, \quad \text{d'après } (a),\\ &= V^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)(x^* \otimes 1_G)(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)V, \quad \text{d'après } 1.4.1,\\ &= V^*(\varkappa(x) \otimes 1_G)V, \quad \text{d'après [4], cor. } 3.1.5\ (a),\\ &= \pi(\varkappa(x)), \quad \text{d'après } 1.4.1.\end{aligned}$$

(*c*) Soit $g \in G$. On a

$$\begin{aligned}(\hat{J} \otimes \hat{J}_G)\lambda(g)^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G) &= (\hat{J} \otimes \hat{J}_G)(1_{\mathscr{H}} \otimes \lambda_g^{-1})(\hat{J} \otimes \hat{J}_G), \quad \text{d'après } 1.4\ (b),\\ &= 1_{\mathscr{H}} \otimes \lambda_g^{-1}, \quad \text{d'après } 2.2.5,\\ &= \lambda(g^{-1}).\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.5. — (*a*) *Pour tout* $x \in \tilde{M}$, *on définit*

$$\tilde{\varkappa}(x) = (\hat{J} \otimes \hat{J}_G)x^*(\hat{J} \otimes \hat{J}_G).$$

*Alors* $\tilde{\varkappa}$ *est un antiautomorphisme involutif de* $\tilde{M}$, *qui vérifie :*

$$\tilde{\varkappa}(\pi(x)) = \pi(\varkappa(x)), \qquad x \in M \tag{3.5.1}$$

$$\tilde{\varkappa}(\lambda(g)) = \lambda(g^{-1}), \qquad g \in G. \tag{3.5.2}$$

(*b*) *Le triplet* $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa})$ *est une algèbre de Hopf-von Neumann involutive* ([4], déf. 1.2.1).

*Démonstration.* — (*a*) résulte de 3.4 (*b*) et (*c*), ainsi que des propriétés de $\hat{J}$ et $\hat{J}_G$. Pour démontrer (*b*), on utilise les opérateurs $\Sigma$ et $\sigma$ introduits au début de ce paragraphe. Il s'agit de vérifier la relation

$$\Sigma\tilde{\Gamma}(\tilde{\varkappa}(x))\Sigma = (\tilde{\varkappa} \otimes \tilde{\varkappa})(\tilde{\Gamma}(x)),$$

pour tout $x \in \tilde{M}$. Une fois de plus, on se limitera aux générateurs de $\tilde{M}$, en invoquant un argument de continuité.

Soit donc d'abord $x \in M$. On a

$$\begin{aligned}\Sigma\tilde{\Gamma}(\tilde{\varkappa}(\pi(x)))\Sigma &= \Sigma\tilde{\Gamma}(\pi(\varkappa(x)))\Sigma, \quad \text{d'après } 3.5.1,\\ &= \Sigma(\pi \otimes \pi)(\Gamma(\varkappa(x)))\Sigma, \quad \text{d'après } 3.3.1,\\ &= (\pi \otimes \pi)(\sigma\Gamma(\varkappa(x))\sigma)\\ &= (\pi \otimes \pi)((\varkappa \otimes \varkappa)(\Gamma(x))), \quad \text{d'après [4], déf. } 1.2.1,\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \tilde{\varkappa})(\tilde{\Gamma}(\pi(x))), \quad \text{d'après } 3.5.1 \text{ et } 3.3.1.\end{aligned}$$

Ensuite on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned}\Sigma\tilde{\Gamma}(\tilde{\varkappa}(\lambda(g)))\Sigma &= \Sigma\tilde{\Gamma}(\lambda(g^{-1}))\Sigma, \quad \text{d'après } 3.5.2,\\ &= \Sigma(\lambda(g^{-1}) \otimes \lambda(g^{-1}))\Sigma, \quad \text{d'après } 3.3.2,\\ &= \lambda(g^{-1}) \otimes \lambda(g^{-1})\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \tilde{\varkappa})(\tilde{\Gamma}(\lambda(g))), \quad \text{d'après } 3.5.2 \text{ et } 3.3.2.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

A présent, il faut introduire un poids. Il s'avère que le poids dual $\tilde{\varphi}$ sur $\tilde{M}$ (1.9 (*c*)) est un poids de Haar sur $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa})$.

LEMME 3.6. — *Soit $T$ le poids opératoriel défini en* 1.9 (*b*). *On a* $(i_{\tilde{M}} \otimes T)(\tilde{\Gamma}(x)) = \tilde{\Gamma}(T(x))$ *pour tout* $x \in \tilde{M}_+$ (*dans le membre de droite, on a prolongé* $\tilde{\Gamma}$ *à l'extension de la partie positive de* $\tilde{M}$ ([10], déf. 1.1)).

*Démonstration.* — Soient $\delta$ et $\psi_G$ comme en 1.9 (*a*) et (*b*).

On prouvera d'abord la relation $(i_{\tilde{M}} \otimes \delta) \circ \tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma} \otimes i_{\mathcal{M}(G)}) \circ \delta$ (1), qu'il suffit de vérifier pour les générateurs $\pi(x)$, $x \in M$, et $\lambda(g)$, $g \in G$, de $\tilde{M}$. Soit donc $x \in M$. Alors

$$\begin{aligned}(i_{\tilde{M}} \otimes \delta)(\tilde{\Gamma}(\pi(x))) &= (i_{\tilde{M}} \otimes \delta)((\pi \otimes \pi)(\Gamma(x))), \quad \text{d'après 3.3.1},\\ &= (\pi \otimes \pi)(\Gamma(x)) \otimes 1_G, \quad \text{d'après 1.9 } (a),\\ &= \tilde{\Gamma}(\pi(x)) \otimes 1_G, \quad \text{d'après 3.3.1},\\ &= (\tilde{\Gamma} \otimes i_{\mathcal{M}(G)})(\delta(\pi(x))), \quad \text{d'après 1.9 } (a).\end{aligned}$$

Pour $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}(i_{\tilde{M}} \otimes \delta)(\Gamma(\lambda(g))) &= (i_{\tilde{M}} \otimes \delta)(\lambda(g) \otimes \lambda(g)), \quad \text{d'après 3.3.2},\\ &= \lambda(g) \otimes \lambda(g) \otimes \lambda_g, \quad \text{d'après 1.9 } (a),\\ &= \tilde{\Gamma}(\lambda(g)) \otimes \lambda_g, \quad \text{d'après 3.3.2},\\ &= (\tilde{\Gamma} \otimes i_{\mathcal{M}(G)})(\delta(\lambda(g))),\end{aligned}$$

et la relation (1) en résulte.

Posons ensuite $x \in \tilde{M}_+$. On a

$$\begin{aligned}(i_{\tilde{M}} \otimes T)(\Gamma(x)) &= (i_{\tilde{M}} \otimes i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G)(i_{\tilde{M}} \otimes \delta)(\tilde{\Gamma}(x))), \quad \text{d'après 1.9 } (b),\\ &= (i_{\tilde{M}} \otimes i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G)((\tilde{\Gamma} \otimes i_{\mathcal{M}(G)})(\delta(x))), \quad \text{d'après (1)},\\ &= \tilde{\Gamma}((i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G)(\delta(x))), \quad \text{d'après 1.1 } (b),\\ &= \tilde{\Gamma}(T(x)), \quad \text{ce qui achève la démonstration.}\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.7. — *Le quadruplet* $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *vérifie* (K-iii).

*Démonstration.* — Soit $x \in \tilde{M}_+$. On a

$$\begin{aligned}(i_{\tilde{M}} \otimes \tilde{\varphi})(\tilde{\Gamma}(x)) &= (i_{\tilde{M}} \otimes \varphi)(i_{\tilde{M}} \otimes \pi^{-1})(i_{\tilde{M}} \otimes T)(\tilde{\Gamma}(x)), \quad \text{d'après 1.9 } (c),\\ &= (i_{\tilde{M}} \otimes \varphi)(i_{\tilde{M}} \otimes \pi^{-1})(\tilde{\Gamma}(T(x))), \quad \text{d'après 3.6},\\ &= (i_{\tilde{M}} \otimes \varphi)(\pi \otimes i_M)(\Gamma((\pi^{-1} \circ T)(x))), \quad \text{d'après 3.3.1},\\ &= \pi((i_M \otimes \varphi)(\Gamma((\pi^{-1} \circ T)(x))), \quad \text{d'après 1.1 } (b),\\ &= \pi(\varphi((\pi^{-1} \circ T)(x))\, 1_M), \quad \text{par (K-iii) appliqué à } (M, \Gamma, \varkappa, \varphi),\\ &= \pi(\tilde{\varphi}(x)\, 1_M), \quad \text{d'après 1.9 } (c),\\ &= \tilde{\varphi}(x)\, 1_{\tilde{M}}, \quad \text{ce qu'il fallait démontrer.}\end{aligned}$$

Dès à présent, on peut associer un opérateur fondamental au quadruplet $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ ([4], prop. 2.1.1). L'objectif suivant est de démontrer que cet opérateur n'est autre que l'unitaire $\tilde{W}$ introduit en 3.1 (*b*). On explicite ainsi ce que suggérait la notation, qui s'en trouve justifiée.

Pour tout $z \in K(G\times G, M \otimes M)$, posons

$$(\mu \otimes \mu)(z) = \int_G \int_G (\lambda(g) \otimes \lambda(h))(\pi \otimes \pi)(z(g, h))\, dg\, dh.$$

Il est clair que $(\mu \otimes \mu)(z) \in \tilde{M} \otimes \tilde{M}$.

On définit une action $\alpha \otimes \alpha$ de $G\times G$ sur $M \otimes M$ en posant

$$\alpha \otimes \alpha_{(g,h)} = \alpha_g \otimes \alpha_h \quad \text{pour tous } g,\ h \in G.$$

Le produit croisé $(M \otimes M) \otimes_{\alpha\otimes\alpha} (G\times G)$ est manifestement isomorphe à $\tilde{M} \otimes \tilde{M}$. De plus, à cet isomorphisme près, $\mu \otimes \mu$ correspond à l'application définie en 1.4 (*e*), et $\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\varphi}$ est le poids dual de $\varphi \otimes \varphi$.

LEMME 3.8. — *Soient $x$, $y \in K(G, M)$. On définit une application $z$ de $G\times G$ dans $M \otimes M$ par*

$$z(g, h) = (u_g^{-1} \otimes u_h^{-1}) W (1_{\mathscr{H}} \otimes u_h y(h) u_h^{-1}) W^* (u_g \otimes u_h) \times (x(h^{-1} g) \otimes 1_{\mathscr{H}}), \qquad g,\ h \in G.$$

*Alors $z \in K(G\times G, M \otimes M)$, et*

$$(\mu \otimes \mu)(z) = \tilde{\Gamma}(\mu(y))(\mu(x) \otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}}).$$

*Démonstration.* — La continuité $\star$-ultraforte de $z$ se démontre facilement en utilisant la continuité de $x$, $y$ et $u$, à condition de se rappeler que $x$ et $y$ sont bornés en norme. Il est également immédiat que $z$ est à support compact, étant donné que $x$ et $y$ le sont.

Pour vérifier la formule dans l'énoncé, supposons $\xi \in K(G\times G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H})$. Comme dans [8], lemme 2.4, on calcule aisément que, pour tous $g$, $h \in G$,

$$\begin{aligned}((\mu \otimes \mu)(z)\xi)(g, h) &= \int_G \int_G (u_k \otimes u_l)\, z(gk, hl)(u_k^{-1} \otimes u_l^{-1})\, \xi(k^{-1}, l^{-1})\, dk\, dl \\ &= \int_G \int_G (u_g^{-1} \otimes u_h^{-1}) W (1_{\mathscr{H}} \otimes u_{hl}\, y(hl)\, u_{l^{-1}h^{-1}}) W^* (u_g \otimes u_h) \\ &\qquad \times (u_k x(l^{-1} h^{-1} gk) u_k^{-1} \otimes 1_{\mathscr{H}})\, \xi(k^{-1}, l^{-1})\, dk\, dl.\end{aligned}$$

D'autre part

$$(\tilde{\Gamma}(\mu(y))(\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})\xi)(g, h)$$
$$= (\tilde{W}(1_{\tilde{\mathscr{H}}}\otimes\mu(y))\tilde{W}^*(\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})\xi)(g, h), \quad \text{d'après } 3.3,$$
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(u_g\otimes u_h)((1_{\tilde{\mathscr{H}}}\otimes\mu(y))\tilde{W}^*$$
$$\times(\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})\xi)(h^{-1}g, h), \quad \text{d'après } 3.1.3,$$
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(u_g\otimes u_h)\int_G (1_{\mathscr{H}}\otimes u_l\, y(hl)u_l^{-1})$$
$$\times(\tilde{W}^*(\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})\xi)(h^{-1}g, l^{-1})\,dl, \quad \text{d'après [8], lemme } 2.4,$$
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W\int_G (u_g\otimes u_{hl}\, y(hl)u_l^{-1})(u_{g^{-1}h}\otimes 1_{\mathscr{H}})$$
$$\times W^*(u_{h^{-1}g}\otimes 1_{\mathscr{H}})((\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})\xi)(l^{-1}h^{-1}g, l^{-1})\,dl,$$
d'après 3.1.4,
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W\int_G (u_h\otimes u_{hl}\, y(hl)u_l^{-1})W^*(u_{h^{-1}g}\otimes 1_{\mathscr{H}})$$
$$\times\int_G (u_k\, x(l^{-1}h^{-1}gk)u_k^{-1}\otimes 1_{\mathscr{H}})\xi(k^{-1}, l^{-1})\,dk\,dl,$$
d'après [8], lemme 2.4,
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W\int_G\int_G (1_{\mathscr{H}}\otimes u_{hl}\, y(hl)u_{hl}^{-1})W^*(u_g\otimes u_h)$$
$$\times(u_k\, x(l^{-1}h^{-1}gk)u_k^{-1}\otimes 1_{\mathscr{H}})\xi(k^{-1}, l^{-1})\,dk\,dl,$$
d'après 2.8 (*c*).

En comparant les deux expressions obtenues, on trouve le résultat désiré.

PROPOSITION 3.9. — *$\tilde{W}$ est l'opérateur fondamental associé à $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ d'après la proposition* 2.11 *de* [4].

*Démonstration.* — Soient $x, y \in C_\varphi$ (1.11 (*b*)). On définit $z$ comme en 3.8. Comme $\mu(x)$, $\mu(y)\in n_{\tilde{\varphi}}$, il résulte de 3.8 et de (K-iii) que $(\mu\otimes\mu)(z)\in n_{\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}}$ ([4], remarque précédant la proposition 2.1.1). Pour presque tous $g, h\in G$, on a

$$(\tilde{W}(\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x))\otimes\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(y))))(g, h)$$
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(u_g\otimes u_h)(\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x))(h^{-1}g)\otimes\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(y))(h)),$$
d'après 3.1.3,
$$= (u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(u_g\otimes u_h)(\Lambda_\varphi(x(h^{-1}g))\otimes\Lambda_\varphi(y(h))),$$
d'après 1.10,
$$= \chi(g)^{-1/2}\chi(h)^{-1/2}(u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(\Lambda_\varphi(\alpha_g(x(h^{-1}g)))\otimes\Lambda_\varphi(\alpha_h(y(h)))),$$
d'après 1.12 (*a*),

$= \chi(g)^{-1/2}\chi(h)^{-1/2}(u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(\Gamma(\alpha_h(y(h)))(\alpha_g(x(h^{-1}g))\otimes 1_{\mathscr{H}}))$, d'après [4], prop. 2.1,

$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}((u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W(1_{\mathscr{H}}\otimes u_h y(h) u_h^{-1})$
$\times W^*(u_g x(h^{-1}g) u_g^{-1}\otimes 1_{\mathscr{H}})(u_g\otimes u_h))$, d'après 1.12 (*a*),

$= \Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(z(g,h))$.

En appliquant 1.10 au poids $\varphi\otimes\varphi$ et à l'action $\alpha\otimes\alpha$ sur $M\otimes M$, et compte tenu des remarques qui précèdent le lemme 3.8, on a

$$\Lambda_{\varphi\otimes\varphi}(z(g,h)) = \Lambda_{\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}}((\mu\otimes\mu)(z))(g,h) \quad \text{p.p.}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\tilde{W}(\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(x))\otimes\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(y))) &= \Lambda_{\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}}((\mu\otimes\mu)(z))\\ &= \Lambda_{\tilde{\varphi}\otimes\tilde{\varphi}}(\tilde{\Gamma}(\mu(y))(\mu(x)\otimes 1_{\tilde{\mathscr{H}}})), \quad \text{d'après 3.8.}\end{aligned}$$

Comme $\Lambda_{\tilde{\varphi}}(\mu(C_\varphi))$ est dense dans $\mathscr{H}$ (cela résulte de [8], lemme 2.5 (4)), la proposition se vérifie.

Au lieu de prouver directement que $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\chi}, \tilde{\varphi})$ vérifie l'axiome (K-iv) (ce qui paraît fort compliqué), on utilisera plutôt la proposition précédente pour montrer la validité de la propriété équivalente (K-iv)′ figurant dans l'énoncé de 2.3.

LEMME 3.10. — *Pour tous* $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\tilde{\mathscr{H}}$,

$$(\tilde{W}((\hat{J}\otimes\hat{J}_G)\alpha\otimes\beta)\,|\,(\hat{J}\otimes\hat{J}_G)\gamma\otimes\delta) = (\gamma\otimes\beta\,|\,\tilde{W}(\alpha\otimes\delta)).$$

*Démonstration.* — Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathscr{H}$, $a, b, c, d\in K(G)$. On a

$$\begin{aligned}&(\tilde{W}(\hat{J}\alpha\otimes\hat{J}_G a\otimes\beta\otimes b)\,|\,\hat{J}\gamma\otimes\hat{J}_G c\otimes\delta\otimes d)\\
&= \int_G\int_G \overline{a(h^{-1}g)}\,b(h)\,c(g)\,\overline{d(h)}((u_g^{-1}\otimes u_h^{-1})W\\
&\quad\times(u_g\otimes u_h)(\hat{J}\alpha\otimes\beta)\,|\,\hat{J}\gamma\otimes\delta)\,dg\,dh, \quad \text{d'après 3.1.3 et 2.2.5,}\\
&= \int_G\int_G \overline{a(h^{-1}g)}\,b(h)\,c(g)\,\overline{d(h)}\\
&\quad\times(W(\hat{J}u_g\alpha\otimes u_h\beta)\,|\,\hat{J}u_g\gamma\otimes u_h\delta)\,dg\,dh, \quad \text{d'après 2.10 (}c\text{),}\\
&= \int_G\int_G \overline{a(h^{-1}g)}\,b(h)\,c(g)\,\overline{d(h)}\\
&\quad\times(u_g\gamma\otimes u_h\beta\,|\,W(u_g\alpha\otimes u_h\delta))\,dg\,dh, \quad \text{d'après 2.3 (}b\text{),}\\
&= (\gamma\otimes c\otimes\beta\otimes b\,|\,\tilde{W}(\alpha\otimes a\otimes\delta\otimes d)),\end{aligned}$$

par un calcul entièrement similaire.

La conclusion s'obtient par densité de $\mathscr{H}\odot K(G)$ dans $\tilde{\mathscr{H}}$.

COROLLAIRE 3.11. — *Le quadruplet* $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *vérifie* (K-iv).

*Démonstration.* — Comme $\tilde{\varkappa}$ est implémenté par $\hat{J} \otimes \hat{J}_G$, on peut invoquer 3.7, 3.9 et 3.10 pour appliquer 2.3.

LEMME 3.12. — *Le quadruplet* $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *vérifie* (K-v).

*Démonstration.* — Soit $x \in M$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\varkappa}(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\pi(x))) &= \tilde{\varkappa}(\pi(\sigma_t^{\varphi}(x))), && \text{d'après [8], th. 3.2 (2),}\\
&= \pi(\varkappa(\sigma_t^{\varphi}(x))), && \text{d'après 3.5.1,}\\
&= \pi(\sigma_{-t}^{\varphi}(\varkappa(x))), && \text{d'après (K-v),}\\
&= \sigma_{-t}^{\tilde{\varphi}}(\varkappa(\pi(x))), && \text{par un calcul similaire.}
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tous $g \in G$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\varkappa(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda(g))) &= \Delta_G(g)^{it}\chi(g)^{it}\tilde{\varkappa}(\lambda(g)), && \text{d'après [8], th. 3.2 (2),}\\
&= \Delta_G(g)^{it}\chi(g)^{it}\lambda(g^{-1}), && \text{d'après 3.5.2,}\\
&= \sigma_{-t}^{\tilde{\varphi}}(\lambda(g^{-1})), && \text{d'après [8], th. 3.2 (2),}\\
&= \sigma_{-t}^{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varkappa}(\lambda(g))), && \text{d'après 3.5.2.}
\end{aligned}$$

Par densité, on conclut que $\tilde{\varkappa} \circ \sigma_t^{\tilde{\varphi}} = \sigma_{-t}^{\tilde{\varphi}} \circ \tilde{\varkappa}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

D'après la définition 2.1, on a obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac, G un groupe l. c.,* $\alpha$ *une action de G sur* $\mathbf{K}$, $\tilde{M} = M \otimes_\alpha G$, $\tilde{\varphi}$ *le poids sur* $\tilde{M}$ *dual de* $\varphi$. *Alors* $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *est une algèbre de Kac, où* $\tilde{\Gamma}$ *et* $\tilde{\varkappa}$ *ont été définis en* 3.3 *et* 3.5 (*a*), *respectivement.*

Cette algèbre sera appelée le *produit croisé de* $\mathbf{K}$ *par G* (relativement à $\alpha$), et notée $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$.

## 4. L'algèbre duale

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier l'algèbre $(\hat{\tilde{M}}, \hat{\tilde{\Gamma}}, \hat{\tilde{\varkappa}}, \hat{\tilde{\varphi}})$ duale de $(\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$. On commencera par énoncer quelques résultats qui seront utilisés ultérieurement, tout en n'étant pas dépourvus d'intérêt par eux-mêmes.

LEMME 4.1. — *Soit* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac, G un groupe l. c.,* $\alpha$ *une action de G sur* $\mathbf{K}$. *Le poids* $(\varphi \circ \varkappa)^{\sim}$ *sur* $\tilde{M}$, *dual du poids* $\varphi \circ \varkappa$ *au sens de* 1.9 (*c*), *est égal à* $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varkappa}$.

*Démonstration.* — On procède par étapes, en utilisant les notations introduites en 1.9. Soit $\varkappa_G$ l'involution de $\mathscr{M}(G)$ définie en 2.2.2. Alors $\delta \circ \tilde{\varkappa} = (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G) \circ \delta$. En effet,

$$\begin{aligned}\delta(\tilde{\varkappa}(\pi(x))) &= \delta(\pi(\varkappa(x))), \quad \text{d'après } 3.5.1,\\ &= \pi(\varkappa(x)) \otimes 1_G, \quad \text{d'après } 1.9\ (a),\\ &= \tilde{\varkappa}(\pi(x)) \otimes 1_G, \quad \text{d'après } 3.5.1,\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G)(\pi(x) \otimes 1_G),\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G)(\delta(\pi(x))) \quad \text{pour tout } x \in M, \quad \text{d'après } 1.9\ (a),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta(\tilde{\varkappa}(\lambda(g))) &= \delta(\lambda(g^{-1})), \quad \text{d'après } 3.5.2,\\ &= \lambda(g^{-1}) \otimes \lambda_{g^{-1}}, \quad \text{d'après } 1.9\ (a),\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G)(\lambda(g) \otimes \lambda_g), \quad \text{d'après } 3.5.2 \text{ et } 2.2.2,\\ &= (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G)(\delta(\lambda(g)) \quad \text{pour tout } g \in G, \quad \text{d'après } 1.9\ (a).\end{aligned}$$

Ensuite, on a $T \circ \tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa} \circ T$. En effet,

$$\begin{aligned}T \circ \tilde{\varkappa} &= (i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G) \circ \delta \circ \tilde{\varkappa}, \quad \text{d'après } 1.9\ (b),\\ &= (i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G) \circ (\tilde{\varkappa} \otimes \varkappa_G) \circ \delta, \quad \text{d'après ce qui précède},\\ &= \tilde{\varkappa} \circ (i_{\tilde{M}} \otimes \psi_G) \circ \delta, \quad \text{parce que } \psi_G \circ \varkappa_G = \psi_G,\\ &= \tilde{\varkappa} \circ T, \quad \text{d'après } 1.9\ (b).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varkappa} &= \varphi \circ \pi^{-1} \circ T \circ \tilde{\varkappa}, \quad \text{d'après } 1.9\ (c),\\ &= \varphi \circ \pi^{-1} \circ \tilde{\varkappa} \circ T, \quad \text{d'après ce qui précède},\\ &= \varphi \circ \varkappa \circ \pi^{-1} \circ T, \quad \text{d'après } 3.5.1,\\ &= (\varphi \circ \varkappa)^{\sim}, \quad \text{d'après } 1.9\ (c).\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.2. — *Soient* $\mathbf{K}$, $G$, $\alpha$ *comme dans le lemme* 4.1. *Désignons par* $\mathbf{K}^{\varsigma}$ (*resp.* $(\mathbf{K} \otimes_\alpha G)^{\varsigma}$) *l'algèbre réfléchie de* $\mathbf{K}$ (*resp.* $\mathbf{K} \otimes_\alpha G$) ([17], prop. II.6) :

(*a*) $\alpha$ *est une action de* $G$ *sur* $\mathbf{K}^{\varsigma}$;

(*b*) *on a* $\mathbf{K}^{\varsigma} \otimes_\alpha G = (\mathbf{K} \otimes_\alpha G)^{\varsigma}$.

*Démonstration.* — Par définition, on a $\mathbf{K}^{\varsigma} = (M, \Gamma^{\varsigma}, \varkappa, \varphi \circ \varkappa)$, où $\Gamma^{\varsigma}(x) = \sigma\, \Gamma(x)\, \sigma$ pour tout $x \in M$ (dans ce qui suit, on utilise les opérateurs $\sigma$ et $\Sigma$ introduits au début du paragraphe 3) :

(*a*) il suffit de vérifier la relation $\Gamma^{\varsigma} \circ \alpha_g = (\alpha_g \otimes \alpha_g) \circ \Gamma^{\varsigma}$ pour tout $g \in G$, ce qui se fait sans difficultés;

(*b*) résulte de 4.1, et des calculs suivants :

$$\begin{aligned}\Sigma\tilde{\Gamma}(\pi(x))\Sigma &= \Sigma(\pi\otimes\pi)(\Gamma(x))\Sigma, \quad \text{d'après 3.3.1,}\\ &= (\pi\otimes\pi)(\sigma\Gamma(x)\sigma)\\ &= (\pi\otimes\pi)(\Gamma^{\varsigma}(x)), \qquad \text{pour} \quad x\in M,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Sigma\tilde{\Gamma}(\lambda(g))\Sigma &= \Sigma(\lambda(g)\otimes\lambda(g))\Sigma, \quad \text{d'après 3.3.2,}\\ &= \lambda(g)\otimes\lambda(g) \qquad \text{pour} \quad g\in G.\end{aligned}$$

Le lemme suivant fournit l'argument central du raisonnement ultérieur.

LEMME 4.3. — *Soit* $\omega\in\tilde{M}_*$ *et* $\xi\in K(G,\mathscr{H})$. *En notant* $\tilde{\lambda}$ *la représentation de Fourier de* $\tilde{M}_*$, *on a*

$$(\tilde{\lambda}(\omega)\xi)(g) = \lambda(\omega(g))\xi(g) \quad \text{p.p. (1.5).}$$

*Par conséquent*, $\tilde{\lambda}(\omega)\xi\in K(G,\mathscr{H})$.

*Démonstration.* — En utilisant la continuité de l'application $g\mapsto\lambda(\omega(g))$ pour la topologie normique sur $M$ (1.6 (*a*)), on montre que l'application $g\mapsto\lambda(\omega(g))\xi(g)$ appartient à $K(G,\mathscr{H})$ pour tout $\xi\in K(G,\mathscr{H})$.

Soit $\omega=\omega_{\gamma,\delta}$, $\gamma,\delta\in L^2(G,\mathscr{H})$. D'après 1.8, la fonction

$$g\mapsto\omega_{\gamma(hg),\,\delta(g)}\circ\alpha_{g^{-1}},$$

est scalairement intégrable pour la topologie normique sur $M_*$, et ce pour tout $h\in G$. Comme $\lambda$ est continue pour les topologies normiques sur $M_*$ et $M$, on conclut que la fonction

$$g\mapsto\lambda(\omega_{\gamma(hg),\,\delta(g)}\circ\alpha_{g^{-1}}),$$

est scalairement intégrable pour la topologie normique sur $M$, et que

$$\int_G\lambda(\omega_{\gamma(hg),\,\delta(g)}\circ\alpha_{g^{-1}})\,dg = \lambda\left(\int_G\omega_{\gamma(hg),\,\delta(g)}\circ\alpha_{g^{-1}}\,dg\right).$$

A présent, posons $\xi,\eta\in K(G,\mathscr{H})$. On a

$$\begin{aligned}&(\eta\,|\,\tilde{\lambda}(\omega)\xi)\\ &= (\tilde{W}(\delta\otimes\eta)\,|\,\gamma\otimes\xi), \quad \text{d'après [4], prop. 2.1.5 } (a),\\ &= \int_G\int_G((u_{g^{-1}}\otimes u_{h^{-1}})W(u_g\otimes u_h)(\delta(h^{-1}g)\otimes\eta(h))\,|\,\gamma(g)\otimes\xi(h))\,dg\,dh,\\ &\quad \text{d'après 3.1.3,}\\ &= \int_G\int_G(u_h\eta(h)\,|\,\lambda(\omega_{u_g\gamma(g),\,u_g\delta(h^{-1}g)})\,u_h\xi(h))\,dg\,dh,\\ &\quad \text{d'après [4], prop. 2.1.5 } (a),\end{aligned}$$

$$= \int_G \int_G (\eta(h) \,|\, u_{h^{-1}} \lambda(\omega_{\gamma(g), \delta(h^{-1}g)} \circ \alpha_g^{-1}) u_h \xi(h)) \, dg \, dh, \quad \text{d'après 2.8 } (b),$$

$$= \int_G \int_G (\eta(h) \,|\, \lambda(\omega_{\gamma(g), \delta(h^{-1}g)} \circ \alpha_{g^{-1}h}) \xi(h)) \, dg \, dh, \quad \text{d'après 2.8 } (d),$$

$$= \int_G \int_G (\eta(h) \,|\, \lambda(\omega_{\gamma(hg), \delta(g)} \circ \alpha_{g^{-1}}) \xi(h)) \, dg \, dh,$$

$$= \int_G \left(\eta(h) \,\middle|\, \left(\int_G \lambda(\omega_{\gamma(hg), \delta(g)} \circ \alpha_{g^{-1}}) \, dg\right) \xi(h)\right) dh,$$

$$= \int_G \left(\eta(h) \,\middle|\, \lambda\left(\int_G \omega_{\gamma(hg), \delta(g)} \circ \alpha_{g^{-1}} \, dg\right) \xi(h)\right) dh, \quad \text{d'après ce qui précède,}$$

$$= \int_G (\eta(h) \,|\, \lambda(\omega(h)) \xi(h)) \, dh, \quad \text{d'après 1.8.}$$

Comme cette équation vaut pour tout $\eta \in K(G, \mathscr{H})$, le lemme en résulte.

On vient de démontrer, en d'autres termes, que $\tilde{\lambda}(\omega)$ est déterminé par le champ borné d'opérateurs $g \to \lambda(\omega(g))$ (1.6 (*b*)).

COROLLAIRE 4.4. — *On a :*

(*a*) $\hat{\hat{M}} \subset \hat{M} \otimes L^\infty(G)$;

(*b*) $(\omega_1 \star \omega_2)(g) = \omega_1(g) \star \omega_2(g)$, $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{M}_*$, $g \in G$;

(*c*) $\omega^0(g) = (\omega(g))^0$, $\omega \in \tilde{M}_*$, $g \in G$.

*Démonstration.* — (*a*) Résulte immédiatement du lemme précédent par densité de $\tilde{\lambda}(\tilde{M}_*)$ dans $\hat{\hat{M}}$, puisque $\lambda(\omega(g)) \in \hat{M}$ pour tout $g \in G$.

Démontrons (*b*). Il est clair que l'opérateur $\tilde{\lambda}(\omega_1 \star \omega_2) = \tilde{\lambda}(\omega_1) \tilde{\lambda}(\omega_2)$ est déterminé par l'un quelconque des champs d'opérateurs

$$g \mapsto \lambda((\omega_1 \star \omega_2)(g)) \qquad \text{ou} \qquad g \mapsto \lambda(\omega_1(g)) \lambda(\omega_2(g)).$$

On en conclut que

$$(\lambda((\omega_1 \star \omega_2)(g)) \xi \,|\, \eta) = (\lambda(\omega_1(g)) \lambda(\omega_2(g)) \xi \,|\, \eta) \quad \text{l. p. p.}$$

pour tous $\xi, \eta \in \mathscr{H}$. Or, les deux membres de cette égalité sont continus; elle est donc valable partout, et on a

$$\begin{aligned} \lambda((\omega_1 \star \omega_2)(g)) &= \lambda(\omega_1(g)) \lambda(\omega_2(g)) \\ &= \lambda(\omega_1(g) \star \omega_2(g)), \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. Comme $\lambda$ est injective ([4], cor. 4.3.8), il en résulte finalement $(\omega_1 \star \omega_2)(g) = \omega_1(g) \star \omega_2(g)$ pour tout $g \in G$.

Pour (*c*), on utilise un raisonnement entièrement similaire, à partir de l'observation que les champs d'opérateurs

$$g \mapsto \lambda(\omega^0(g)) \qquad \text{et} \qquad g \mapsto \lambda(\omega(g))^* = \lambda((\omega(g))^0)$$

définissent l'opérateur $\tilde{\lambda}(\omega^0) = \tilde{\lambda}(\omega)^*$.

PROPOSITION 4.5. — *L'algèbre de von Neumann* $\hat{\tilde{M}}$ *sous-jacente à l'algèbre de Kac* $(\mathbf{K} \otimes_\alpha G)^\wedge$ *est donnée par* $\hat{\tilde{M}} = \hat{M} \otimes L^\infty(G)$.

*Démonstration.* — L'inclusion $\subset$ se trouve dans 4.4 (*a*).

On a observé en 4.2 (*a*) que $G$ agit sur $\mathbf{K}^s$; il résulte donc également de 4.4 (*a*) que l'algèbre de von Neumann sous-jacente à $(\mathbf{K}^s \otimes_\alpha G)^\wedge$ est incluse dans le produit tensoriel de l'algèbre de von Neumann sous-jacente à $\mathbf{K}^s$ et de $L^\infty(G)$. En utilisant 4.2 (*b*) et [17], proposition II.6, cela s'écrit :

$$(\hat{\tilde{M}})' \subset (\hat{M})' \otimes L^\infty(G).$$

Par passage au commutant, on trouve

$$\hat{M} \otimes L^\infty(G) \subset \hat{\tilde{M}},$$

ce qui achève la démonstration.

Si la proposition 4.5 peut causer une certaine surprise à la lumière de la proposition I.4 de [17], c'est *a fortiori* le cas pour le résultat suivant, énonçant que le poids de Haar sur $\hat{\tilde{M}}$ est, lui aussi, un produit tensoriel. Pour l'obtenir, il faut passer par un certain nombre de lemmes techniques.

Comme dans [4] (déf. 1.1.3), on associe à $(\tilde{M}, \tilde{\varphi})$ un sous-espace dense $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$ de $M_*$ et une application $\tilde{a}$ de $\mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$ dans $\mathcal{H}_{\tilde{\varphi}} = \tilde{\mathcal{H}}$.

LEMME 4.6. — *Soit* $\tilde{\mathcal{J}}$ *l'idéal à gauche de* $\tilde{M}_*$ *engendré par les éléments de la forme* $\omega_{\xi, \eta}$, *où* $\xi$ *et* $\eta$ *appartiennent au produit tensoriel algébrique* $\mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$ (1.11 (*a*)). *Alors tout* $\omega \in \tilde{\mathcal{J}}$ *a les propriétés suivantes :*

(*a*) *l'application* $g \mapsto \omega(g)$ *a un support compact;*

(*b*) $\omega \in \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}}$;

(*c*) $\omega(g) \in \mathcal{L}_\varphi$ *pour tout* $g \in G$, *et* $\tilde{a}(\omega)(g) = a(\omega(g))$ p. p.

*En outre,* $\tilde{\mathcal{J}}$ *est dense dans* $\tilde{M}_*$ (*pour la topologie normique*).

*Démonstration.* — Il résulte de 1.8 que $g \mapsto \omega(g)$ est à support compact pour tout $\omega = \omega_{\xi, \eta}$, où $\xi, \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$. Comme $(\omega_1 \star \omega_2)(g) = \omega_1(g) \star \omega_2(g)$ pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{M}_*$ et $g \in G$ (4.4 (*b*)), (*a*) se vérifie pour tout $\omega \in \tilde{\mathcal{J}}$.

On a montré dans 1.12 (*b*) que $\mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$ est inclus dans l'algèbre hilbertienne à droite $\mathfrak{A}'_{\tilde{\varphi}}$. La remarque 1.1.4 de [4] implique donc que

$$\{\omega_{\xi,\,\eta};\ \xi,\ \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)\} \subset \mathscr{L}_{\tilde{\varphi}},$$

Comme $\mathscr{L}_{\tilde{\varphi}}$ est un idéal à gauche de $\tilde{M}_*$ (2.5 (*a*)), il en résulte (*b*).

Posons à présent $\xi, \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi$, $f$, $g \in K(G)$, $h \in G$, $x \in n_\varphi$. Alors

$$\begin{aligned}
&\langle x^*, \omega_{\xi\otimes f,\eta\otimes g}(h)\rangle \\
&= \int_G \langle \alpha_{k^{-1}}(x^*), \omega_{f(hk)\xi, g(k)\eta}\rangle\, dk, \quad \text{d'après 1.8,} \\
&= \int_G f(hk)\overline{g(k)}\langle \alpha_{k^{-1}}(x^*), \omega_{\xi,\eta}\rangle\, dk, \\
&= \int_G f(hk)\overline{g(k)}(a(\omega_{\xi,\eta}\circ\alpha_{k^{-1}}) \mid \Lambda_\varphi(x))\, dk, \quad \text{d'après [4], déf. 1.1.3,} \\
&= \int_G \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)}(u_k a(\omega_{\xi,\eta}) \mid \Lambda_\varphi(x))\, dk, \quad \text{d'après 2.8 (}e\text{),} \\
&= \left(\int_G \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)} u_k a(\omega_{\xi,\eta})\, dk \,\Big|\, \Lambda_\varphi(x)\right).
\end{aligned}$$

Comme la fonction $k \mapsto \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)}\, u_k\, a(\omega_{\xi,\,\eta})$ est continue à support compact pour tout $h \in G$, l'existence de l'intégrale ne pose pas de problème. On conclut que $\omega_{\xi\otimes f,\,\eta\otimes g}(h) \in \mathscr{L}_\varphi$ pour tout $h \in G$, et que

$$\begin{aligned}
a(\omega_{\xi\otimes f,\eta\otimes g}(h)) &= \int_G \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)} u_k a(\omega_{\xi,\eta})\, dk \\
&= \int_G \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)} u_k \pi_r(\eta)^* \xi\, dk, \\
&\quad \text{d'après [4], 1.1.4.2,}
\end{aligned}$$

en utilisant la notation introduite en 1.11 (*a*).

D'autre part, on a p. p.

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\omega_{\xi\otimes f,\eta\otimes g})(h) &= (\tilde{\pi}_r(\eta\otimes g)^*(\xi\otimes f))(h), \\
&\quad \text{d'après [4], 1.1.4.2 et 1.11 (}a\text{),} \\
&= \int_G \chi(k)^{-1/2}\overline{g(k)} u_k \pi_r(\eta)^*(\xi\otimes f)(hk)\, dk, \\
&\quad \text{d'après 1.12 (}b\text{),} \\
&= \int_G \chi(k)^{-1/2} f(hk)\overline{g(k)} u_k \pi_r(\eta)^* \xi\, dk.
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions obtenues et par linéarité, on conclut que, pour tous $\xi$, $\eta \in \mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$, on a $\omega_{\xi,\eta}(h) \in \mathscr{L}_\varphi$ pour tout $h \in G$, et que $\tilde{a}(\omega_{\xi,\eta})(h) = a(\omega_{\xi,\eta}(h))$ p. p.

Finalement, supposons que $\omega_1 \in \tilde{M}_*$ et $\omega_2 = \omega_{\xi,\eta}$, $\xi$, $\eta \in \mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$. Alors $(\omega_1 \star \omega_2)(h) = \omega_1(h) \star \omega_2(h) \in \mathscr{L}_\varphi$ pour tout $h \in G$ puisque $\mathscr{L}_\varphi$ est un idéal à gauche, et

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\omega_1 \star \omega_2)(h) &= (\tilde{\lambda}(\omega_1)\tilde{a}(\omega_2))(h),\\ &= \lambda(\omega_1(h))\tilde{a}(\omega_2)(h), \quad \text{d'après 4.3},\\ &= \lambda(\omega_1(h))a(\omega_2(h)), \quad \text{d'après ce qui précède},\\ &= a(\omega_1(h) \star \omega_2(h)), \quad \text{d'après 2.5 } (b),\\ &= a((\omega_1 \star \omega_2)(h)), \quad \text{d'après 4.4 } (b)\end{aligned}$$

(toutes ces équations n'étant valables qu'en dehors d'un ensemble négligeable). Par linéarité, il en résulte (*c*).

La dernière affirmation est une conséquence immédiate de la densité de $\mathfrak{A}'_\varphi \odot K(G)$ dans $\mathscr{H} \otimes L^2(G)$ (*voir* la démonstration du lemme 2.1.6 de [4]).

LEMME 4.7. — *On a* $\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G \in G(\mathbf{K} \otimes_\alpha G)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

*Démonstration.* — Notons que $\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G = \pi(\hat{\Delta}^{it})$, d'après 2.8 (*f*) (rappelons que $\hat{\Delta}^{it} \in M \cap M'$).

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G) &= \tilde{\Gamma}(\pi(\hat{\Delta}^{it}))\\ &= (\pi \otimes \pi)(\Gamma(\hat{\Delta}^{it})), \quad \text{d'après 3.3.1},\\ &= (\pi \otimes \pi)(\hat{\Delta}^{it} \otimes \hat{\Delta}^{it})\\ &= \hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G \otimes \hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G.\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\hat{\Delta}^{it} \in G(\mathbf{K})$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ ([16], prop. II.21, ou [2], corr. 2.4).

LEMME 4.8. — *Soit* $\tilde{\mathscr{J}}$ *comme dans le lemme* 4.6. *Alors* $\tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})$ *est ultrafaiblement dense dans* $\hat{\tilde{M}}$ *et* $(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G)\tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})(\hat{\Delta}^{-it} \otimes 1_G) = \tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

*Démonstration.* — Par la densité de $\tilde{\mathscr{J}}$ dans $\tilde{M}_*$ (4.6) et la continuité de $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})$ est dense (pour la topologie normique) dans $\tilde{\lambda}(\tilde{M}_*)$, qui est ultrafaiblement dense dans $\hat{\tilde{M}}$.

Comme $\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G \in G(\mathbf{K} \otimes_\alpha G)$ d'après 4.7, on a pour tout $\omega \in \tilde{M}_*$ :

$$(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G)\tilde{\lambda}(\omega)(\hat{\Delta}^{-it} \otimes 1_G) = \tilde{\lambda}((\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega),$$

d'après 2.6 (*b*). Il suffit donc de démontrer que $(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega$ appartient à $\tilde{\mathscr{J}}$ lorsque $\omega \in \tilde{\mathscr{J}}$.

En outre, on sait d'après 4.7 et 2.6 (*a*) que, pour tous $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{M}_*$,

$$(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).(\omega_1 \star \omega_2) = (\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega_1 \star (\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega_2.$$

En vue de la définition de $\tilde{\mathscr{J}}$, il reste dès lors à vérifier que

$$(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega_{\xi \otimes f, \eta \otimes g} \in \tilde{\mathscr{J}} \quad \text{pour tous } \xi, \eta \in \mathfrak{A}'_\varphi$$

et $f, g \in K(G)$. Or, cela résulte de l'égalité

$$(\hat{\Delta}^{it} \otimes 1_G).\omega_{\xi \otimes f, \eta \otimes g} = \omega_{\hat{\Delta}^{it} \xi \otimes f, \eta \otimes g},$$

et du fait que $\hat{\Delta}^{it} \xi \in \mathfrak{A}'_\varphi$, puisque $\hat{\Delta}^{it} \in M'$.

PROPOSITION 4.9. — *Le poids de Haar* $\hat{\hat{\varphi}}$ *sur* $\hat{\hat{M}} = \hat{M} \otimes L^\infty(G)$ *est donné par* $\hat{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi} \otimes \mathscr{F}$.

*Démonstration.* — Il résulte de 4.8 que $\tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})^* \tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})$ est une sous-algèbre involutive de $\hat{\hat{M}}$, ultrafaiblement dense et invariante par $\{\sigma_t^{\hat{\varphi}} \otimes i_{L^\infty(G)}\}_{t \in \mathbf{R}}$. En outre, 4.7 et [2], lemme 2.2, impliquent que $\hat{\hat{\varphi}}$ est invariant par

$$\sigma_t^{\hat{\varphi}} \otimes i_{L^\infty(G)} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{\mathscr{J}}$. Alors $\omega_1, \omega_2 \in \mathscr{L}_{\tilde{\varphi}}$ (4.6 (*b*)), et on a

$$\begin{aligned}
&\hat{\hat{\varphi}}(\tilde{\lambda}(\omega_2)^* \tilde{\lambda}(\omega_1)) \\
&\quad = (\tilde{a}(\omega_1) \mid \tilde{a}(\omega_2)), \quad \text{d'après la formule de Plancherel [4], 3.1.10,} \\
&\quad = \int_G (a(\omega_1(g)) \mid a(\omega_2(g)))\, dg, \quad \text{d'après 4.6 } (c), \\
&\quad = \int_G \hat{\varphi}(\lambda(\omega_2(g))^* \lambda(\omega_1(g)))\, dg, \quad \text{d'après la formule de Plancherel.}
\end{aligned}$$

Or, en utilisant 4.3, on voit que le champ d'opérateurs

$$g \mapsto \lambda(\omega_2(g))^* \lambda(\omega_1(g)),$$

définit l'opérateur $\tilde{\lambda}(\omega_2)^* \tilde{\lambda}(\omega_1)$. En outre, ce champ est continu à support compact (4.6 (*a*)), et on peut donc appliquer 1.3 (*a*) :

$$\int_G \hat{\varphi}(\lambda(\omega_2(g)^* \lambda(\omega_1(g)))\, dg = (\hat{\varphi} \otimes \mathscr{F})(\tilde{\lambda}(\omega_2)^* \tilde{\lambda}(\omega_1)).$$

Par linéarité, on conclut que $\hat{\hat{\varphi}}$ et $\hat{\varphi} \otimes \mathscr{F}$ coïncident sur $\tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})^* \tilde{\lambda}(\tilde{\mathscr{J}})$. D'après [14] (prop. 5.9), il en résulte que $\hat{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi} \otimes \mathscr{F}$.

La proposition suivante établit la relation entre $\hat{\hat{\Gamma}}$ et $\hat{\hat{\varkappa}}$, d'une part, et la structure coalgébrique produit tensoriel de l'autre.

PROPOSITION 4.10. — *Soit* $x \in \hat{\hat{M}}$. *On a :*

(*a*) $\hat{\hat{\Gamma}}(x) = R^*(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau^* \otimes 1_G)(\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma}_G)(x)(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau \otimes 1_G)R$, *où* $\hat{\Gamma}_G$ *a été défini en* 2.2.3, *et R est l'opérateur unitaire sur* $\tilde{\mathscr{H}} \otimes \tilde{\mathscr{H}}$ *vérifiant :*

$$(R\xi)(g, h) = (u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})\xi(g, h),$$

*pour*

$$\xi \in K(G \times G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}), \qquad g, h \in G;$$

(*b*) $\hat{\hat{\varkappa}}(x) = V^*(\hat{\varkappa} \otimes \hat{\varkappa}_G)(x)V$, *où* $\hat{\varkappa}_G$ *et* $V$ *ont été définis en* 2.2.4 *et* 1.4 (*d*) *respectivement.*

*Démonstration.* — (*a*) Soit $x \in \hat{M}$, $f \in L^\infty(G)$, $\xi \in K(G \times G, \mathscr{H} \otimes \mathscr{H})$, $g$, $h \in G$. On a

$$\begin{aligned}
(\hat{\hat{\Gamma}}(x \otimes f)\xi)(g, h) &= (\Sigma\tilde{W}^*(x \otimes f \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes 1_G)\tilde{W}\Sigma\xi)(g, h), \\
&\quad \text{d'après [4], déf. 3.2.1,} \\
&= \sigma(\tilde{W}^*(x \otimes f \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes 1_G)\tilde{W}\Sigma\xi)(h, g), \\
&= \sigma(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})W^*(u_h \otimes 1_{\mathscr{H}}) \\
&\quad \times((x \otimes f \otimes 1_{\mathscr{H}} \otimes 1_G)\tilde{W}\Sigma\xi)(gh, g), \quad \text{d'après 3.1.4,} \\
&= f(gh)\sigma(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})W^*(u_h x \otimes 1_{\mathscr{H}})(\tilde{W}\Sigma\xi)(gh, g), \\
&= f(gh)\sigma(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})W^*(u_h x u_{h^{-1}g^{-1}} \otimes u_{g^{-1}}) \\
&\quad \times W(u_{gh} \otimes u_g)(\Sigma\xi)(h, g), \quad \text{d'après 3.1.3,} \\
&= f(gh)\sigma(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})W^*(u_h x u_{h^{-1}g^{-1}} \otimes u_{g^{-1}}) \\
&\quad \times W(u_{gh} \otimes u_g)\sigma\xi(g, h), \\
&= f(gh)(u_h \otimes 1_{\mathscr{H}})\sigma W^*(x \otimes 1_{\mathscr{H}})W\sigma(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})\xi(g, h), \\
&\quad \text{en utilisant plusieurs fois 2.8 } (c), \\
&= (\hat{\Gamma}_G f)(g, h)(u_h \otimes 1_{\mathscr{H}})\hat{\Gamma}(x)(u_{h^{-1}} \otimes 1_{\mathscr{H}})\xi(g, h), \\
&\quad \text{d'après 2.2.3 et [4], 3.2.1.}
\end{aligned}$$

On voit aisément que cette dernière expression est égale à

$$(R^*(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau^* \otimes 1_G)(\hat{\Gamma}(x) \otimes \hat{\Gamma}_G(f))(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau \otimes 1_G)R\xi)(g, h),$$

d'où le résultat par densité.

(*b*) Résulte sans difficultés du fait que l'involution $\tilde{J}$ de $\tilde{\mathscr{H}}$, canoniquement associée à $\tilde{\varphi}$, vérifie $\tilde{J} = V^*(J \otimes J_G) = (J \otimes J_G)V$ (*voir* par exemple [8], lemme 2.8).

*Remarque* 4.11. — Supposons que $G$ soit un groupe fini. Alors $\hat{M} \otimes L^\infty(G)$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes e_g$, $x \in \hat{M}$, $g \in G$, où $e_g$ est la fonction sur $G$ vérifiant :

$$\begin{aligned} e_g(h) &= 0 \quad \text{si } h \neq g \\ e_g(h) &= 1 \quad \text{si } h = g. \end{aligned}$$

La proposition précédente permet de calculer que

$$\hat{\hat{\Gamma}}(x \otimes e_g) = (1_{\mathscr{H}} \otimes \tau^* \otimes 1_G)(\textstyle\sum_{h \in G} (\hat{\alpha}_h \otimes i_{\hat{M}})(\hat{\Gamma}(x)) \otimes e_{gh^{-1}} \otimes e_h) \cdot \times (1_{\mathscr{H}} \otimes \tau \otimes 1_G),$$

et

$$\hat{\tilde{\varkappa}}(x \otimes e_g) = (\hat{\alpha}_g(\hat{\varkappa}(x)) \otimes e_{g^{-1}},$$

où $\hat{\alpha}$ a été défini en 2.9.

A un changement d'ordre trivial près, ces formules coïncident avec celles de [12], 7.5.

Terminons en résumant les principaux résultats de ce paragraphe.

THÉORÈME 2. — *Soient* $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ *une algèbre de Kac, G un groupe l. c.,* $\alpha$ *une action de G sur* $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \otimes_\alpha G = (\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$ *le produit croisé de* $\mathbf{K}$ *par G. Alors l'algèbre duale est le quadruplet*

$$(\hat{M} \otimes L^\infty(G), \hat{\hat{\Gamma}}, \hat{\tilde{\varkappa}}, \hat{\varphi} \otimes \mathscr{F}),$$

*où* $\hat{\hat{\Gamma}}$ *et* $\hat{\tilde{\varkappa}}$ *ont été définis en* 4.10.

## 5. Exemples

Dans ce paragraphe, on discutera brièvement quelques exemples qui illustrent, dans des situations plus familières, les résultats obtenus.

*Exemple* 5.1. — Soient $\mathbf{K} = (M, \Gamma, \varkappa, \varphi)$ une algèbre de Kac, $G$ un groupe l. c., $\alpha$ l'action triviale de $G$ sur $M$ (c'est-à-dire $\alpha_g = i_M$ pour tout $g \in G$). Il est clair que $\alpha$ vérifie les conditions 2.7 (i) et (ii), et que c'est donc une action sur $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{K} \otimes_\alpha G = (\tilde{M}, \tilde{\Gamma}, \tilde{\varkappa}, \tilde{\varphi})$. Manifestement,

$$\tilde{M} = M \otimes \mathscr{M}(G), \qquad \tilde{\Gamma}(x) = (1_{\mathscr{H}} \otimes \tau^* \otimes 1_G)(\Gamma \otimes \Gamma_G)(x)(1_{\mathscr{H}} \otimes \tau \otimes 1_G)$$

pour tout $x \in \tilde{M}$, $\tilde{\varkappa} = \varkappa \otimes \varkappa_G$, $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes \psi_G$ (2.2 (*a*)).

Ce cas se réduit donc à un exemple de produit tensoriel de deux algèbres de Kac, notion qui a été étudiée en [17], I , où on démontre également que

$$\hat{\tilde{M}} = \hat{M} \otimes (\mathscr{M}(G))\hat{} = \hat{M} \otimes L^\infty(G) \quad ([17], \text{ prop. I . 4}).$$

*Exemple* 5.2. — Soient $A$ et $G$ des groupes l. c. à élément unité $\varepsilon$ et $e$, respectivement, et soit $\beta$ une action continue de $G$ sur $A$. On construit le produit semi-direct $\tilde{G} = A \times_\beta G$, où la multiplication est donnée par $(a, g)(b, h) = (\beta_{h^{-1}}(a)\, b, gh)$, $a, b \in A$, $g, h \in G$. On peut identifier $A$ au sous-groupe distingué $\{(a, e); a \in A\}$ de $\tilde{G}$, et $G$ au sous-groupe

$\{(\varepsilon, g);\ g \in G\}$. En outre, $\tilde{G}/A \cong G$ (la projection canonique de $\tilde{G}$ sur $G$ étant donnée par $(a, g) \mapsto g$), tandis que $\tilde{G}/G$ peut être identifié (en tant qu'espace topologique) à $A$, où $(a, g) \mapsto \beta_g(a)$ est la projection canonique de $G$ sur $A$.

La mesure produit de mesures de Haar fixes sur $A$ et $G$ est une mesure de Haar sur $\tilde{G}$. Cela nous permet d'identifier $L^2(\tilde{G})$ à $L^2(A) \otimes L^2(G)$, et donc à $L^2(G, L^2(A))$.

On définit une représentation unitaire fortement continue $u$ de $G$ dans $L^2(A)$ en posant :

$$(u_g f)(a) = \delta(\beta_g)^{-1/2} f(\beta_{g^{-1}}(a)), \qquad f \in K(A), \quad a \in A, \quad g \in G$$

($\delta(\beta_g)$ est le module de l'automorphisme $\beta_g$ de $A$). On démontre facilement que $\alpha_g = ad\, u_g$ est un automorphisme de $\mathcal{M}(A)$ pour tout $g \in G$ [15].

Il n'est pas difficile de vérifier que $\alpha$ est également une action de $G$ sur l'algèbre de Kac symétrique $KS(A) = (\mathcal{M}(A), \Gamma_A, \varkappa_A, \psi_A)$ associée à $A$ (2.2 ($a$)). On peut donc construire $KS(A) \otimes_\alpha G$.

On sait que $\mathcal{M}(A) \otimes_\alpha G = \mathcal{M}(A \times_\beta G) = \mathcal{M}(\tilde{G})$, et que le poids dual de $\psi_A$ est précisément le poids canonique sur $\mathcal{M}(\tilde{G})$ ([15], cor. 2.6 et prop. 2.7). Un calcul direct du coproduit et de l'involution sur $\mathcal{M}(A) \otimes_\alpha G$ démontre finalement que $KS(A) \otimes_\alpha G = KS(\tilde{G}) = KS(A \times_\beta G)$.

Or, d'après [4] (th. 8.1.4 ($c$)), on a $KS(\tilde{G})\hat{} = KA(\tilde{G})$, l'algèbre de Kac abélienne associée à $\tilde{G}$. On conclut donc que $(KS(A) \otimes_\alpha G)\hat{} = KA(A \times_\beta G)$. Ceci est exactement le contenu du théorème 2 dans la présente situation, puisque

$$L^\infty(A \times_\beta G) \cong L^\infty(A) \otimes L^\infty(G),$$

et que la mesure de Haar sur $A \times_\beta G$ n'est autre que le produit des mesures de Haar sur $A$ et $G$; enfin, le lecteur peut vérifier que les structures coalgébriques coïncident également.

*Exemple* 5.3. — Il a été observé en 2.9 qu'étant donnée une action $\alpha$ sur une algèbre de Kac, il existe une action associée $\hat{\alpha}$ sur l'algèbre duale. Dans le cas de l'exemple précédent, $\hat{\alpha}_g$ est l'automorphisme de $L^\infty(A)$ défini par

$$\hat{\alpha}_g(f) = f \circ \beta_{g^{-1}}, \qquad f \in L^\infty(A), \quad \text{pour tout } g \in G.$$

L'algèbre de von Neumann $L^\infty(A) \otimes_{\hat{\alpha}} G$ est engendrée par les éléments $\pi(f), f \in L^\infty(A)$, et $1_A \otimes \lambda_g$, $g \in G$ (1.4 ($b$)). Or, $\pi(f)$ peut être identifié à la fonction $(a, g) \mapsto f(\beta_g(a))$ sur $\tilde{G}$. Par conséquent, et en utilisant les observations faites à l'occasion de l'exemple 5.2, on voit que $\pi(L^\infty(A))$

est l'algèbre des fonctions appartenant à $L^\infty(\widetilde{G})$ constantes sur les classes à gauche suivant $G$. D'autre part, on a $1_A \otimes \lambda_g = \lambda_{(\varepsilon,\, g)}$. On conclut que $L^\infty(A) \otimes_{\hat{\alpha}} G$ est un exemple du type d'algèbres étudiées en [18] : en utilisant la notation de TAKESAKI, on a

$$L^\infty(A) \otimes_{\hat{\alpha}} G = M(\widetilde{G}/G,\ U(G)).$$

Le théorème 1 affirme que cette algèbre peut être munie d'une structure d'algèbre de Kac.

Il est assez remarquable de constater que l'algèbre de von Neumann sous-jacente à l'algèbre duale est encore du même type. En effet, d'après le théorème 2, cette algèbre est égale à $\mathcal{M}(A) \otimes L^\infty(G)$. Il n'est pas difficile de prouver que $\mathcal{M}(A) \otimes L^\infty(G)$ est engendrée par les éléments $\pi(x)$, $x \in \mathcal{M}(A)$, et $1_A \otimes f$, $f \in L^\infty(G)$.

Or, $\pi(\lambda_a) = \lambda_{(a,\, e)}$, et $1_A \otimes f$ n'est autre que la fonction $(a, g) \mapsto f(g)$ sur $\widetilde{G}$, c'est-à-dire que $1_A \otimes L^\infty(G)$ est l'algèbre des fonctions appartenant à $L^\infty(\widetilde{G})$ constantes sur les classes (à gauche ou à droite) suivant $A$. On voit donc que $\mathcal{M}(A) \otimes L^\infty(G) = M(\widetilde{G}/A,\ U(A))$, en suivant TAKESAKI [18].

La discussion qui précède suggère que les algèbres introduites en [18] pourraient fournir de nouveaux exemples d'algèbres de Kac.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] COMBES (F.). — Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche, *J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 47, 1968, p. 57-100.

[2] DE CANNIÈRE (J.). — On the intrinsic group of a Kac algebra, *Proc. London math. Soc.*, 39, 1979 (à paraître).

[3] ENOCK (M.). — Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac, *J. funct. Analysis*, t. 26, 1977, p. 16-17.

[4] ENOCK (M.) et SCHWARTZ (J.-M.). — Une dualité dans les algèbres de von Neumann, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire n° 44, 1975, 144 p.

[5] ENOCK (M.) et SCHWARTZ (J.-M.). — Une nouvelle construction du poids dual sur le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, série A, p. 415-418.

[6] ENOCK (M.) et SCHWARTZ (J.-M.). — Algèbres de Kac et produits croisés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 283, 1976, série A, p. 321-323.

[7] HAAGERUP (U.). — The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.*, t. 37, 1975, p. 271-283.

[8] HAAGERUP (U.). — *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras*, I, Odense preprint n° 10, 1975.

[9] HAAGERUP (U.). — *On the dual weights for crossed products of von Neumann algebras*, II, Odense preprint n° 11, 1975.

[10] HAAGERUP (U.). — *Operator valued weights in von Neumann algebras*, Odense preprint n° 12, 1975.

[11] HAAGERUP (U.). — *A density theorem for left Hilbert algebras*, Odense preprint n° 4, 1978.

[12] KAC (G. I.) and PALJUTKIN (V. G.). — Finite ring groups, *Trans. Moscow math. Soc.*, t. 15, 1966, p. 251-294.

[13] LANDSTAD (M.). — Duality theory for covariant systems, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 248, 1979, p. 223-267.

[14] PEDERSEN (G.) and TAKESAKI (M.). — The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras, *Acta Math.*, Uppsala, t. 130, 1973, p. 53-87.

[15] ROUSSEAU (R.). — The left Hilbert algebra associated to a semi-direct product, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 82, 1977, p. 411-418.

[16] SCHWARTZ (J.-M.). — Sur la structure des algèbres de Kac, *J. Funct. Analysis* (à paraître).

[17] SCHWARTZ (J.-M.). — Sur la structure des algèbres de Kac II, *Proc. London math. Soc.* (à paraître).

[18] TAKESAKI (M.). — A generalized commutation relation for the regular representation, *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 289-297.

[19] TAKESAKI (M.). — Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, *Acta Math.*, Uppsala, t. 131, 1973, p. 249-310.

[20] VAN DAELE (A.). — A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras, *J. funct. Analysis*, t. 15, 1974, p. 378-393.

[21] VAN DAELE (A.). — *Crossed products of von Neumann algebras*. — Cambridge, Cambridge University Press, 1978 (*London mathematical Society Lecture Note Series*, 31).