

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE BOREL

Un problème d'équirépartition modulo 1 lié aux partitions

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 229-250

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__229_0

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN PROBLÈME D'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 LIÉ AUX PARTITIONS (*)

PAR

JEAN-PIERRE BOREL

RÉSUMÉ. — Soit $Y=(y_k)$ une suite croissant vers $+\infty$ de nombres réels positifs, et $X=(x_n)$ la suite croissante des combinaisons linéaires $\sum n_k y_k$ à coefficients dans \mathbb{N} . Nous montrons que l'ensemble $\text{Spec}(Y)$ des nombres réels positifs α tels que la suite (αx_n) n'est pas équirépartie modulo 1 est d'une des formes : \emptyset , $y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$, \mathbb{R}^* . De plus, si la suite Y vérifie certaines conditions, portant notamment sur la croissance de y_k en fonction de k , $\text{Spec}(Y)$ est d'une des deux formes : \emptyset ou $y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$, un critère très simple permettant de décider laquelle.

ABSTRACT. — Let $Y=(y_k)$ be an infinitely increasing sequence of positive real numbers, let $X=(x_n)$ be the increasing sequence of all numbers $\sum n_k y_k$, with positive integer coefficients. We study the set $\text{Spec}(Y)$ of all positive real numbers α such that the sequence (αx_n) is not uniformly distributed mod. 1. We show that $\text{Spec}(Y)$ is equal to \mathbb{R}^* , $y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$, or \emptyset , and if Y satisfies some conditions, essentially growth conditions, $\text{Spec}(Y)$ is or equal to $y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$, or empty. In this late case, a very simple criterion can be used to decide if $\text{Spec}(Y)$ is equal to $y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$ or is empty.

0. Introduction

Nous considérons uniquement des suites de nombres réels positifs ou nuls, croissantes au sens large. Nous désignerons par $X=(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Z=(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telles suites infinies, croissantes vers $+\infty$ avec n , et par Y :

- soit une suite finie $Y=(y_k)_{1 \leq k \leq K}$ avec $y_1 > 0$;
- soit une suite infinie $Y=(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ avec $y_1 > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = +\infty$.

Nous noterons : $X+Z$ la suite (croissante) des $x_n + z_m$, (n, m) décrivant \mathbb{N}^2 . $\langle Y \rangle$ la suite (croissante) des combinaisons linéaires finies $\sum n_k y_k$ à coefficients dans \mathbb{N} et, par abus

$$\langle y_1, y_2, \dots, y_K \rangle = \langle (y_k)_{1 \leq k \leq K} \rangle.$$

(*) Texte reçu le 26 mars 1979.

J.-P. BOREL, Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences de Limoges, 123, rue Albert-Thomas, 87060 Limoges, Cedex.

Enfin, nous poserons :

- si x et t sont deux nombres réels

$$A_X(x, t) = \sum_{x_n \leq x} e^{2\pi i t x_n};$$

- $A_X(x) = A_X(x, 0)$ « fonction de répartition » de la suite X ;
- $B(X) = \{ \alpha \in \mathbb{R}^* / (\alpha x_n) \text{ est équirépartie modulo } 1 \}$ « ensemble normal » associé à la suite X ;
- $\text{Spec}(Y) = \mathbb{R}^* - B(\langle Y \rangle)$ « spectre » de la suite Y .

Nous montrons dans [2] que, dans certaines conditions, l'addition des suites augmente les ensembles normaux associés; cela signifie que, si l'on ajoute à une suite Y des éléments supplémentaires, l'ensemble $\text{Spec}(Y)$ ne peut que diminuer. Cette diminution se faisant par « gros morceaux », il y a seulement trois types de suites Y , définis par :

- type 1 : $\text{Spec}(Y) = \mathbb{R}^*$;
- type 2 : $\text{Spec}(Y) = y_1^{-1} \mathbb{Q}^*$;
- type 3 : $\text{Spec}(Y) = \emptyset$.

La détermination du type d'une suite Y se fait en étudiant la fonction de répartition A_X (choix entre le type 1 et les types 2 et 3), tandis que le choix entre les types 2 et 3 se fait essentiellement en fonction de l'existence d'un indice k tel que $y_1^{-1} y_k$ est irrationnel.

Quelques exemples simples :

- si $y_k = \text{Log } p_k$, où p_k est le k -ième nombre premier, Y est du type 1. En effet, la suite Y associée est la suite $(\text{Log } n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et il est bien connu que $(\alpha \text{Log } n)$ n'est jamais équirépartie modulo 1 (voir par exemple [9], p. 43-44);
- si Y est une suite finie (y_1, y_2, \dots, y_K) , on peut montrer facilement (c'est par exemple une conséquence immédiate de [10]) :

$$\text{Spec}(Y) = \{ \alpha \in \mathbb{R}^* / \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}, \alpha y_k \in \mathbb{Q} \},$$

c'est-à-dire que Y est du type 3 s'il existe k tel que $y_1^{-1} y_k$ est irrationnel, du type 2 sinon.

Si Y n'est pas du type 1, il est facile de déterminer si elle est du type 2 ou 3. Il est par contre plus compliqué de voir si une suite Y donnée est du type 1 ou non. Ce problème est un problème de partition. Nous le résoudrons, partiellement, soit en utilisant des méthodes classiques dans la théorie des

partitions, soit en trouvant un élément de $B(\langle Y \rangle)$ (alors Y n'est pas du type 1). La réponse obtenue dépend alors de deux sortes de conditions :

- conditions de croissance de y_k en fonction de k ;
- conditions de répartition modulo 1 de la suite Y (par exemple $B(Y) \neq \emptyset$).

1. Étude du spectre d'une suite

Nous rappelons ici brièvement un certain nombre de résultats, dont la démonstration se trouve dans [2].

1.1. CRITÈRE DE WEYL POUR DES SUITES AVEC RÉPÉTITION

Il est commode d'utiliser, dans le cas de suites avec répétition (i. e. $x_{n+1} = x_n$ pour certains indices n), une variante du critère de Weyl (cf. [6], p. 7), qui consiste à ne regarder que les sommes de Weyl $\sum_{n=0}^N e^{2\pi i x_n}$ pour les N tels que $x_{N+1} \neq x_N$.

THÉORÈME 1 :

$$\alpha \in B(X) \Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{N}^*, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} A_X(x)^{-1} A_X(x, q\alpha) = 0.$$

1.2. FONCTIONS A CROISSANCE RÉGULIÈRE

Nous dirons qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ , qui croît avec x vers $+\infty$, est à *croissance régulière* si la fonction qui à x associe $f(\text{Log } x)$ est à oscillations lentes (« slowly oscillating functions », voir [7]). C'est-à-dire que f est à croissance régulière (noté $f \in \mathcal{R}$) si elle vérifie les conditions équivalentes

$$\exists y > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = 1, \\ \forall y > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} = 1.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

(P.1) si f et g sont équivalentes (i. e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/g(x)) = 1$) : $f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow g \in \mathcal{R}$;

(P.2) si $f \in \mathcal{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction qui à x associe $f(x/\alpha)$ appartient aussi à \mathcal{R} ;

(P.3) si $f \in \mathcal{R} : \forall a > 1, \exists C_a > 0$ tel que $\forall x > 0, f(x) < C_a a^x$;

(P.4) si f'' est définie et a un signe constant au voisinage de $+\infty$:
ce signe est $-$. Alors $f \in \mathcal{R}$; ce signe est $+$. Alors :

$$f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

1.3. ENSEMBLE NORMAL ASSOCIÉ A LA SOMME DE DEUX SUITES

La recherche de l'ensemble normal $B(X)$ n'a d'intérêt que si la fonction A_X est à croissance régulière. En effet :

PROPOSITION 1. — Si A_X n'est pas à croissance régulière, l'ensemble normal $B(X)$ est vide.

C'est une conséquence immédiate du théorème 1.3 de [6] et de la propriété (P.3).

D'autre part, pour tout couple (x, t) de nombres réels et toutes suites X et Z , on a

$$(1) \quad A_{X+Z}(x, t) = \sum_{z_n \leq x} A_X(x - z_n, t) e^{2\pi i t z_n}.$$

Ce résultat entraîne en particulier :

PROPOSITION 2. — Si A_X et A_Z sont à croissance régulière, il en est de même pour A_{X+Z} .

PROPOSITION 3. — Supposons A_{X+Z} à croissance régulière. Alors :

$$B'(X) \cup B'(Z) \subset B'(X+Z)$$

($B'(X)$ étant l'ensemble des nombres réels positifs α tels que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A_X(x)^{-1} A_X(x, \alpha) = 0).$$

On a donc $B(X) = \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} (1/q) B'(X)$ et, en particulier :

PROPOSITION 3'. — Supposons A_{X+Z} à croissance régulière. Alors :

$$B(X) \cup B(Z) \subset B(X+Z).$$

Il existe des cas où cette dernière inclusion est stricte (prendre par exemple $X = \langle 1/2 \rangle$ et Z une suite telle que $B(Z) \cap \mathbb{N}^* = 2\mathbb{N}^*$, l'existence d'une telle suite Z provient de la caractérisation des ensembles normaux obtenue dans [8]).

1.4. SPECTRE D'UNE SUITE

Nous définirons le dénominateur $d = \text{den}(Y)$ de la suite Y par

$$d = \sup_{y \in Y} \text{den} \left(\frac{y}{y_1} \right)$$

où

$$\text{den}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \inf_{x=p/q} |q| & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Nous avons alors montré dans [2] :

THÉORÈME 2. — Soit Y une suite croissante de nombres réels positifs. Trois cas sont alors possibles :

- (i) $A_{\langle Y \rangle} \notin \mathcal{R}$. Alors $\text{Spec}(Y) = \mathbb{R}_+^*$;
- (ii) $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$ et $d < +\infty$. Alors $\text{Spec}(Y) = y_1^{-1} \mathbb{Q}_+^*$;
- (iii) $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$ et $d = +\infty$. Alors $\text{Spec}(Y) = \emptyset$.

Y étant une suite donnée, déterminer son spectre revient donc à résoudre deux problèmes :

- la fonction $A_{\langle Y \rangle}$ est-elle à croissance régulière?
- le dénominateur d de la suite Y est-il fini ou infini?

Ce dernier problème est simple, trois cas seulement étant possibles :

- cas 1 : $\exists k, y_k/y_1 \notin \mathbb{Q}$ alors $d = +\infty$;
- cas 2 : $Y \subset y_1 \mathbb{Q}$ et $\overline{\lim} \text{den}(y_k/y_1) = +\infty$ alors $d = +\infty$;
- cas 3 : $\exists n \in \mathbb{N}^*, nY \subset y_1 \mathbb{Z}$ alors $d < +\infty$;

(le cas 2 est évidemment impossible si Y est finie).

Nous allons maintenant étudier le premier problème.

2. Démonstration directe de $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$ 2.1. CAS D'UNE SUITE Y FINIE

La proposition suivante sera souvent utile par la suite :

PROPOSITION 4. — Soit $Y = (y_1, y_2, \dots, y_K)$ une suite finie. Alors pour tout $x \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^K \mathfrak{S}_{K-i}(y_1, y_2, \dots, y_K) \frac{x^i}{i!} \leq \left(\prod_{k=1}^K y_k \right) A_{\langle Y \rangle}(x) \leq \sum_{i=0}^K \mathfrak{S}_{K-i}(y_1, y_2, \dots, y_K) \frac{x^i}{i!},$$

si l'on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n(y_1, y_2, \dots, y_K) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq K} y_{k_1} \times y_{k_2} \times \dots \times y_{k_n}, \\ 1 \leq n \leq K, \\ S_0(y_1, y_2, \dots, y_K) = 1, \\ \tilde{S}_n(y_1, y_2, \dots, y_K) = S_n(0, y_2/2, y_3/2, \dots, y_K/2), \\ 0 \leq n \leq K. \end{array} \right.$$

Cet encadrement se démontre par récurrence sur K :

– si $K=1$, $A_{\langle Y \rangle}(x) = [x/y_1] + 1$, d'où :

$$x \leq y_1 A_{\langle Y \rangle}(x) \leq x + y_1;$$

– si Y' est la suite finie $(y_1, y_2, \dots, y_{K-1})$, avec $K > 1$, la relation (1) entraîne :

$$A_{\langle Y \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor x/y_K \rfloor} A_{\langle Y' \rangle}(x - ny_K).$$

Le calcul d'un encadrement de $A_{\langle Y \rangle}(x)$ se fait facilement, en utilisant :

– les relations :

$$S_n(y_1, y_2, \dots, y_K) = y_K S_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_{K-1}) + S_n(y_1, y_2, \dots, y_{K-1}),$$

$$1 \leq n \leq K-1,$$

$$S_K(y_1, y_2, \dots, y_K) = y_K S_{K-1}(y_1, y_2, \dots, y_{K-1})$$

$$S_0(y_1, y_2, \dots, y_K) = S_0(y_1, y_2, \dots, y_{K-1})$$

et les relations sur les \tilde{S} qui s'en déduisent,

– la forme de la formule d'Euler-Mac Laurin (voir par exemple [3], p. 303) : si f est une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , f' et f'' étant positives sur \mathbb{R}_+ , on a pour tout $a > 0$:

$$\int_0^a f(t) dt + \frac{1}{2} (f(a) + f(0)) \leq \sum_{n=0}^{\lfloor a \rfloor} f(a-n) \leq \int_0^a f(t) dt + f(a)$$

(le coefficient $1/2$ dans cette formule est celui que l'on retrouve dans la définition de \tilde{S} à partir de S).

En particulier, la proposition 4 donne l'équivalent

$$A_{\langle y_1, y_2, \dots, y_K \rangle}(x) \sim (K! \prod_{k=1}^K y_k)^{-1} x^K$$

et, avec les propriétés (P. 1) et (P. 4), toutes les suites Y finies sont telles que $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$. Nous supposons donc dans tout ce qui suit que Y est une suite infinie, et nous noterons $X = \langle Y \rangle$.

2. 2. La fonction A_X a été étudiée, dans le cadre de la théorie des partitions, pour certaines suites Y . Si Y est la suite des entiers strictement positifs, $A_X(x) - A_X(x-1)$ est le nombre de partitions $p([x])$ de l'entier $[x]$. L'équivalent bien connu

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}n}$$

obtenu par Hardy et Ramanujan dans [4] entraîne en particulier $A_X \in \mathcal{R}$ dans ce cas. Plus généralement, l'équivalent de $A_X(x) - A_X(x-y_1)$ obtenu pour certaines suites Y par Ingham (voir [5], théorème 2) entraîne immédiatement :

THÉORÈME 3. — Soit Y une suite telle que $A_Y(x) = Bx^\beta + R(x)$ ($B > 0$, $\beta > 0$) R vérifiant :

$$\int_0^x \frac{R(u)}{u} du = b \operatorname{Log} x + c + o(1) \quad (b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}).$$

Alors $A_X \in \mathcal{R}$.

2. 3. Il n'y a en fait pas besoin d'un résultat aussi précis qu'un équivalent de $A_X(x) - A_X(x-y_1)$. Bateman et Erdős ont montré dans [1] que $A_X \in \mathcal{R}$ dès que Y est une suite strictement croissante de nombres entiers. En faisant un raisonnement analogue, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — Soit Y une suite telle que $\inf_{k \in \mathbb{N}^*} (y_{k+1} - y_k) = \lambda > 0$. Alors $A_X \in \mathcal{R}$.

Nous allons en fait montrer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A_X(x) - A_X(x-\lambda)}{A_X(x)} = 0$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

Nous noterons $\Delta A_X^{(q)}(x)$ le cardinal de l'ensemble $E_q(x)$ ($q \geq 1$) des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{N}^* de la forme

$$\sum_{j=1}^q n_j y_{k_j}, \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_q,$$

appartenant à l'intervalle $]x - \lambda, x]$.

Posons de plus

$$\Delta A_X(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \Delta A_X^{(q)}(x) = A_X(x) - A_X(x - \lambda).$$

A chaque combinaison linéaire appartenant à $E_q(x)$, on peut associer q combinaisons linéaires, éléments de la suite X :

$$\sum_{j=1}^q m_j y_{k_j},$$

avec

$$m_j = \begin{cases} n_j & \text{si } j \neq i \\ n_j - 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq q).$$

Lorsque q décrit \mathbb{N}^* et la combinaison linéaire $\sum n_j y_{k_j}$ décrit $E_q(x)$, toutes les combinaisons linéaires obtenues de cette manière sont des éléments de la suite X , inférieurs à x , et distincts deux à deux. Cela entraîne :

$$A_X(x) \geq \sum_{q=1}^{\infty} q \Delta A_X^{(q)}(x).$$

Soit $Q > 0$ donné quelconque. Alors, pour tout $x > 0$:

$$A_X(x) \geq Q \Delta A_X(x) - Q \sum_{q=1}^Q \Delta A_X^{(q)}(x).$$

LEMME :

$$\Delta A_X^{(q)}(x) \leq (q+1) \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{2q}.$$

En effet, les entiers $m_k = [y_k/\lambda]$ sont tous distincts. Le nombre $P_q(n)$ d'écritures de l'entier n sous la forme

$$n = \sum_{j=1}^q n_j m_{k_j}, \quad \text{avec } n_j \in \mathbb{N}^*$$

est donc majoré par n^{2q-1} (c'est exactement l'inégalité (8) obtenue dans la démonstration du théorème 4 de [1]).

D'autre part, $\Delta A_X^{(q)}(x)$ est majoré par le nombre de solutions de

$$\frac{x}{\lambda} - 1 - q < \sum_{j=1}^q n_j m_{k_j} \leq \frac{x}{\lambda}$$

et, comme il y a au plus $q+1$ entiers dans l'intervalle $] (x/\lambda) - 1 - q, (x/\lambda)]$. On obtient la majoration de $\Delta A_X^{(q)}(x)$ annoncée. ■

$A_X(x)$ est minoré par $A_{X'}(x)$, où X' est la suite

$$X' = \langle y_1, y_2, \dots, y_{2Q+1} \rangle$$

ce qui donne, en utilisant la proposition 4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A_X(x)^{-1} x^{2Q} = 0.$$

En combinant ce résultat avec le lemme et la minoration de $A_X(x)$ déjà obtenue, nous obtenons donc

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} A_X(x)^{-1} \Delta A_X(x) \leq \frac{1}{Q}$$

et ceci pour tout $Q > 0$. D'où le théorème. ■

Remarque. — Les suites Y pour lesquelles le théorème 4 s'applique sont celles qui vérifient la propriété : il existe $\lambda > 0$ tel que $y_k - \lambda k$ est une fonction croissante de k .

D'autre part, l'ensemble $\mathbb{R}_+^* - B(Y)$ a, lorsque Y est une telle suite, une mesure de Lebesgue nulle (voir [9], p. 72, corollaire 3.2). Ces deux propriétés sont à rapprocher de la condition (C.2) du théorème 7.

Les théorèmes 3 et 4 ne permettent pas d'obtenir des majorations des sommes de Weyl liées à la suite αX , lorsque $\alpha \in B(X)$, et ne donnent donc pas de renseignements sur la discrétance d'une telle suite. Nous allons maintenant essayer d'obtenir des majorations de ces sommes, ce qui permettra de trouver des éléments α de $B(X)$ pour certaines suites Y . Cela entraîne, avec le théorème 2, $A_X \in \mathcal{A}$ pour ces suites Y .

3. Majoration de sommes d'exponentielles liées à un réseau de \mathbb{R}^p

3.1. QUELQUES NOTATIONS ET DÉFINITIONS

3.1.1. Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans l'espace \mathbb{R}^p , muni de la base canonique (b_j) , de points générique $x = \sum x_j b_j$ (lorsque cela n'est pas précisé, l'indice j décrit $1, 2, \dots, p$). \mathbb{R}^p est muni de la mesure de Lebesgue m , et d'une distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Nous considérons un réseau $R = \bigoplus_j z_j \mathbb{Z} b_j$, avec $0 < z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_p$, fixé dans ce qui suit. Nous poserons :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^p / \forall j, 0 \leq x_j < z_j\},$$

$$d = \sup_{x \in M} \|x\|.$$

3.1.2. Dans ce chapitre, un nombre réel α est fixé, tel que

$$\forall j, \alpha z_j \notin \mathbb{Z}.$$

Si V est une partie bornée de \mathbb{R}^p , nous poserons

$$S(\alpha, V) = \sum_{x \in R \cap V} e^{2\pi i \alpha \Sigma x_j} \quad \text{et} \quad S(V) = \sum_{x \in R \cap V} 1.$$

Nous cherchons à comparer $S(\alpha, V)$ et $S(V)$ pour certaines parties V de \mathbb{R}^p . Nous utiliserons le résultat obtenu à T , « triangle » de \mathbb{R}^p , définie par

$$T = \{x \in \mathbb{R}^p / \forall j, x_j \geq 0 \text{ et } \sum x_j \leq 1\},$$

ce qui fait que, pour tout nombre $\lambda > 0$:

$$S(\alpha, \lambda T) = A_{\langle z_1, z_2, \dots, z_p \rangle}(\lambda, \alpha).$$

3.1.3. Nous appellerons « rectangle » de \mathbb{R}^p toute partie P de la forme :

$$\exists r \in \mathbb{R}^p, \exists s \in \mathbb{R}^p, x \in P \Leftrightarrow \forall j, r_j < x_j < s_j,$$

où les $<$ signifient soit $<$, soit \leq , indépendamment les uns des autres.

Enfin, si V est une partie de \mathbb{R}^p et ε un nombre réel positif, nous poserons :

$$V^* = V + M = \{x + x', x \in V \text{ et } x' \in M\},$$

$$x^* = \{x\}^*,$$

$$V^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^p / d(x, V) \leq \varepsilon\},$$

$${}^*V = \{x \in \mathbb{R}^p / d(x, V) \geq \varepsilon\}$$

3.2. UNE MAJORATION DE $S(\alpha, V)$

Soit $d_0 = \sup \|x\|$, borne supérieure prise sur le rectangle P_0 :

$$x \in P_0 \Leftrightarrow \forall j, 0 \leq x_j < 1$$

THÉORÈME 5. — Soit V une partie quarrable de \mathbb{R}^p de mesure $m(V) > 0$, et $\eta > 0$. Alors il existe un entier $N \leq \eta^{-p} m(V)$ tel que :

$$|S(\alpha, V)| \leq 2^p N \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + \frac{m(V^\eta) - m({}^{d_0+\eta}V)}{\prod_j z_j}.$$

En particulier

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda V)^{-1} S(\alpha, \lambda V) = 0$$

(une partie de \mathbb{R}^p est quarrable si l'on peut définir son aire en l'approchant intérieurement et extérieurement par des réunions finies de rectangles ou, ce

qui revient au même, si elle est m -mesurable et sa frontière est de mesure nulle).

Soit C un cône de \mathbb{R}^p , c'est-à-dire une partie telle que

$$x \in C \Rightarrow \forall \lambda > 0, \lambda x \in C.$$

On peut alors appliquer le théorème 5 à $T_C = \{x \in C / \|x\| \leq 1\}$. Si Σ_C est la suite des $|x| = \sum x_j$, décrivant $C \cap R$, ordonnée à $\|x\|$ croissant, on obtient alors :

$$\{\beta > 0 / \forall j, \beta z_j \in \mathbb{Q}\} \subset B(\Sigma_C)$$

3.3. UNE MAJORATION DE $S(\alpha, \lambda T)$

Nous ne montrerons pas ici le théorème 5. Sa démonstration est analogue à celle du résultat suivant, qui nous servira ensuite.

PROPOSITION 5. — (a) Pour tout $\eta > 0$, il existe un nombre $N \leq \lambda^p / \eta^p p!$ tel que pour tout $\lambda > 0$:

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leq 2^p N \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + \frac{\lambda^p}{p! \prod_j z_j} \left[\left(1 + \frac{p z_p}{\lambda}\right)^p - \left(1 - \frac{p \eta}{\lambda}\right)^p \right];$$

(b) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leq D_\varepsilon + \varepsilon S(\lambda T)$$

avec

$$D_\varepsilon = \varepsilon^{-p} \frac{(4p^2 e)^p}{p!} \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + \frac{1}{p!} (11 p^2 \varepsilon^{-1} z_p)^p (\prod_j z_j)^{-1}.$$

LEMME. — Soit P un rectangle de \mathbb{R}^p . Alors :

$$|S(\alpha, P)| \leq 2^p \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1}.$$

En effet, $a_j < n_j z_j < b_j$ est vérifié lorsque n_j varie entre deux valeurs k_j et m_j . D'où

$$S(\alpha, P) = \sum_{\forall j, k_j \leq n_j \leq m_j} \exp(2\pi i \alpha \sum n_j z_j) = \prod_j \exp(2\pi i \alpha k_j z_j) \sum_{q=0}^{m_j-k_j} \exp(2\pi i \alpha q z_j),$$

d'où la majoration. ■

T est réunion disjointe des parties U et V de \mathbb{R}^p , où U est la réunion (disjointe) des rectangles P inclus dans T de la forme

$$\exists n \in \mathbb{Z}^p, \quad x \in P \Leftrightarrow \forall j, \eta n_j \leq x_j < \eta(n_j + 1).$$

Si U est réunion disjointe de N rectangles, le lemme entraîne

$$|S(\alpha, U)| \leq 2^p \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} N.$$

Tous les rectangles utilisés dans la construction de U étant de mesure η^p , on peut choisir $N \leq \eta^{-p} m(\lambda T) = \eta^{-p} \lambda^p / p!$

D'autre part, V^* contient tous les rectangles x^* lorsque x décrit $R \cap V$. Il y a $S(V)$ tels rectangles, disjoints et de mesure $m(M)$. Donc :

$$|S(\alpha, V)| \leq S(V) \leq \frac{m(V^*)}{m(M)}.$$

Or : l'ensemble V est contenu

$$\begin{cases} \text{dans } \lambda T, \\ \text{dans le complémentaire de } \lambda' T; \text{ avec } \lambda' = \lambda - p\eta; \end{cases}$$

l'ensemble V^* est contenu

$$\begin{cases} \text{dans } \lambda'' T, \text{ avec } \lambda'' = \lambda + pz_p, \\ \text{dans le complémentaire de } \lambda' T \end{cases}$$

(on aurait en fait pu prendre $\lambda'' = \lambda + \sum z_j$).

Donc :

$$\begin{aligned} |S(\alpha, \lambda T)| &\leq 2^p N \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} \\ &\quad + (\prod_j z_j)^{-1} (m(\lambda'' T) - m(\lambda' T)) \\ &\leq 2^p N \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + (\prod_j z_j)^{-1} p!^{-1} (\lambda''^p - \lambda'^p) \end{aligned}$$

ce qui donne exactement la partie (a). La majoration de $S(\alpha, V)$ du théorème 5 s'obtient de la même manière.

Lorsque x décrit $\lambda T \cap R$, la réunion des rectangles x^* contient $\lambda''' T$, avec $\lambda''' = \lambda - pz_p$. Donc

$$(\prod_j z_j) S(\lambda T) \geq \frac{\lambda^p}{p!} \left(1 - \frac{pz_p}{\lambda}\right)^p.$$

Posons $\eta = \lambda\mu$, et cherchons à quelles conditions sur λ et μ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left(1 + \frac{pz_p}{\lambda}\right)^p - (1 - p\mu)^p \leq \varepsilon \left(1 - \frac{pz_p}{\lambda}\right)^p.$$

LEMME. — L'inégalité $(1+a)^p - (1-b)^p \leq \varepsilon (1-a)^p$ est satisfaite dès que

$$0 \leq a \leq \frac{\varepsilon}{2e(e-1)p} \quad \text{et} \quad 0 \leq b \leq \frac{\varepsilon}{2ep}.$$

Si $p \geq 2$ et $0 \leq a \leq 1/p$, il suffit de résoudre

$$(1+a)^p - (1-b)^p \leq \varepsilon/e.$$

Or :

$$(1+a)^p - (1-b)^p \leq ap \left(\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p - 1 \right) + pb \leq ap(e-1) + pb,$$

lorsque $0 \leq a \leq 1/p$ et $0 \leq b \leq 1$. Lorsque $p=1$, la vérification est immédiate. ■

Choisissons $\mu = \varepsilon/2ep^2$. Alors on obtient :

si $\lambda \geq 2e(e-1)p^2 z_p \varepsilon^{-1}$:

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leq \frac{(4ep^2)^p}{p! \varepsilon^p} \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + \varepsilon \cdot S(\lambda T);$$

si $\lambda \leq 2e(e-1)p^2 z_p \varepsilon^{-1}$:

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leq S(\lambda T) \leq \frac{m(\lambda'' T)}{m(M)} \leq \frac{(2e(e-1)p^2 z_p \varepsilon^{-1} + pz_p)^p}{p! \prod_j z_j},$$

ce qui termine la démonstration. ■

4. Recherche d'éléments α appartenant à $B(\langle Y \rangle)$

4.1. MÉTHODE UTILISÉE

Nous cherchons à majorer certaines sommes $A_x(x, t)$, où Y est une suite infinie et $X = \langle Y \rangle$. Nous utiliserons le principe suivant : soit x donné, k défini par $y_k \leq x < y_{k+1}$, $\tilde{X} = \langle \tilde{Y} \rangle$ où \tilde{Y} est la suite finie $(y_j)_{1 \leq j \leq k}$. Nous supposons donnés une partie H de $\{1, 2, \dots, k\}$, $H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ où h_j croît avec j , et un nombre réel positif t tel que $ty_{h_j} \notin \mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq p$. Nous noterons :

\tilde{Y}_H la suite des y_k , k décrivant $\{1, 2, \dots, k\} - H$,

$$Z = (z_j)_{1 \leq j \leq p} \quad \text{avec} \quad z_j = y_{h_j}.$$

Donc $A_{\langle Z \rangle}(\lambda, t) = S(t, \lambda T)$ est majoré en module par $D_\varepsilon + \varepsilon A_{\langle Z \rangle}(\lambda)$, D_ε étant donné par la proposition 5. D'autre part, $\tilde{X} = \langle \tilde{Y}_H \rangle + \langle Z \rangle$. D'où :

$$\begin{aligned} A_X(x, t) &= A_{\tilde{X}}(x, t) = \sum_{x_n \in \langle \tilde{Y}_H \rangle, x_n \leq x} e^{2\pi i x_n} A_{\langle Z \rangle}(x - x_n, t), \\ |A_X(x, t)| &\leq \sum_{x_n \in \langle \tilde{Y}_H \rangle, x_n \leq x} |A_{\langle Z \rangle}(x - x_n, t)| \\ &\leq \sum_{x_n \in \langle \tilde{Y}_H \rangle, x_n \leq x} (A_{\langle Z \rangle}(x - x_n) \cdot \varepsilon + D_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon \cdot A_X(x) + D_\varepsilon A_{\langle \tilde{Y}_H \rangle}(x), \end{aligned}$$

cette majoration étant vraie pour tout $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, avec :

$$D_\varepsilon = \varepsilon^{-p} \frac{(4ep^2)^p}{p!} \prod_j |1 - e^{2\pi i z_j}|^{-1} + \frac{1}{p!} (11\varepsilon^{-1} p^2 z_p)^p (\prod_j z_j)^{-1}.$$

4.2. Majoration de $A_{\langle \tilde{Y}_H \rangle}(x) / A_{\langle \tilde{Y} \rangle}(x)$.

PROPOSITION 6. — Soit $\tilde{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, et $H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ une partie de $\{1, 2, \dots, k\}$, h_j croissant avec j . Alors pour tout $x > 0$:

$$A_{\langle \tilde{Y}_H \rangle}(x) \leq \prod_{h \in H} y_h \psi(k, p) x^{-p} A_{\langle \tilde{Y} \rangle}(x)$$

avec

$$\psi(k, p) = \begin{cases} \frac{(2p)!}{p!} \frac{k}{2p-1} 2^{k-2p} & \text{si } 2p \leq k+1, \\ \frac{k!}{(k-p)!} & \text{si } 2p \geq k+1. \end{cases}$$

Posons $\tilde{Y}_H = (v_1, v_2, \dots, v_{k-p})$, v_j croissant avec j . Alors la proposition 4 entraîne

$$\begin{aligned} \frac{A_{\langle \tilde{Y}_H \rangle}(x)}{A_{\langle \tilde{Y} \rangle}(x)} &\leq \left(\prod_{h \in H} y_h \right) \left(\sum_{i=0}^{k-p} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \dots, v_{k-p}) \frac{x^i}{i!} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^k \tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \dots, y_k) \frac{x^j}{j!} \right)^{-1} \\ &\leq \left(\prod_{h \in H} y_h \right) \left(\sum_{i=0}^{k-p} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \dots, v_{k-p}) \frac{x^i}{i!} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{i=0}^{k-p} \tilde{S}_{k-p-i}(y_1, y_2, \dots, y_k) \frac{x^{i+p}}{(i+p)!} \right)^{-1} \\ &\leq \left(\prod_{h \in H} y_h \right) x^{-p} \sup_{0 \leq i \leq k-p} \frac{S_{k-p-i}(v_1, v_2, \dots, v_{k-p})}{\tilde{S}_{k-p-i}(y_1, y_2, \dots, y_k)} \frac{(i+p)!}{i!}. \end{aligned}$$

Soient $0 \leq i \leq k-p$ et $j = i+p$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \dots, v_{k-p}) &\leq S_{k-j}(y_1, y_2, \dots, y_k) \\ &\leq y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \dots, y_k) + S_{k-j}(y_2, y_3, \dots, y_k) \\ &\leq \left(\frac{k-j}{j} + 1\right) S_{k-j}(y_2, y_3, \dots, y_k), \end{aligned}$$

car un terme de $y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \dots, y_k)$ est de la forme $y_1 y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} \dots y_{\lambda_{k-j-1}}$, donc est « en dessous » de $(k-1) - (k-j-1)$ termes $y_n y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} \dots y_{\lambda_{k-j-1}}$ de $S_{k-j}(y_2, y_3, \dots, y_k)$, tandis qu'un terme de $S_{k-j}(y_2, y_3, \dots, y_k)$ est « en dessus » de $k-j$ termes de $y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \dots, y_k)$, d'où :

$$j y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \dots, y_k) \leq (k-j) S_{k-j}(y_2, y_3, \dots, y_k).$$

Nous obtenons donc

$$S_{k-p-i}(v_1, v_2, \dots, v_{k-p}) \leq \frac{k}{j} 2^{k-j} \tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

et

$$A_{\langle \mathcal{P}_H \rangle}(x) \leq \left(\prod_{h \in H} y_h\right) x^{-p} A_{\langle \mathcal{P} \rangle}(x) \sup_{0 \leq i \leq k-p} \frac{j!}{i!} \frac{k}{j} 2^{k-j}.$$

Or $(j!/i!)(k/j)2^{k-j}$ est une fonction qui croît avec j si $j \leq 2p-1$, décroît après. Son maximum lorsque i varie entre 0 et $k-p$ est donc $\psi(k, p)$. ■

Remarque. — Cette majoration est très grossière si p n'est pas petit devant k . En effet, au cours de la démonstration, la somme suivante a été minorée par 0 :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \dots, y_k) \frac{x^j}{j!}.$$

Or ce terme n'est petit par rapport aux autres que si p est petit par rapport à k . Cela explique pourquoi, dans la suite, nous n'obtiendrons de résultat qu'en choisissant p assez petit.

4.3. MAJORATION DE $A_X(x, t)/A_X(x)$.

THÉORÈME 6. — Soit $Y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, ε un nombre positif, x un élément de $]y_k, y_{k+1}]$ et $H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ une partie de $\{1, 2, \dots, k\}$ rangée de manière croissante. Soit $t > 0$ tel que $ty_h \notin \mathbb{N}$ pour tout $h \in H$. Alors :

$$A_X(x)^{-1} |A_X(x, t)| \leq \varepsilon + C^{-1} \psi(k, p) (1 + \varphi_H(t)) (30 p \varepsilon^{-1} y_h / y_k)^p$$

avec

$$\varphi_H(t) = \prod_{h \in H} |1 - e^{2\pi i t y_h}|^{-1} \quad \text{et} \quad C = \inf_{p \in \mathbb{N}^*} p! \left(\frac{e}{p}\right)^p.$$

En effet, avec ces hypothèses, la proposition 6 entraîne

$$A_X(x)^{-1} |A_X(x, t)| < \varepsilon + \left(\varepsilon^{-p} \frac{(4ep^2)^p}{p!} \varphi_H(t) + \frac{(11\varepsilon^{-1}p^2z_p)^p}{p! \prod_{h \in H} y_h} \right) \times A_{\langle \mathcal{P} \rangle}(x)^{-1} A_{\langle \mathcal{P}_H \rangle}(x)$$

et

$$A_{\langle \mathcal{P} \rangle}(x)^{-1} |A_{\langle \mathcal{P}_H \rangle}(x)| \leq \left(\prod_{h \in H} y_h \right) \psi(k, p) y_k^{-p}.$$

Donc

$$A_X(x)^{-1} |A_X(x, t)| \leq \varepsilon + C^{-1} \psi(k, p) y_k^{-p} \varepsilon^{-p} ((4ep^2)^p \varphi_H(t) \prod_{h \in H} y_h + (11ep y_h)^p).$$

Cela donne la majoration annoncée. ■

Cette majoration est d'autant meilleure que :

- p est petit devant k (remarque faite à propos de la proposition 6);
- y_k croît vite avec k . En effet, plus y_k croît lentement avec k , plus l'encadrement de la proposition 4 est imprécis.

La recherche d'éléments $\alpha \in B(X)$ se fonde sur le théorème 6 : il s'agit de choisir, en fonction de k, p et un ensemble H associés à $t = q\alpha$, tels que

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} p y_h, y_k^{-1} (\varphi_H(q\alpha) \psi(k, p))^{1/p} = 0,$$

p et H étant en général dépendants de q . En effet, la relation (2) entraîne avec le théorème 6 :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} A_X(x)^{-1} |A_X(x, q\alpha)| \leq \varepsilon$$

et ce résultat étant vrai pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, le théorème 1 entraîne $\alpha \in B(X)$.

4.4. ÉLÉMENTS DE $B(X)$

Nous allons donner deux exemples d'application du théorème 6.

PROPOSITION 7. — Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et supposons que : $\lim_{k \rightarrow +\infty} k 2^k y_k^{-p} = 0$. Alors $\alpha \in B(X)$ dès que l'équation en h : $\alpha y_h \notin \mathbb{Q}$ a au moins p solutions dans \mathbb{N}^* .

Soit $\alpha > 0$ donné, et $h_1 < h_2 < \dots < h_p$, p solutions de $\alpha y_h \notin \mathbb{Q}$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Nous appliquons alors le théorème 6 avec $t = q\alpha$, $k = \sup(h_p, 2p)$ et $H = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$, ce qui donne

$$A_X(x)^{-1} |A_X(x, q\alpha)| \leq \varepsilon + \Delta \varepsilon^{-p} k 2^k y_k^{-p},$$

où Δ est la constante (par rapport à ε et x) :

$$\Delta = \frac{1}{C} \frac{(2p)!}{p!} \frac{2^{-2p}}{2^{p-1}} (1 + \varphi_H(q\alpha)) (30 p y_h)^p.$$

L'hypothèse faite sur Y entraîne donc la relation (2) pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. ■

PROPOSITION 8. — S'il existe une constante $\lambda \in]0, 1[$ et une application $k \mapsto \rho = \rho(k)$ de \mathbb{N}^* dans $]0, 1[$, vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} k \rho^2 = +\infty$, telles que Y vérifie :

$$(C) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 \frac{Y_{[k\rho]}}{y_k} C(\rho(1-\lambda)) = 0$$

avec

$$C(\mu) = \begin{cases} \mu(1-\mu)^{1-1/\mu} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \mu < 1, \\ \mu^2 2^{1/\mu} & \text{si } 0 < \mu \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

la condition

$$(E) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{D_{[k\rho]}(\alpha Y)}{\rho} = 0$$

où $D_k(\alpha Y)$ est la discrétance de la suite $(\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_k)$, entraîne $\alpha \in B(X)$.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ donnés. Nous choisissons alors H ensemble des entiers h qui vérifient simultanément

$$1 \leq h \leq [k\rho],$$

$$\|q\alpha y_h\| \leq \frac{\lambda}{2} \quad (\text{ici } \|x\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|),$$

p est donc le nombre d'entiers compris entre 1 et $[k\rho]$ tels que la partie fractionnaire $\{\alpha y_h\}$ appartienne à une réunion de q intervalles disjoints de $[0, 1]$, de longueur commune $(1-\lambda)/q$. Donc

$$(3) \quad |p - (1-\lambda)[k\rho]| \leq q D_{[k\rho]}(\alpha Y) [k\rho].$$

Pour pouvoir utiliser (2), il nous reste à évaluer $\varphi_H(q\alpha)^{1/p}$ et $\psi(k, p)^{1/p}$.

LEMME. — Pour tout $t \in B(Y)$ et $\lambda \in]0, 1[$, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{-1} \text{Log} \left| \prod_{1 \leq j \leq m, \|ty_j\| \leq \lambda/2} (1 - e^{2ity_j})^{-1} \right| = - \int_{\lambda}^1 \text{Log} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \theta \right) \right) d\theta.$$

Nous poserons

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \text{Log} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \theta \right) \right) d\theta = \int_{\lambda/2}^{1-\lambda/2} \text{Log} (2 \sin(\pi \theta)) d\theta,$$

$$\varphi_{\lambda, m}(t) = \prod_{1 \leq j \leq m, \|ty_j\| \leq \lambda/2} (1 - e^{2ity_j})^{-1}.$$

Soit χ_{λ} la fonction caractéristique de l'intervalle $[(\lambda/2), 1 - (\lambda/2)]$. Alors :

$$-\text{Log} |\varphi_{\lambda, m}(t)| = \sum_{j=1}^m X(\{ty_j\}) \text{Log} |1 - e^{2ity_j}|$$

$$= \sum_{j=1}^m X_{\lambda}(\{ty_j\}) \text{Log} (2 \sin(\pi \{ty_j\})).$$

Or si f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$, $1/m \sum_{j=1}^m f(\{ty_j\})$ tend vers $\int_0^1 f(\theta) d\theta$ dès que la suite $(ty_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo 1. D'où le lemme. ■

L'hypothèse (E) entraîne l'équirépartition modulo 1 de la suite (αy_k) , donc $(1/[k\rho]) \text{Log} \varphi_H(q\alpha)$ tend vers $I(\lambda)$ et, comme $[k\rho]/p$ est majoré (en utilisant (3) et (E)), $\varphi_H(q\alpha)^{1/p}$ est majoré par une constante C' .

LEMME. — Supposons que p et k tendent vers $+\infty$, avec $p = p(k) \leq k$, et :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{p}{k} < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } k}{p} = 0$$

et soit $\mu = \mu(k)$ une fonction de \mathbb{N}^* dans $]0, 1[$ telle que $p/k \sim \mu$. Alors :

$$\psi(k, p)^{1/p} \leq C'' \frac{k}{e} \frac{C(\mu)}{\mu} 2^{|k/p - 1/\mu|}.$$

En effet, pour les k tels que $2p - 1 \geq k$, on a

$$\psi(k, p)^{1/p} = \left(\frac{p!}{(k-p)!} \right)^{1/p} = O \left(\left(\frac{k^k}{(k-p)^{k-p}} e^{-p} \left(\frac{k}{k-p} \right)^{1/2} \right)^{1/p} \right),$$

le terme sous le O étant équivalent à $\psi(k, p)^{1/p}$, puisque p et $k-p$ tendent vers $+\infty$ avec k . Or :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{p}{k} < 1 \quad \text{entraîne} \quad \lim \left(\frac{1}{1-p/k} \right)^{1/2p} = 1,$$

$$\left(\frac{k^k}{(k-p)^{k-p}} \right)^{1/p} = k \left(1 - \frac{p}{k} \right)^{1-k/p} \sim k(1-\mu)^{1-1/\mu}$$

puisque $p/k \mu$ tend vers 1.

Le calcul est analogue pour les k tels que $2p-1 \leq k$:

$$\psi(k, p)^{1/p} = \left(\frac{(2p)!}{p!} \frac{k}{2p-1} 2^{k-2p} \right)^{1/p}$$

$$= O \left(\left(\frac{(2p)^{2p}}{p^p} e^{-p} \sqrt{2} \frac{k}{2p} 2^{k-2p} \right)^{1/p} \right) = O \left(\frac{p}{e} 2^{k/p} \left(\frac{k}{p} \right)^{1/p} \right)$$

et

$$\frac{1}{p} \text{Log} \frac{k}{p} = \frac{\text{Log} k}{p} - \frac{\text{Log} p}{p}$$

tend vers zéro. ■

En utilisant (3) :

$$\left| \frac{k}{p} - \frac{1}{\rho(1-\lambda)} \right| \leq \frac{1+q+qk\rho D_{[kp]}(\alpha Y)}{p\rho(1-\lambda)} = O \left(\frac{1}{k\rho^2} + \frac{D_{[kp]}(\alpha Y)}{p} \right).$$

Donc $k/p - 1/\rho(1-\lambda)$ tend vers zéro d'après (E) et l'hypothèse $\lim k\rho^2 = +\infty$, et *a fortiori* $p/k\rho(1-\lambda)$ tend vers 1. Les deux lemmes entraînent donc, en choisissant $\mu = \rho(1-\lambda)$ dans le second

$$p y_h, y_k^{-1} (\varphi_H(q) \psi(k, p))^{1/p} \leq C''' k^2 \frac{y_{[kp]}}{y_k} C(\rho(1-\lambda)),$$

avec

$$C''' = C' C'' e^{-1} \sup_k \frac{1}{\rho(1-\lambda)k} 2^{\sup_k |(k/p) - 1/\rho(1-\lambda)|}.$$

La proposition 8 se déduit immédiatement de la dernière majoration. ■

5. Exemples de suites Y telles que $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$.

5.1. Le théorème 2 a pour conséquence

$$A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R} \Leftrightarrow B(\langle Y \rangle) \neq \emptyset.$$

Les propositions 7 et 8 entraînent donc :

THÉORÈME 7. — Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que $A_X \in \mathcal{R}$:

$$(C.1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} \text{Log } y_k > 0;$$

(C.2) $B(Y)$ non vide et il existe $c > 0$, $C \in \mathbb{R}$ et une fonction f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} tels que

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f(xe^{-2/c}) &\leq f(x) + C, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Log } y_k &= c \text{Log}^2 k + f(k); \end{aligned}$$

(C.3) il existe $\alpha > 0$ tel que $D_n(\alpha Y) = o(\text{Log}^{-1} n)$ et il existe $c > 0$, $C \in \mathbb{R}$ et une fonction f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} tels que

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f\left(\frac{x}{c \text{Log } x}\right) &\leq f(x) + C, \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Log } y_k &= (c+1) \frac{\text{Log}^2 k}{\text{Log } \text{Log } k} + f(x). \end{aligned}$$

Supposons (C.1) vérifiée. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} k 2^k y_k^{-p} = 0$, et $B(X)$ n'est pas vide (il contient d'après la proposition 7 tous les α tels que $\alpha y_k \notin \mathbb{Q}$ pour tout k).

Si Y vérifie (C.2), appliquons la proposition 8 avec $\rho = e^{-2/c}$. Alors si $\alpha \in B(Y)$, on a

$$\frac{y_{[k\rho]}}{y_k} \leq \exp(c \text{Log}^2(k e^{-2/c}) - c \text{Log}^2 k + C) = e^C k^{-4} e^{4/c}.$$

La condition (C) est donc vérifiée, et $\alpha \in B(X)$.

La démonstration est analogue lorsque Y vérifie (C.3), en prenant $\rho = (c \text{Log } k)^{-1}$ et $\lambda = 1/2$. ■

5.2. LIEN AVEC LES RÉSULTATS DU CHAPITRE 2

Nous avons montré au chapitre 2 que la condition suivante était suffisante pour que $A_X \in \mathcal{R}$:

$$(C.4) \quad \inf_{k \in \mathbb{N}^*} (y_{k+1} - y_k) > 0.$$

Les conditions (C.1), (C.2) ou (C.3) peuvent être vérifiées sans que (C.4) le soit. Regardons par exemple la condition (C.2). Le moyen le plus simple pour obtenir des suites Y vérifiant (C.2) est de choisir la fonction f croissante. Dans ce cas, la suite Y vérifie aussi (C.4).

On peut cependant construire des suites Y vérifiant (C. 2) telles qu'il existe une infinité d'indices k_i tels que

$$y_{k_i} = y_{k_i+1} = \dots = y_{k_i+h_i},$$

avec $h_i \sim 2Ck_i/c \text{Log} k_i$, où c et $C > 0$ sont les constantes associées à Y .

Le nombre h_i peut être pris bien plus grand pour des suites Y qui vérifient (C. 1), puisque si $a = \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} k^{-1} \text{Log} y_k$, on peut avoir

$$h_i = a^{-1} \text{Log} y_{k_i} - k_i,$$

donc peut être bien plus grand que k_i .

6. Problèmes ouverts

Si $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} y_k / \text{Log} k = a < +\infty$, alors $A_Y(x)$ est minoré par $[e^{x/a}]$, donc il en est de même pour $A_X(x)$ et $A_X \notin \mathcal{R}$ d'après (P. 3). Je n'ai aucun renseignement sur A_X lorsque y_k croît plus vite qu'un logarithme et moins vite qu'une fonction puissance. A partir de cet ordre de croissance, $A_X \in \mathcal{R}$ pour certaines suites Y (théorème 3, conditions (C. 4), puis (C. 3) et (C. 2) lorsque la croissance de y_k devient plus rapide). Ce n'est que lorsque y_k a une croissance au moins exponentielle (condition (C. 1)) que $A_X \in \mathcal{R}$ automatiquement.

Je ne sais pas si l'une des implications suivantes est vraie (la première entraîne la seconde) : si Y est une suite infinie

$$A_Y \in \mathcal{R} \Rightarrow A_X \in \mathcal{R},$$

$$B(Y) \neq \emptyset \Rightarrow A_X \in \mathcal{R}.$$

Une réponse à ces questions permettrait de mieux décrire ce qui se passe lorsque y_k a une croissance intermédiaire entre un logarithme et une exponentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BATEMAN (P. T.) and ERDOS (P.). — Monotonicity of partition functions, *Mathematika*, 3, 1956, p. 1-14.
- [2] BOREL (J.-P.). — Équirépartition modulo 1 de la suite (αx_n) où x_n décrit un semi-groupe additif de nombres réels, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1978-1979, exposé 7.
- [3] DIEUDONNÉ (J.). — *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris 1968.

- [4] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). — Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.*, t. 17, 1918, p. 75-115.
- [5] INGHAM (A. E.). — A Tauberian theorem for partitions, *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 1075-1090.
- [6] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences*, John Wiley & Sons, 1974.
- [7] PARAMESWARAN (S.). — Partition functions whose logarithms are slowly oscillating, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 100, 1961, p. 217-240.
- [8] RAUZY (G.). — Caractérisation des ensembles normaux, *Bull. S.M.F.*, t. 98, 1970, p. 401-414.
- [9] RAUZY (G.). — *Propriétés statistiques de suites numériques*, P.U.F., Paris, 1976.
- [10] VAALER (J.). — A Tauberian theorem related to Weyl's criterion, *J. of Number Theory*, t. 9, 1977, p. 71-78.

Le théorème 4 a été amélioré depuis, voir BOREL (J. P.), Équirépartition modulo 1 de semi-groupes additifs de nombres réels, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des nombres)* 20^e année, 1978/1979.