

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN PERRAUD

Sur le problème des mots des quotients de groupes et produits libres

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 285-331

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__285_0

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE PROBLÈME DES MOTS
DES QUOTIENTS DE GROUPES
ET PRODUITS LIBRES**

PAR

J. PERRAUD (*)

RÉSUMÉ. — On propose un théorème de théorie des graphes, avec trois applications à la résolution du problème des mots en théorie des groupes :

On agrandit la classe des groupes dont le problème des mots est résoluble par l'algorithme de Dehn.

On propose une adaptation de l'algorithme de Dehn qui agrandit cette classe.

On étend la première application aux groupes quotients de produits libres de type fini.

ABSTRACT. — We prove a theorem in graph theory, with three applications to word problem in group theory:

We enlarge the class of groups with solvable word problem by Dehn's algorithm.

We give an adaptation of Dehn's algorithm, enlarging this class.

We extend the first application to quotient groups of finitely generated free products.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	286
CHAPITRE 1. GRAPHERS.....	287
1. <i>Préliminaires</i>	288
2. <i>Théorème 1</i>	289
3. <i>Graphes valués</i>	296
Lemme 1.....	296
Lemme 2.....	296
CHAPITRE 2. GROUPES DE PRÉSENTATION FINIE.....	297
1. <i>Rappel : les conditions de petites simplifications</i>	297
2. <i>X-diagrammes à valeurs dans un groupe libre</i>	299
Lemme 3.....	299
Lemme 4.....	300

(*) Texte reçu le 23 mai 1979, révisé le 22 octobre 1979.

J. PERRAUD, Institut de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes,
38, boulevard Michelet, B.P. n° 1044, 44037 Nantes Cedex.

3. Première application du théorème 1 : la condition D	300
Théorème 2.	301
4. Deuxième application du théorème 1 : la condition C'' (1/6).	303
Lemme 5.	303
Théorème 3.	305
CHAPITRE 3. QUOTIENTS DE PRODUITS LIBRES.	306
1. Préliminaires : les conditions de petites simplifications.	307
2. X -diagrammes à valeurs dans un produit libre.	309
Lemme 6.	311
Lemme 7.	315
3. Troisième application du théorème 1 : la condition D'	316
Proposition 1.	318
Théorème 4.	320
4. Intérêt de la condition D'	322
Proposition 2.	322
Exemple.	324
INDEX DES NOTATIONS.	329
INDEX TERMINOLOGIQUE.	330
BIBLIOGRAPHIE.	331

Introduction

Le problème des mots d'un groupe fut formulé pour la première fois par M. Dehn qui en donna une solution pour les groupes fondamentaux des surfaces de dimension deux, par des méthodes géométriques.

On vit ensuite apparaître, notamment avec les travaux de M. D. GREENDLINGER, des méthodes purement algébriques dont l'idée directrice était la suivante :

Un groupe de présentation finie est déterminé par la donnée de générateurs et de relations en nombre fini; peut-on obtenir une condition suffisante pour que le problème des mots soit résoluble par l'algorithme de Dehn, en limitant la longueur ou le nombre des parties communes entre les relations données. On obtint ainsi les conditions de petites simplifications.

Le retour aux méthodes géométriques permit à R. C. LYNDON d'établir de nouvelles conditions demandant moins que les précédentes, mais ne permettant plus d'utiliser l'algorithme de Dehn qui a l'avantage d'être extrêmement simple.

Les travaux exposés dans ce texte ont eu pour point de départ la confrontation de ces méthodes et des méthodes algébriques étudiées par J. PETRESCO.

Le premier résultat est une condition décidable, demandant moins que les conditions portant sur la longueur des parties communes entre les relations données, et permettant encore d'appliquer l'algorithme de Dehn. Un exemple vérifiant cette condition mais ne vérifiant pas celles de LYNDON montre qu'elle élargit la classe des groupes dont le problème des mots est résoluble.

Le deuxième résultat concernant les groupes de présentation finie montre qu'au prix d'une adaptation raisonnable de l'algorithme de Dehn, on peut assouplir la plus célèbre des conditions de GREENDLINGER.

Un groupe de présentation finie est le quotient d'un groupe libre de type fini par le plus petit sous-groupe normal contenant un sous-ensemble fini. Le problème s'est posé naturellement de généraliser ce qui précède en remplaçant le groupe libre de type fini par un produit libre de type fini dont le problème des mots est résoluble. Les résultats connus sont moins satisfaisants : on ne sait plus si les conditions proposées sont décidables, et elles ne sont pas toujours suffisantes (il faut supposer connu un algorithme auxiliaire).

La condition proposée dans ce travail est décidable et suffisante pour que le problème des mots soit résoluble. Elle demande moins que les conditions connues portant sur la longueur des parties communes entre les relations données. Un exemple, vérifiant cette condition, mais ne vérifiant aucune autre condition connue, montre qu'elle élargit la classe des quotients de produits libres dont le problème des mots est résoluble.

Les éléments de théorie des graphes dont on aura besoin pour démontrer ces résultats se trouvent dans le premier chapitre. Le deuxième concerne les groupes de présentation finie, le troisième les quotients de produits libres.

Chapitre 1

Graphes

L'essentiel de ce chapitre est le théorème 1. C'est le résultat utilisé pour démontrer les théorèmes des autres chapitres. Cependant le lecteur qui le désire pourra passer à la suite avant d'en lire la démonstration assez longue et technique. Il n'en est pas de même des paragraphes 1 et 3 auxquels la suite se référera pour tout ce qui concerne les graphes.

A l'exception des termes entre guillemets dont la définition est donnée, la terminologie de ce chapitre est celle des premières pages du livre de C. BERGE [1] : *Graphes et hypergraphes*.

1. Préliminaires

Dans la suite, tout graphe est un graphe planaire topologique représentant le graphe orienté d'un multigraphe connexe ([1], p. 6 et 16). Donc si M est un graphe :

- chaque arête porte deux arcs tels que l'extrémité initiale de chacun d'eux est l'extrémité terminale de l'autre. Si l'un est noté \vec{a} , l'autre est noté \vec{a}^{-1} . Nous appelons « support » d'un chemin la fermeture (topologique) de la réunion des arêtes portant les arcs de ce chemin;
- pour chaque sommet S , le nombre d'arcs d'extrémité initiale S est aussi le nombre d'arcs d'extrémité terminale S . Nous l'appelons ici « degré » de S et nous le notons $d(S)$ (c'est la moitié du degré usuel);
- les faces finies de M et le complémentaire \mathcal{C} de sa face infinie sont des parties simplement connexes du plan. Nous appelons « degré » de M le nombre de ses faces finies, nous le notons $d(M)$;
- si Γ est la frontière de \mathcal{C} (respectivement la frontière d'une face finie K) et si S est un sommet de Γ , alors Γ est le support d'un circuit d'extrémités S qui tourne dans le sens positif autour de \mathcal{C} (respectivement autour de K). Nous l'appelons un « circuit frontière » du graphe M (respectivement de la face finie K).

Nous appelons « frontière du graphe » la frontière de sa face infinie. Les sommets qu'elle contient sont les « sommets frontière », les autres sont les « sommets internes ». Un « bout » est un sommet frontière de degré 1. Si un graphe de degré 0 a au moins une arête, alors il a au moins deux bouts.

Nous appelons « sous-graphe » de M tout graphe M' qui remplit les conditions définies au début de ce paragraphe et dont les sommets, les arêtes et les faces finies sont des sommets, des arêtes et des faces finies de M . Si A est une partie de l'ensemble des arêtes de M et si S est l'ensemble des extrémités des arêtes appartenant à A , alors (A, S) est un multigraphe G , et le graphe orienté correspondant G^* est un sous-graphe de M (au sens ci-dessus) si, et seulement si, il est connexe et vérifie la condition sur les faces finies. Nous disons qu'un sous-graphe M' de M est « propre » si : $1 < d(M') < d(M)$.

Nous disons qu'un graphe est un « lobe » si le complémentaire de sa face infinie est homéomorphe au disque fermé.

Nous appelons « partie consécutive » d'un chemin $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ tout chemin $(\vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_j)$ tel que : $1 \leq i \leq j \leq n$.

Nous disons qu'un sous-graphe de M est un « satellite » de M s'il est un lobe et s'il a un circuit frontière qui est une partie consécutive d'un circuit

frontière de M . Un graphe sans bout qui n'est pas un lobe contient au moins deux satellites distincts (rappelons que tout graphe considéré ici est connexe).

Un chemin élémentaire est un chemin qui ne passe pas deux fois par le même sommet, exception faite, pour un circuit, du retour au point de départ. Convenons que dans la suite un circuit $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}^{-1})$ n'est pas un circuit élémentaire, alors un circuit élémentaire ne passe pas deux fois par le même point du plan, exception faite du retour au point de départ, et il délimite un lobe.

Nous appelons « arceau » tout chemin élémentaire dont les sommets intermédiaires ont le degré 2, et les extrémités un degré différent de 2. Il est « interne » si ses sommets intermédiaires sont des sommets internes. Nous appelons « pré-arceau » un arceau qui peut être réduit à un sommet.

Si $\vec{\alpha}$ est un arceau, A l'ensemble des arêtes de M qui ne sont pas contenues dans le support de $\vec{\alpha}$, S l'ensemble de leurs extrémités, nous disons que le multigraphe $G = (A, S)$ et le graphe orienté correspondant G^* sont obtenus en supprimant l'arceau $\vec{\alpha}$ dans M (ce qui en fait supprime aussi $\vec{\alpha}^{-1}$).

Tous les circuits frontière d'une même face finie K ont la même longueur que nous appelons « périmètre » de K , noté $p(K)$. Nous appelons « front » de K l'intersection de sa frontière et de celle du graphe. Nous disons qu'il est « simple » s'il est le support d'un arceau ou s'il est réduit à un sommet; nous disons qu'il est « majeur » (respectivement « strictement majeur ») si le nombre d'arêtes qu'il contient est supérieur ou égal (respectivement strictement supérieur) au demi-périmètre de K . Nous appelons « fronts » du graphe M les fronts de ses faces finies.

Le théorème 1 a deux versions : dans l'une les fronts sont strictement majeurs, elle sera utilisée pour démontrer les théorèmes 2 et 4; dans l'autre, les fronts sont seulement majeurs, elle sera utilisée pour le théorème 3.

2. Théorème 1

HYPOTHÈSES

M est un graphe de degré au moins 2, sans sommet de degré 1, tel que :

1. Si l'arceau interne $\vec{\alpha}$ est une partie consécutive d'un circuit frontière d'une face finie K , alors : $l(\vec{\alpha}) < (1/2)p(K)$;
2. Si $\vec{\alpha}_1$ et $\vec{\alpha}_2$ sont deux arceaux internes consécutifs dans un circuit frontière d'une face finie K , alors : $l(\vec{\alpha}_1) + l(\vec{\alpha}_2) < (1/2)p(K)$;
3. M n'a pas deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs).

4. Tout sous-graphe propre, sans bout, de M a au moins deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs).

CONCLUSION

On peut trouver dans M :

– une face finie K_0 et j ($j \geq 3$) arceaux internes consécutifs dans un circuit frontière de K_0 , $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_j$, dont la somme des longueurs est supérieure (resp. strictement supérieure) au demi-périmètre de K_0 ;

– des arceaux $\vec{\alpha}'_1, \vec{\alpha}'_2, \dots, \vec{\alpha}'_j$ consécutifs dans un circuit frontière de M , des faces finies K_1, K_2, \dots, K_j , et des pré-arceaux $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_{j-1}$ tels que : $\vec{\alpha}'_1 \vec{c}_1^{-1} \vec{\alpha}_1^{-1}$ est une partie consécutive d'un circuit frontière de K_1 et $\vec{\alpha}'_j \vec{c}_{j-1}^{-1} \vec{\alpha}_j^{-1}$ une partie consécutive d'un circuit frontière de K_j .

Pour $1 < i < j$, $\vec{c}_{i-1} \vec{\alpha}'_i \vec{c}_i^{-1} \vec{\alpha}_i^{-1}$ est un circuit frontière de K_i et le front de K_i , support de $\vec{\alpha}'_i$, n'est pas majeur (resp. strictement majeur).

Nous pouvons illustrer cette conclusion par un dessin :

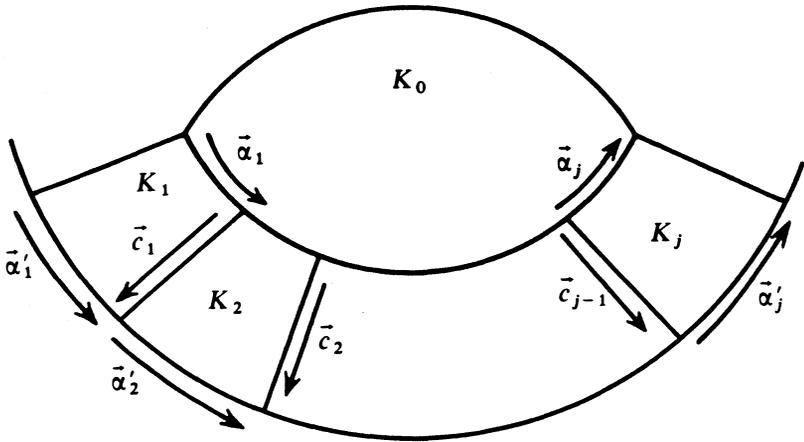


Fig. 1

Démonstration. – Nous avons besoin pour cette démonstration de trois nouvelles propriétés de M (numérotées 5, 6 et 7) qui sont des conséquences des hypothèses.

5. Les circuits frontière des faces finies de M sont des circuits élémentaires.

Supposons que ce ne soit pas le cas pour une face finie K . Alors sa frontière contient un circuit élémentaire $\vec{\gamma}$ qui délimite un lobe L ne contenant pas K .

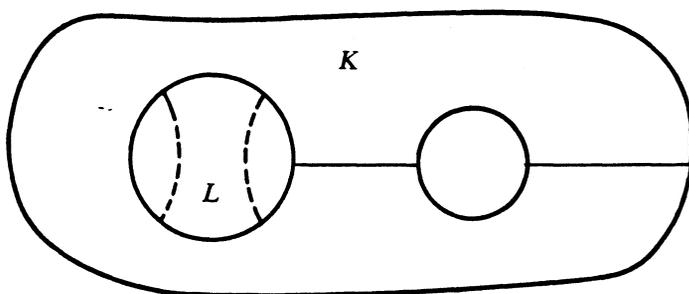


Fig. 2

On a : $1 \leq d(L) < d(M)$.

Si $d(L) = 1$, alors $\bar{\gamma}$ est un arceau interne. C'est impossible (1).

Si $d(L) \geq 2$, alors L a deux fronts simples majeurs (4). L'un des deux, au moins, est le support d'un arceau interne de M . C'est également impossible (1).

6. M est un lobe.

Si M n'était pas un lobe, M aurait au moins deux satellites distincts L_1 et L_2 , ce qui suppose : $1 \leq d(L_1) < d(M)$ et $1 \leq d(L_2) < d(M)$.

Si $d(L_1) = 1$, alors l'intérieur de L_1 est une face finie de M dont le front est simple et strictement majeur.

Si $d(L_1) \geq 2$, alors L_1 a deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs) (4). L'un d'eux, au moins, est le support d'un arceau de M . C'est un front simple majeur (resp. strictement majeur) de M .

Si M n'était pas un lobe, alors M aurait deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs), l'un contenu dans L_1 , l'autre dans L_2 ; ce qui contredit l'hypothèse (3).

7. Dans M , il n'y a que des fronts simples.

Montrons d'abord que tous les fronts connexes sont simples. Du fait que M est un lobe, si Λ est un front connexe non réduit à un sommet, alors Λ est le support d'une partie consécutive $\bar{\alpha}$ d'un circuit frontière de M . Nous appelons K la face finie de front Λ et $\bar{\rho}$ le circuit frontière de K ayant la même extrémité initiale que $\bar{\alpha}$. Si $\bar{\alpha}$ n'était pas un arceau, alors $\bar{\alpha}$ aurait un sommet intermédiaire de degré au moins 3 et ne serait pas une partie consécutive de $\bar{\rho}$, et $\bar{\rho}$ passerait au moins deux fois par ce sommet. C'est impossible (5) donc $\bar{\alpha}$ est un arceau.

Montrons par l'absurde que tous les fronts sont connexes. Supposons que K soit une face finie dont le front Λ n'est pas connexe. On peut trouver un circuit frontière $\vec{\gamma}$ de M tel que : $\vec{\gamma} = \vec{c} \cdot \vec{c}'$ où :

- \vec{c} est un pré-arceau, dont le support est une composante connexe de Λ ;
- au moins un sommet intermédiaire de \vec{c}' appartient à Λ . Nous appelons C et D le premier et le dernier d'entre eux.

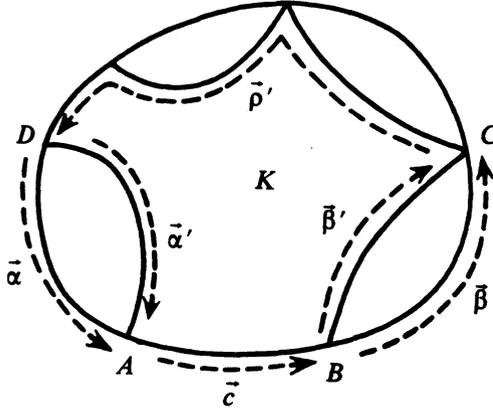


Fig. 3

Nous appelons A et B les extrémités de \vec{c} , $\vec{\beta}$ la partie consécutive de \vec{c}' d'extrémités B et C , $\vec{\alpha}$ celle d'extrémités D et A . Nous appelons $\vec{\rho}$ le circuit frontière de K d'extrémité initiale A , $\vec{\beta}'$ la partie consécutive de $\vec{\rho}$ d'extrémités B et C , $\vec{\alpha}'$ celle d'extrémités D et A , $\vec{\rho}'$ celle d'extrémités C et D .

Le circuit $\vec{c} \vec{\beta}' \vec{\rho}' \vec{\alpha}$ délimite un lobe L_1 tel que $1 < d(L_1) < d(M)$. Donc L_1 a deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs) (4). L'un d'eux peut être le support de $\vec{c} \vec{\beta}' \vec{\rho}'$, l'autre doit être contenu dans le support de $\vec{\alpha}$ et c'est un front simple majeur (resp. strictement majeur) de M . De même, le circuit $\vec{c} \vec{\beta} \vec{\rho}' \vec{\alpha}'$ délimite un lobe L_2 et M a un deuxième front simple majeur (resp. strictement majeur), contenu dans le support de $\vec{\beta}$; ce qui contredit l'hypothèse (3).

Pour obtenir les résultats annoncés dans la conclusion, nous appliquerons l'hypothèse 4 à un sous-graphe M_0 que nous allons déterminer maintenant.

Le graphe M_1 , obtenu à partir de M en supprimant les arceaux contenus dans sa frontière, est connexe : si $\vec{\alpha}$ est un arceau de M , contenu dans sa frontière, alors il existe un chemin $\vec{\alpha}'$ de M tel que $\vec{\alpha} \vec{\alpha}'$ est un circuit frontière

d'une face finie de M (6), et $\vec{\alpha}'$ est un chemin de M_1 (7); pour tout chemin supprimé il reste un autre chemin ayant les mêmes extrémités, donc M_1 est connexe comme M .

Les faces finies de M_1 sont les faces finies de M dont le front est vide ou réduit à un sommet. Donc M_1 est un sous-graphe de M .

Les arceaux internes de M dont une extrémité est un sommet frontière de degré 3 dans M , sont les arceaux de M_1 dont une extrémité est un bout de M_1 . En les supprimant, nous obtenons un sous-graphe M_0 de M_1 et de M , ayant les mêmes faces finies que M_1 . Nous avons : $d(M_0) < d(M)$. Pour montrer que M_0 a au moins une face finie, nous montrons qu'il a au moins une arête et au plus un bout.

Dans M_0 il y a au moins un arceau de M ; sinon tout arceau interne de M aurait une extrémité dans la frontière de M , un circuit frontière d'une face finie comporterait au plus 3 arceaux (7) et tout front serait strictement majeur (2). Or M est un graphe de degré supérieur ou égal à 2, n'ayant pas deux fronts strictement majeurs (3).

Afin de montrer que M_0 n'a pas plus d'un bout, considérons un circuit frontière $\vec{\gamma}_0$ de M_0 . Pour chaque arc \vec{a} de $\vec{\gamma}_0$, l'arc \vec{a}^{-1} fait partie des circuits frontière d'une face finie de M qui n'est pas une face finie de M_0 . Cette face peut être la même pour plusieurs arcs consécutifs de $\vec{\gamma}_0$. Notons $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_p$ les parties consécutives de $\vec{\gamma}_0$ obtenues en regroupant les arcs consécutifs pour lesquels cette face est la même. Notons K_1, K_2, \dots, K_p ces faces finies de M :

$$\vec{\gamma}_0 = \vec{\varepsilon}_1 \vec{\varepsilon}_2 \dots \vec{\varepsilon}_p,$$

$\vec{\varepsilon}_i^{-1}$ est une partie consécutive d'un circuit frontière de K_i ($1 \leq i \leq p$) $K_1 \neq K_2 \neq \dots \neq K_p$ et, en changeant au besoin l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_0$, $K_p \neq K_1$.

Ces faces n'étant pas des faces de M_0 , leur front n'est ni vide ni réduit à un sommet, c'est donc le support d'un arceau (7). On peut donc écrire un circuit frontière de K_i sous la forme $\vec{\varepsilon}_i^{-1} \vec{\mu}_i \vec{\rho}_i \vec{\nu}_i$ dans laquelle $\vec{\rho}_i$ est un arceau, porté par le front de K_i , $\vec{\mu}_i$ et $\vec{\nu}_i$ sont des chemins qui peuvent être réduits à des sommets.

En fait $\vec{\mu}_i$ et $\vec{\nu}_i$ sont des pré-arceaux :

Si $\vec{\mu}_i$ n'est pas réduit à un sommet, alors son premier arceau $\vec{\mu}'_i$ n'est pas dans M_0 , parce que $\vec{\varepsilon}_{i-1}$ et $\vec{\varepsilon}_i$ sont consécutifs dans $\vec{\gamma}_0$; l'extrémité initiale de $\vec{\mu}'_i$ n'est pas un sommet frontière de M , n'étant pas dans le front de K_i (5 et 7);

son extrémité terminale est donc un sommet frontière de M (définition de M_0), donc elle est aussi l'extrémité initiale de $\vec{\rho}_i$ et $\vec{\mu}'_i = \vec{\mu}_i$ (5 et 7). Si $\vec{\mu}_i$ n'est pas réduit à un sommet, alors $\vec{\mu}_i$ est un arceau. Pour \vec{v}_i , on fait de même avec son dernier arceau.

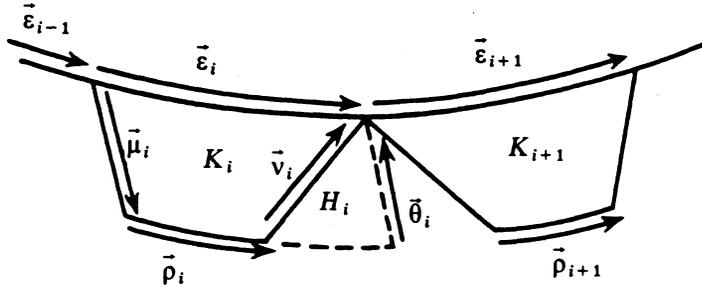


Fig. 4

Pour démontrer que M_0 n'a pas plus d'un bout, nous avons encore besoin des deux remarques suivantes :

– si le front de l'une des faces K_1, K_2, \dots, K_p est majeur (resp. strictement majeur), alors on a

$$\vec{v}_1^{-1} = \vec{\mu}_2, \quad \vec{v}_2^{-1} = \vec{\mu}_3, \quad \dots, \quad \vec{v}_{p-1}^{-1} = \vec{\mu}_p \quad \text{et} \quad \vec{v}_p^{-1} = \vec{\mu}_1;$$

– si aucun de ces fronts n'est majeur (resp. strictement majeur), il manque au plus une des égalités ci-dessus.

Nous démontrons ces deux points en associant à chaque i tel que $\vec{v}_i^{-1} \neq \vec{\mu}_{i+1}$ une nouvelle face finie H_i de M , dont le front est strictement majeur. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse 3.

Remarquons d'abord que si \vec{v}_i est réduit à un sommet, c'est un sommet frontière de M et $\vec{\mu}_{i+1}$ est également réduit à ce sommet (5 et 7).

Si $\vec{v}_i^{-1} \neq \vec{\mu}_{i+1}$, alors \vec{v}_i n'est pas réduit à un sommet et \vec{v}_i n'est pas contenu dans la frontière de M (définition de $\vec{\rho}_i$). Donc il y a une face finie H_i de M dont un circuit frontière $\vec{\gamma}_i$ commence par \vec{v}_i^{-1} , et $H_i \neq K_{i+1}$. Nous appelons $\vec{\theta}_i$ le dernier arceau de $\vec{\gamma}_i$; $\vec{\theta}_i$ n'est pas dans M_0 , parce que $\vec{\epsilon}_i$ et $\vec{\epsilon}_{i+1}$ sont consécutifs dans $\vec{\gamma}_0$; l'extrémité terminale de $\vec{\theta}_i$ qui est aussi celle de \vec{v}_i n'est pas un sommet frontière de M parce qu'elle n'est pas dans le front de K_i ; son extrémité initiale est donc un sommet frontière de M (définition de M_0). Alors le chemin $\vec{\lambda}_i$ tel que $\vec{\gamma}_i = \vec{v}_i^{-1} \vec{\lambda}_i \vec{\theta}_i$ a ses deux extrémités dans la frontière de M , donc le front de H_i est le support de $\vec{\lambda}_i$ (7) et il est strictement majeur (2).

Cette face H_i n'est aucune des faces K_1, K_2, \dots, K_p parce qu'aucun arc de $\vec{\gamma}_i$ n'est dans M_0 . Enfin, si on avait $H_i = H_j$ pour $i \neq j$, on aurait $\vec{v}_i = \vec{v}_j, K_i = K_j$ et l'arc suivant \vec{v}_i dans un circuit frontière de K_i serait à la fois le premier arc de $\vec{\varepsilon}_i^{-1}$ et le premier arc de $\vec{\varepsilon}_j^{-1}$. Or $\vec{\gamma}_0$ qui est un circuit n'utilise pas deux fois le même arc. Les deux remarques que nous avons faites sont bien une conséquence de l'hypothèse 3.

Nous en déduisons que M_0 a au plus un bout :

Un bout B est le sommet intermédiaire d'un chemin (\vec{a}, \vec{a}^{-1}) . Les arcs \vec{a} et \vec{a}^{-1} ne sont pas dans les circuits frontière d'une même face finie de M (5), donc il existe un entier i ($1 \leq i \leq p$) tel que B est l'extrémité terminale de $\vec{\varepsilon}_i$. Alors si on avait $\vec{v}_i^{-1} = \vec{\mu}_{i+1}$ ($\vec{\mu}_1$ si $i = p$), B serait un sommet de degré 2 dans M , \vec{v}_i et \vec{a}^{-1} feraient partie du même arceau de M et \vec{a}^{-1} aurait été supprimé en même temps que \vec{v}_i dans la construction de M_0 . Donc nous avons $\vec{v}_i^{-1} \neq \vec{\mu}_{i+1}$. Il existe au plus un i tel que B puisse être l'extrémité terminale de $\vec{\varepsilon}_i$. Donc M_0 a au plus un bout.

Il en résulte que M_0 a au moins une face finie. Nous avons donc : $1 \leq d(M_0) < d(M)$.

Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans la suite de la démonstration que, si l'une des faces K_1, K_2, \dots, K_p a un front majeur (resp. strictement majeur), c'est K_1 et que, si au contraire il manque une des égalités $\vec{v}_1^{-1} = \vec{\mu}_2, \dots, \vec{v}_p^{-1} = \vec{\mu}_1$, c'est $\vec{v}_p^{-1} = \vec{\mu}_1$. Dans les deux cas, cela revient à faire au besoin une permutation circulaire de l'ensemble des indices $\{1, 2, \dots, p\}$ et à changer l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_0$. Dans ces conditions, si M_0 a un bout nous avons $\vec{\gamma}_0 = \vec{\alpha}_0 \vec{\gamma}_0 \vec{\alpha}_0^{-1}$ où $\vec{\alpha}_0$ est un arceau de M_0 . Nous appelons M'_0 le sous-graphe obtenu en supprimant l'arceau $\vec{\alpha}_0$. Si M_0 n'a pas de bout, nous posons $M'_0 = M_0, \vec{\gamma}'_0 = \vec{\gamma}_0$. Dans tous les cas, nous avons $d(M'_0) = d(M_0)$, donc $1 \leq d(M'_0) < d(M)$.

Si $d(M'_0) > 1$, alors M'_0 a deux fronts simples majeurs (resp. strictement majeurs) (4). L'un au moins est le support d'une partie consécutive $\vec{\gamma}_*$ de $\vec{\gamma}'_0$. Si $\vec{\gamma}_*$ était contenu dans un $\vec{\varepsilon}_i$, ce serait un arceau de M , ce qui est impossible (1). Donc il existe deux indices i et j tels que :

$$1 \leq i < j \leq p, \quad \vec{\gamma}_* = \vec{\varepsilon}'_i \vec{\varepsilon}_{i+1} \dots \vec{\varepsilon}_{j-1} \vec{\varepsilon}'_j,$$

où $\vec{\varepsilon}'_i$ est le dernier arceau de M faisant partie de $\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}'_j$ le premier de $\vec{\varepsilon}_j, \vec{\varepsilon}_{i+1}, \vec{\varepsilon}_{i+2}, \dots, \vec{\varepsilon}_{j-1}$ sont des arceaux de M .

Si K_* est la face finie de M'_0 dont le front est le support de $\vec{\gamma}_*$, alors la somme des longueurs de $\vec{\varepsilon}'_i, \vec{\varepsilon}_{i+1}, \dots, \vec{\varepsilon}_{j-1}, \vec{\varepsilon}'_j$ est supérieure (resp. strictement supérieure) au demi-périmètre de K_* et cela implique $j \geq i + 2$ (2).

Les arceaux $\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_{i+1}, \dots, \vec{\rho}_j$ sont consécutifs dans un circuit frontière de M parce que les inégalités $1 \leq i < j \leq p$ impliquent $\vec{v}_i^{-1} = \vec{\mu}_{i+1}, \vec{v}_{i+1}^{-1} = \vec{\mu}_{i+2}, \dots, \vec{v}_{j-1}^{-1} = \vec{\mu}_j$. Enfin pour $i+1 \leq l \leq j-1$, on a $l \neq 1$ donc le front de K_l n'est pas majeur (resp. strictement majeur).

Si $d(M'_0) > 1$, alors le théorème 1 est démontré.

Si $d(M'_0) = 1$, alors nous prenons pour K_* l'unique face finie de M'_0 et et $\vec{\gamma}_* = \vec{\gamma}'_0$ et nous retrouvons les résultats ci-dessus, avec $i = 1$ et $j = p$.

Fin de la démonstration.

3. Graphes valués

Le graphe M est appelé « graphe valué » s'il est muni d'une application φ de l'ensemble des arcs de M dans un groupe F , telle que pour tout arc $\vec{a} : \varphi(\vec{a}^{-1}) = \varphi(\vec{a})^{-1}$; $\varphi(\vec{a})$ est appelé « valeur » de l'arc \vec{a} et M est un graphe « à valeurs dans F ». Nous appelons « valeur » du chemin $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ le produit $\varphi(\vec{a}_1) \varphi(\vec{a}_2) \dots \varphi(\vec{a}_n)$, qui appartient à F . Nous notons $\varphi(\vec{\gamma})$ la valeur du chemin $\vec{\gamma}$. Dans ces conditions :

LEMME 1. — Si $\vec{\gamma}$ est un circuit frontière d'un graphe valué M , alors les faces finies de M peuvent être rangées dans un ordre D_1, D_2, \dots, D_m tel que : $\varphi(\vec{\gamma}) = \prod_{i=1}^m (u_i r_i u_i^{-1})$ où r_i est la valeur d'un circuit frontière de D_i . ([6], lemme 1.2, p. 239).

Si $\vec{\alpha}$ est un arceau interne d'un graphe M , alors il existe un chemin $\vec{\alpha}_1$ tel que $\vec{\alpha}\vec{\alpha}_1$ est un circuit frontière d'une face finie K_1 de M , et un chemin $\vec{\alpha}_2$ tel que $\vec{\alpha}^{-1}\vec{\alpha}_2$ est un circuit frontière d'une face finie K_2 ; K_1 et K_2 peuvent être distinctes ou confondues. Si M est un graphe valué et si $\varphi(\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2) = 1$, nous disons que K_1 et K_2 sont « réciproques » en $\vec{\alpha}$. Si M est un graphe valué dans lequel il n'y a pas de faces réciproques, nous disons que M est « réduit ».

Remarquons que tout sous-graphe d'un graphe valué réduit est un graphe valué réduit.

Si N est le plus petit sous-groupe normal de F contenant X , alors tout élément ω de N est un produit de conjugués d'éléments de $X \cup X^{-1}$; nous appelons « degré de ω par rapport à X », $d_X(\omega)$, le nombre minimal de facteurs dans un tel produit. Alors :

LEMME 2. — Si, dans le graphe valué M , les circuits frontière des faces finies ont pour valeurs des conjugués d'éléments de $X \cup X^{-1}$, et si M a un circuit frontière $\vec{\gamma}$ tel que $d_X(\varphi(\vec{\gamma})) = d(M)$, alors dans M deux faces distinctes ne sont pas réciproques.

Démonstration. — Si deux faces finies distinctes étaient réciproques en $\bar{\alpha}$, alors le graphe M' obtenu en supprimant l'arceau interne $\bar{\alpha}$ aurait pour degré $d(M) - 1$ mais il admettrait toujours $\bar{\gamma}$ pour circuit frontière. On aurait alors (lemme 1) $d_X(\varphi(\bar{\gamma})) \leq d(M) - 1$. Contradiction.

Fin de la démonstration.

Remarque. — Si une face finie d'un graphe valué est réciproque d'elle-même, alors elle a un circuit frontière $\bar{\gamma}$ tel que :

$$\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\bar{\beta}_1\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}_2 \quad \text{et} \quad \varphi[(\bar{\beta}_1\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}_2).(\bar{\beta}_2\bar{\alpha}\bar{\beta}_1)] = 1.$$

Mais alors :

$$\varphi(\bar{\alpha}\bar{\beta}_1\bar{\alpha}^{-1}\bar{\beta}_2) \cdot \varphi(\bar{\beta}_2\bar{\alpha}\bar{\beta}_1\bar{\alpha}^{-1}) = 1,$$

$$\varphi(\bar{\gamma}) \cdot [\varphi(\bar{\beta}_2)\varphi(\bar{\gamma})\varphi(\bar{\beta}_2)^{-1}] = 1$$

donc $\varphi(\bar{\gamma})$ est conjugué de son inverse.

Dans un groupe libre, un élément différent de 1 n'est pas conjugué de son inverse. Donc :

COROLLAIRE. — Si F est un groupe libre, si X ne contient pas 1, si les circuits frontière des faces finies de M ont pour valeurs des conjugués d'éléments de $X \cup X^{-1}$ et si M a un circuit frontière $\bar{\gamma}$ tel que $d_X(\varphi(\bar{\gamma})) = d(M)$, alors M est réduit.

Dans le prochain chapitre, F est un groupe libre.

Chapitre 2

Groupes de présentation finie

Ce chapitre rassemble deux conditions suffisantes pour que le problème des mots d'un groupe de présentation finie soit résoluble. Ce sont deux conséquences du théorème 1. La première établie précédemment [9] est simplement rappelée pour montrer en quoi elle est une conséquence du théorème 1. La seconde est proposée et démontrée.

1. Rappel : les conditions de petites simplifications

Dans tout ce chapitre, F est un groupe libre de base $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$; un mot est un élément du monoïde libre L de base $\{x_i^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_l^{\pm 1}\}$; les générateurs sont les éléments $x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_l^{\pm 1}$. La notation $R \equiv S$ signifie que les mots R et S sont égaux dans L ; la notation $R = S$ signifie qu'ils ont même

valeur dans F , on dit aussi qu'ils représentent le même élément de F . Si R est un mot et x sa valeur dans F , alors $l(R)$ désigne la longueur de R et $|x|$ la longueur du mot réduit représentant x . Le mot vide sera noté 1, il a pour longueur 0.

Dans tout ce chapitre, X est un sous-ensemble fini et symétrisé de F (le mot réduit représentant un élément de X est cycliquement réduit et X contient les valeurs de ses permutations circulaires et leurs inverses). Les mots réduits représentant les éléments de X sont appelés relateurs. Par abus de langage, nous appelons aussi X l'ensemble des relateurs. S'il existe deux relateurs distincts R_1, R_2 , tels que $R_1 \equiv ST_1$ et $R_2 \equiv ST_2$, alors on dit que le mot S est une pièce.

Dans tout ce chapitre, N est le sous-groupe normal de F engendré par X , nous disons plus simplement la clôture normale de X dans F . Si G est un groupe de présentation finie, alors il existe F et X tels que $G \simeq F/N$. On a résolu le problème des mots de G quand on sait décider si un mot réduit représente ou non un élément de N .

Depuis les travaux de M. D. GREENLINGER ([2], [3], [4]), on sait que le problème des mots de G est résoluble par l'algorithme de Dehn si X vérifie la condition $C'(1/6)$ ou s'il vérifie les conditions $[C'(1/4)$ et $T(4)]$ dont les définitions sont rappelées ci-dessous :

$C'(1/k)$: si on a $R \equiv ST$, où R est un relateur et S est une pièce, alors on a

$$l(S) < \frac{1}{k} l(R).$$

$T(4)$: si R_1, R_2, R_3 sont des relateurs, alors au moins un des mots $R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1$ est réduit.

V. V. SOLDATOVA a démontré [13] que dans $[C'(1/4)$ et $T(4)]$, on peut demander un peu moins que $T(4)$, à savoir :

$T^*(4)$: si R_1, R_2, R_3 sont des relateurs et si aucun des mots $R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1$ n'est réduit, alors les réductions font moins du quart dans chacun des mots R_1, R_2, R_3 (c'est-à-dire si $R_1 \equiv AT_1 B^{-1}$, $R_2 \equiv BT_2 C^{-1}$, $R_3 \equiv CT_3 A^{-1}$, alors pour $i=1, 2, 3$, $l(T_i) > (3/4) l(R_i)$).

R. C. LYNDON a démontré [5] que le problème des mots de G est également résoluble si X vérifie la condition $C(6)$ ou les conditions $[C(4)$ et $T(4)]$ ou les conditions $[C(3)$ et $T(6)]$:

$C(k)$: un relateur n'est jamais le produit de moins de k pièces.

De $T(6)$ nous retenons simplement qu'elle demande plus que $T(4)$. Notons que $C(k)$ demande moins que $C'(1/k)$ mais ne permet plus d'utiliser l'algorithme de Dehn.

On trouvera dans ce chapitre une condition D sur X , décidable, suffisante pour que le problème des mots soit résoluble par l'algorithme de Dehn, et demandant moins que $C'(1/6)$ ou $[C'(1/4) \text{ et } T(4)]$ ou $[C'(1/4) \text{ et } T^*(4)]$. Cette condition élargit la classe des groupes dont le problème des mots est résoluble : on peut donner une présentation finie qui vérifie D mais ne vérifie pas $T(4)$ (donc pas $T(6)$) ni $T^*(4)$ ni $C(6)$.

On y trouvera aussi une variante de l'algorithme de Dehn qui permet d'accepter l'égalité dans l'énoncé de la condition $C'(1/6)$.

Pour tout ceci, nous utiliserons des graphes valués, à valeurs dans F .

2. X -diagrammes à valeurs dans un groupe libre

L'essentiel de ce paragraphe est le lemme 3 que nous empruntons à R. C. LYNDON [5].

Si M est un graphe valué, à valeurs dans le groupe libre F , et si les valeurs des arcs de M sont des générateurs de F , alors nous appelons « mot lu » sur le chemin $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de M , le mot $\varphi(\vec{a}_1) \varphi(\vec{a}_2) \dots \varphi(\vec{a}_n)$. Nous notons $\Phi(\vec{\gamma})$ le mot lu sur le chemin $\vec{\gamma}$. Remarquons que le chemin $\vec{\gamma}$ et le mot $\Phi(\vec{\gamma})$ ont la même valeur dans F et la même longueur.

Dans la suite, un « X -diagramme » est un graphe valué, à valeurs dans F , tel que :

- (1) les valeurs des arcs sont des générateurs;
- (2) les mots lus sur les circuits frontière des faces finies sont des relateurs.

Alors les mots lus sur les arceaux internes d'un X -diagramme réduit (c'est-à-dire réduit en tant que graphe valué) sont des pièces.

Nous savons aussi que la valeur d'un circuit frontière d'un X -diagramme est un élément de N (lemme 1). Réciproquement :

LEMME 3. — *Si R est un mot non vide, cycliquement réduit, représentant un élément de N , alors il existe un X -diagramme réduit sans bout M et un circuit frontière $\vec{\gamma}$ de M tels que $\Phi(\vec{\gamma}) \equiv R$.*

Démonstration. — Tout élément de N est un produit de conjugués d'éléments de X , donc il existe un X -diagramme M et un circuit frontière $\vec{\gamma}$ de M tels que : $\Phi(\vec{\gamma}) \equiv R$ ([5], lemme 3.1). M n'a pas de bout parce que R est

cycliquement réduit. Il existe un X -diagramme réduit remplissant toutes ces conditions ([5], lemme 3.2).

Fin de la démonstration.

Avant de poursuivre, nous introduisons une autre définition : nous disons que le mot S est un « segment » du mot R s'il existe deux mots U et V tels que $R \equiv USV$. Si R est un relateur et si $l(S) > 1/2 l(R)$, nous disons que S est un segment de relateur strictement majeur.

L'algorithme de Dehn s'applique si tout mot réduit représentant un élément de N a un segment qui est en même temps un segment de relateur strictement majeur.

LEMME 4. — *Si tout X -diagramme réduit, sans bout, de degré supérieur ou égal à 2 contient au moins deux fronts simples strictement majeurs, alors le problème des mots de F/N est résoluble par l'algorithme de Dehn.*

Démonstration. — Nous pouvons nous limiter au cas où R est un mot non vide et cycliquement réduit. Nous considérons M et $\tilde{\gamma}$ remplissant les conditions du lemme 3. Si $d(M) = 1$, alors R est lui-même un relateur. Si $d(M) \geq 2$, alors M a deux fronts simples strictement majeurs. L'un au moins est le support d'une partie consécutive $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{\gamma}$. Alors $\Phi(\tilde{\alpha})$ est un segment de R et un segment de relateur strictement majeur.

Fin de la démonstration.

3. Première application du théorème 1 : la condition D

Nous avons établi [9] une condition sur la présentation d'un groupe qui permet de résoudre le problème des mots par l'algorithme de Dehn. La classe des groupes vérifiant cette condition contient tous les groupes vérifiant les conditions de petites simplifications qui conduisent à l'algorithme de Dehn. Elle contient également des groupes qui ne vérifient aucune de ces conditions, ni aucune des conditions établies par R. C. LYNDON [5].

Nous allons rénoncer cette condition pour montrer en quoi elle est une application du théorème 1.

Un mot T_0 est appelé un j -reste [12] du relateur R_0 si on a $R_0 \equiv T_0 S_1 S_2 \dots S_j$ où S_1, S_2, \dots, S_j sont des pièces. Il existe alors des mots T_1, T_2, \dots, T_j tels que, pour $1 \leq k \leq j$, $T_k S_k^{-1}$ est un relateur R_k distinct de $(S_k S_{k+1} \dots S_j T_0 S_1 \dots S_{k-1})^{-1}$. Nous dirons que $(T_k, R_k)_{1 \leq k \leq j}$ est un « système de compléments » du j -reste T_0 de R_0 , et par « segment strictement majeur de T_l » ($0 \leq l \leq j$) nous entendrons un segment de T_l strictement majeur dans R_l .

Condition D_0 . — Si T_0 est un j -reste de R_0 ($j \geq 2$) et si $(T_k, R_k)_{1 \leq k \leq j}$ est un système de compléments de T_0 , alors dans tout mot obtenu par des simplifications dans une permutation circulaire du mot $T_0 T_1 \dots T_j$, il reste un segment strictement majeur de trois des mots T_0, T_1, \dots, T_j .

Condition D . — Nous dirons que X vérifie D quand X vérifie à la fois $C'(1/2)$ et D_0 .

Rappelons les résultats déjà établis [9] :

La condition D permet de résoudre le problème des mots; elle est décidable; elle demande moins que $C'(1/6)$ ou $[C'(1/4) \text{ et } T(4)]$ ou $[C'(1/4) \text{ et } T^*(4)]$; elle élargit la classe des groupes dont le problème des mots est résoluble. Nous rappelons l'exemple proposé [9] :

générateurs : a, b, c, x, y, z ;

relateurs : $axayb^{-1}, bybzc^{-1}, czcxa^{-1}, (xcy^{-1})^3, (yaz^{-1})^3, (zbx^{-1})^3$, leurs permutations circulaires et les inverses de celles-ci.

Cette présentation ne vérifie ni $T(6)$, ni $T(4)$, ni $T^*(4)$, ni $C(6)$. On ne voit pas de transformation de Tietze simple en une présentation qui permettrait de résoudre le problème des mots. Cependant, cette présentation vérifie D [9] ce qui permet d'appliquer l'algorithme de Dehn.

Nous donnons du théorème ci-dessous une démonstration simplifiée par l'utilisation du théorème 1.

THÉORÈME 2. — Soit F un groupe libre de type fini, soit X un sous-ensemble fini et symétrisé de F , soit N la clôture normale de X dans F .

Si X vérifie la condition D , alors le problème des mots du quotient F/N est résoluble par l'algorithme de Dehn.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. Si le problème des mots de F/N n'est pas résoluble par l'algorithme de Dehn, alors les hypothèses du lemme 4 ne sont pas vérifiées : il existe des X -diagrammes réduits, sans bouts, de degré au moins 2, qui ne contiennent pas deux fronts simples strictement majeurs; l'ensemble de leurs degrés a un plus petit élément d , $d \geq 2$; soit M un tel X -diagramme de degré d . Le graphe sous-jacent vérifie les hypothèses du théorème 1 :

M n'a pas de sommet interne de degré 1 parce que le mot lu sur un circuit frontière d'une face finie est réduit. De plus :

(1) si l'arceau interne $\vec{\alpha}$ est une partie consécutive d'un circuit frontière d'une face finie K , soit $\vec{\gamma}$ tel que $\vec{\alpha}\vec{\gamma}$ est un circuit frontière de K . Alors $\Phi(\vec{\alpha})$ est

une pièce et $\Phi(\vec{\alpha})\Phi(\vec{\gamma})$ est un relateur. D'où ($C'(1/2)$) :

$$l(\vec{\alpha}) = l(\Phi(\vec{\alpha})) < \frac{1}{2} l(\Phi(\vec{\alpha})\Phi(\vec{\gamma})) = \frac{1}{2} l(\vec{\alpha}\vec{\gamma}) = \frac{1}{2} p(K);$$

(2) si $\vec{\alpha}_1$ et $\vec{\alpha}_2$ sont deux arceaux internes consécutifs dans un circuit frontière d'une face finie K , soit $\vec{\gamma}$ tel que $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 \vec{\gamma}$ est un circuit frontière de K . Alors $\Phi(\vec{\alpha}_1)$ et $\Phi(\vec{\alpha}_2)$ sont des pièces et $\Phi(\vec{\gamma})$ est un 2-reste du relateur $\Phi(\vec{\gamma}\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2)$. Or il résulte de D_0 que si T_0 est un 2-reste de R_0 , alors $l(T_0) > (1/2)l(R_0)$. On en déduit :

$$l(\vec{\alpha}_1) + l(\vec{\alpha}_2) < \frac{1}{2} p(K);$$

(3) M n'a pas deux fronts simples *strictement majeurs*, par définition;

(4) si M' est un sous-graphe propre, sans bout, de M , alors M' est un X -diagramme réduit et : $2 \leq d(M') < d(M) = d$. Donc M' a deux fronts simples *strictement majeurs*.

Reportons-nous à la conclusion du théorème 1 et notons :

\vec{c}_0 le chemin tel que $\vec{c}_0 \vec{\alpha}_1 \vec{c}_1^{-1} \vec{\alpha}_1^{-1}$ est un circuit frontière de K_1 ;

\vec{c}_j le chemin tel que $\vec{c}_{j-1} \vec{\alpha}'_j \vec{c}_j^{-1} \vec{\alpha}_j^{-1}$ est un circuit frontière de K_j ;

$\vec{\gamma}_0$ le chemin tel que $\vec{\gamma}_0 \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_j$ est un circuit frontière de K_0 :

$$T_0 \equiv \Phi(\vec{\gamma}_0);$$

$$R_0 \equiv \Phi(\vec{\gamma}_0 \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_j),$$

$$T_k \equiv \Phi(\vec{c}_{k-1} \vec{\alpha}'_k \vec{c}_k^{-1}) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq j;$$

$$R_k \equiv \Phi(\vec{c}_{k-1} \vec{\alpha}'_k \vec{c}_k^{-1} \vec{\alpha}_k^{-1}) \quad \text{pour } 1 \leq k \leq j.$$

Alors T_0 est un j -reste de R_0 et $(T_k, R_k)_{1 \leq k \leq j}$ est un système de compléments de T_0 .

Après simplification de $\Phi(\vec{c}_k^{-1})\Phi(\vec{c}_k)$ pour $1 \leq k \leq j-1$, le mot $T_0 T_1 \dots T_j$ devient : $T_0 \Phi(\vec{c}_0 \vec{\alpha}'_2)\Phi(\vec{\alpha}'_2) \dots \Phi(\vec{\alpha}'_{j-1})\Phi(\vec{\alpha}'_j \vec{c}_j^{-1})$ avec pour $1 < i < j$ $l(\Phi(\vec{\alpha}'_i)) \leq (1/2)l(R_i)$ parce que le front de K_i n'est pas *strictement majeur*, et avec $l(T_0) \leq (1/2)l(R_0)$ parce que $l(\vec{\alpha}_1) + \dots + l(\vec{\alpha}_j) > (1/2)p(K_0)$.

Ceci contredit D_0 .

Fin de la démonstration.

4. Deuxième application du théorème 1 : la condition $C''(1/6)$

Nous considérons ici la condition obtenue quand on admet l'égalité dans l'énoncé de la condition $C'(1/6)$.

$C''(1/6)$: si l'on a $R \equiv ST$, où R est un relateur et S est une pièce, alors on a

$$l(S) \leq \frac{1}{6} l(R).$$

Dès lors que X vérifie $C(6)$, le problème des mots de F/N est résoluble [5]. Nous allons démontrer que si X vérifie $C''(1/6)$, il est résoluble par un algorithme \mathcal{A} qui s'inspire de l'algorithme de Dehn et qui en conserve la simplicité et la rapidité.

Nous écrivons $R_1 \leq R_2$ quand on peut obtenir le mot R_1 par des réductions cycliques dans le mot R_2 . Nous disons que R est obtenu par « insertion » de S dans T ou que R appartient à « T insertion S » ($R \in T \downarrow S$) quand il existe T_1 et T_2 tels que :

$$T \equiv T_1 T_2, \quad R \leq T_1 S T_2, \quad l(R) \leq l(T).$$

Si E_1 et E_2 sont deux ensembles de mots, nous appelons « E_1 insertion E_2 » ($E_1 \downarrow E_2$) l'ensemble des mots qui sont obtenus par insertion d'un mot de E_2 dans un mot de E_1 .

Étant donnés deux mots T et S , on peut construire $T \downarrow S$. Étant donnés quatre ensembles finis E_1, E_2, E_3, E_4 , on peut construire successivement

$$E_1 \downarrow E_2, \quad (E_1 \downarrow E_2) - E_3, \quad [(E_1 \downarrow E_2) - E_3] \cup E_4.$$

Algorithme \mathcal{A} . — Étant donné R , mot non vide cycliquement réduit, nous posons $B_0 = \{R\}$ et $\overline{B}_0 = B_0$. A partir de B_k et \overline{B}_k , si $B_k \neq \emptyset$, nous construisons :

$$B_{k+1} = (B_k \downarrow X) - \overline{B}_k,$$

$$\overline{B}_{k+1} = \overline{B}_k \cup B_{k+1}.$$

Les ensembles $B_0, B_1, \dots, B_k, \dots$ que l'on construit ainsi sont disjoints et sont contenus dans l'ensemble des mots de longueur inférieure ou égale à la longueur de R , et cet ensemble est fini. Donc il existe k_0 tel que $B_{k_0} = \emptyset$; l'algorithme est fini.

LEMME 5. — *Si tout X -diagramme réduit, sans bout, de degré supérieur ou égal à 2, contient au moins deux fronts simples majeurs, le problème des mots de F/N est résoluble par l'algorithme \mathcal{A} .*

Démonstration. — Nous allons voir que la valeur de R est un élément de N si, et seulement si, il existe un entier k compris entre 0 et k_0 tel que 1 appartient à B_k . Pratiquement on pourra arrêter l'algorithme dès qu'on aura trouvé un tel k , on saura alors que la valeur de R est dans N . Si on arrive à k_0 tel que $B_{k_0} = \emptyset$ sans avoir rencontré un entier k tel que 1 appartienne à B_k , alors on sait que la valeur de R n'est pas dans N .

S'il existe un entier k , compris entre 0 et k_0 , tel que 1 appartient à B_k , alors la valeur de R appartient à N ; c'est une conséquence de la définition de l'insertion : si S est un relateur et si $T_1 S T_2$ a pour valeur un élément de N , alors $T_1 T_2$ a aussi pour valeur un élément de N car :

$$T_1 T_2 = T_1 S T_2 T_2^{-1} S^{-1} T_2.$$

Pour démontrer la réciproque, nous raisonnons par l'absurde : nous supposons que la valeur de R appartient à N et qu'il n'existe pas d'entier k tel que 1 appartienne à B_k , et nous en déduisons qu'il n'existe pas d'entier k_0 tel que $B_{k_0} = \emptyset$.

Plus précisément nous démontrons par récurrence sur k les propriétés suivantes :

- il existe un X -diagramme réduit, sans bout, de degré supérieur ou égal à 2, tel que le mot lu sur un de ses circuits frontière appartient à B_k ;
- si $d(B_k)$ désigne le degré minimal pour un tel X -diagramme et si k est supérieur ou égal à 1, alors $d(B_k) < d(B_{k-1})$.

En effet pour $k=0$, $B_0 = \{R\}$ et il existe un X -diagramme réduit sans bout M_0 et un circuit frontière $\vec{\gamma}_0$ de M_0 , tels que $\Phi(\vec{\gamma}_0) \equiv R$ (lemme 3).

Un graphe sans bout ayant au moins une arête a au moins une face finie, donc $d(M_0) \geq 1$. Si on avait $d(M_0) = 1$, R serait un relateur et 1 appartiendrait à B_1 ($R \downarrow R^{-1} \subseteq B_0 \downarrow X$). Donc on a bien $d(M_0) \geq 2$. Pour $k=0$ il n'y a rien d'autre à démontrer.

Supposons les propriétés ci-dessus vraies pour les entiers 0, 1, 2, ..., k ($k \geq 0$) et montrons qu'elles sont également vraies pour l'entier $k+1$.

Par définition de $d(B_k)$, il existe un X -diagramme M , réduit, sans bout, de degré $d(B_k)$, et un circuit frontière $\vec{\gamma}$ de M , tel que $\Phi(\vec{\gamma})$ appartient à B_k .

Comme on a $d(M) \geq 2$, M a deux fronts simples majeurs. L'un au moins est le support d'une partie consécutive $\vec{\alpha}$ de $\vec{\gamma}$. Il y a dans M des chemins $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \vec{\beta}$ tels que :

$$- \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \vec{\alpha} \vec{\gamma}_2;$$

- $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ est un circuit frontière d'une face finie K ;
- $l(\bar{\alpha}) \geq l(\bar{\beta})$;

d'où :

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2) &= \Phi(\bar{\gamma}_1) \Phi(\bar{\alpha}\bar{\beta})^{-1} \Phi(\bar{\alpha}\bar{\gamma}_2), \\ l(\Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2)) &\leq l(\Phi(\bar{\gamma}_1)), \\ \Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2) &\in \Phi(\bar{\gamma}_1) \downarrow \Phi(\bar{\alpha}\bar{\beta})^{-1}, \\ \Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2) &\in B_k \downarrow X. \end{aligned}$$

D'autre part, $\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2$ est un circuit frontière d'un X -diagramme réduit sans bout M' , obtenu en supprimant l'arceau $\bar{\alpha}$ dans M . Alors K n'est plus une face finie de M' et :

$$\begin{aligned} d(M') &= d(M) - 1 \geq 1, \\ d(M') &< d(M) = d(B_k) < d(B_{k-1}) < \dots < d(B_0) \end{aligned}$$

(hypothèse de récurrence);

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2) &\notin B_k, \\ \Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2) &\in B_{k+1}, \\ d(B_{k+1}) &< d(B_k). \end{aligned}$$

Enfin, si on avait $d(M') = 1$, alors $\Phi(\bar{\gamma}_1 \bar{\beta}^{-1} \bar{\gamma}_2)$ serait un relateur et 1 appartiendrait à B_{k+2} . Donc $d(M') \geq 2$.

Les deux propriétés annoncées sont démontrées. La première prouve que pour tout k , $B_k \neq \emptyset$.

Fin de la démonstration.

Il reste à prouver que si X vérifie la condition $C''(1/6)$, alors les hypothèses du lemme 5 sont également vérifiées.

THÉORÈME 3. — Soit F un groupe libre de type fini, soit X un sous-ensemble fini et symétrisé de F , soit N la clôture normale de X dans F .

Si X vérifie la condition $C''(1/6)$, alors le problème des mots du quotient F/N est résoluble par l'algorithme \mathcal{A} .

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : si le problème des mots de F/N n'est pas résoluble par cet algorithme, alors les hypothèses du lemme 5 ne sont pas vérifiées : il existe des X -diagrammes réduits, sans bouts, de degré au moins 2, qui ne contiennent pas deux fronts simples majeurs; l'ensemble de

leurs degrés a un plus petit élément d , $d \geq 2$; soit M un tel X -diagramme, de degré d . Le graphe sous-jacent vérifie les hypothèses du théorème 1 :

M n'a pas de sommet interne de degré 1 parce que le mot lu sur un circuit frontière d'une face finie est réduit. De plus :

(1) si l'arceau interne $\bar{\alpha}$ est une partie consécutive d'un circuit frontière $\bar{\gamma}$ d'une face finie K , alors $\Phi(\bar{\alpha})$ est une pièce, $\Phi(\bar{\gamma})$ est un relateur et :

$$l(\bar{\alpha}) = l(\Phi(\bar{\alpha})) \leq \frac{1}{6} l(\Phi(\bar{\gamma})) = \frac{1}{6} p(K) < \frac{1}{2} p(K).$$

(2) si $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ sont deux arceaux internes consécutifs dans un circuit frontière d'une face finie K , alors :

$$l(\bar{\alpha}_1) + l(\bar{\alpha}_2) \leq \frac{1}{3} p(K) < \frac{1}{2} p(K).$$

(3) M n'a pas deux fronts simples *majeurs*, par définition.

(4) si M' est un sous-graphe propre, sans bout, de M , alors M' est un X -diagramme réduit et : $2 \leq d(M') < d(M) = d$. Donc M' a deux fronts simples *majeurs*.

Reportons-nous à la conclusion du théorème 1 : le front de la face K_2 n'est pas *majeur*.

K_2 a pour circuit frontière $\bar{c}_1 \bar{\alpha}'_2 \bar{c}_2^{-1} \bar{\alpha}_2^{-1}$; s'ils ne sont pas réduits à un sommet, les pré-arceaux \bar{c}_1 et \bar{c}_2 sont des arceaux internes et leur longueur est au plus $(1/6) p(K_2)$, donc :

$$l(\bar{c}_1) + l(\bar{c}_2^{-1}) + l(\bar{\alpha}_2^{-1}) \leq \frac{3}{6} p(K_2),$$

$$l(\bar{\alpha}'_2) \geq \frac{1}{2} p(K_2).$$

Donc le front de K_2 est *majeur*, contradiction.

Fin de la démonstration.

Chapitre 3

Quotients de produits libres

Dans ce chapitre F est un produit libre de type fini dont le problème des mots est résoluble. Autrement dit F est le produit libre $F_1 \star F_2 \star \dots \star F_n$ de n groupes de type fini et le problème des mots de chaque facteur F_i ($1 \leq i \leq n$) est résoluble.

X est un sous-ensemble fini de F et N est sa clôture normale dans F .

Dans le cas particulier où chaque facteur de F est un groupe de présentation finie, le quotient F/N est aussi un groupe de présentation finie, pour lequel on peut se reporter aux conditions figurant dans le chapitre précédent. On ne les confondra pas avec les conditions étudiées dans ce chapitre, qui portent sur X sous-ensemble du produit libre.

1. Préliminaires : les conditions de petites simplifications

Ce paragraphe ne fait que quelques mises au point et le lecteur pourra se référer aux travaux de R. C. LYNDON et P. E. SCHUPP ([5], [6], [11], [12]).

Un élément w de F , différent de 1, a une forme normale unique $w_1 w_2 \dots w_p$, dans laquelle chaque w_j ($1 \leq j \leq p$) appartient à un facteur F_i ($1 \leq i \leq n$) et dans laquelle il n'y a pas deux w_j consécutifs appartenant au même facteur; p s'appelle la longueur de w , notée $|w|$. On convient que $|1| = 0$. Si $|w| \leq 1$ ou si $w_p w_1 \neq 1$, alors on dit que w est cycliquement réduit (nous écrivons C.R.); si de plus w_p et w_1 ne sont pas dans le même facteur, alors on dit que w est strictement cycliquement réduit (nous écrivons S.C.R.).

Pour chaque élément w de F , on a de deux choses l'une : ou bien w a un conjugué dans l'un des facteurs F_i , ou bien w a un conjugué S.C.R. En effet si w est différent de 1, alors sa forme normale peut s'écrire :

$$b_1 b_2 \dots b_q a_1 a_2 \dots a_r b_q^{-1} \dots b_1^{-1},$$

où l'on a : $q \geq 0, r \geq 1; a_r a_1 \neq 1$ si $r \geq 2$. Si $r = 1$, alors a_1 est un conjugué de w ; si $r = 2$, alors $a_1 a_2$ est un conjugué S.C.R. de w ; si $r \geq 3$, alors l'élément $a_2 \dots a_r a_1$, dont la forme normale s'obtient en effectuant s'il y a lieu le produit $a_r a_1$, est un conjugué S.C.R. de w .

Le symétrisé X_0 de X est l'ensemble des conjugués C.R. des éléments de X et de leurs inverses. X et X_0 ont même clôture normale dans F , mais X_0 peut être infini alors que X est fini.

Nous appellerons « pseudo-symétrisé » de X , et nous noterons X_* , l'ensemble des conjugués S.C.R. des éléments de X et de leurs inverses. La forme normale d'un élément w permet de construire, s'il en existe, un conjugué S.C.R. de w ; en formant les permutations circulaires de la forme

normale de celui-ci, on obtient tous les conjugués S.C.R. de w . Donc X_* est fini comme X , et constructible à partir de X .

Pour que X_* ait même clôture normale que X et X_0 , il suffit que l'une des conditions équivalentes ci-dessous soit vérifiée :

- les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs du produit libre;
- tout élément de X a un conjugué S.C.R.;
- la longueur d'un élément de X_0 est au moins 2.

Soient x et y de formes normales $x_1 x_2 \dots x_p$ et $y_1 y_2 \dots y_q$; si $x_p y_1$ est différent de 1, on dit que le produit xy est demi-réduit (nous écrirons D.R.); si x_p et y_1 ne sont pas dans un même facteur, on dit que le produit xy est strictement réduit (nous écrirons S.R.). Remarquons que ce sont des propriétés du couple (x, y) , et non de l'élément produit $z = xy$. Si $x = 1$ ou $y = 1$, on convient que xy est D.R. et S.R.

Une pièce est un élément b de F pour lequel il y a deux éléments distincts c_1 et c_2 tels que bc_1 et bc_2 appartiennent à X_0 , et que les produits bc_1 et bc_2 sont D.R.

Condition $C'(1/k)$ ($k=6$ ou $k=4$) :

1° les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs du produit libre:

2° si le produit bc est D.R., appartient à X_0 et si b est une pièce, alors $|b| < (1/k)|bc|$.

Dans la littérature sur les quotients de produit libre, l'énoncé de la condition $C'(1/k)$ demande ou bien que la longueur de tout élément de X_0 soit supérieure ou égale à k [11] ou bien qu'elle soit strictement supérieure [6], [12]. Nous demandons seulement qu'elle soit supérieure ou égale à 2.

Le lecteur intéressé par cette digression pourra remarquer que la condition ($r \in X_0 \Rightarrow |r| \geq k$) est impliquée par la condition $|b| < (1/k)|bc|$ si aucun des facteurs F_i n'est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou si le quotient F/N n'est pas lui-même décomposable en produit libre. Nous n'aurons pas besoin de cela.

Condition $T(4)$:

1° si r, s et t appartiennent à X_* , alors au moins un des produits rs, st, tr est S.R.;

2° si y_1, y_2 et y_3 sont des éléments d'un même facteur F_i figurant dans des formes normales d'éléments de X_* , alors $y_1 y_2 y_3 \neq 1$.

Condition $C(k)$:

- 1° un élément de X_0 n'est jamais le produit D.R. de moins de k pièces;
- 2° la longueur d'un élément de X_0 est au moins k .

Les connaissances sur la résolution du problème des mots du quotient F/N peuvent se résumer comme suit :

Dans l'article de P. E. SCHUPP [12], nous trouvons ce résultat :

si X vérifie $C'(1/6)$ ou $[C'(1/4)$ et $T(4)]$ et si on dispose d'un algorithme pour lever les difficultés dues au fait que X_0 n'est pas fini, alors le problème des mots du quotient est résoluble.

Dans le livre de R. C. LYNDON et P. E. SCHUPP [6], on ne trouve plus que le cas $C'(1/6)$.

On trouvera dans ce travail une condition D' sur X , décidable, demandant moins que $C'(1/6)$ ou $[C'(1/4)$ et $T(4)]$, et suffisante pour que le problème des mots du quotient soit résoluble. Les difficultés dues au fait que X_0 peut être infini alors que X est fini sont totalement réglées par l'introduction de X_* . Cette condition élargit la classe des quotients de produits libres dont le problème des mots est résoluble : l'exemple proposé vérifie cette condition mais ne vérifie ni $C'(1/6)$ ni $C(6)$ ni $T(4)$.

La distinction entre produits S.R. et produits D.R. conduit à utiliser des graphes bipartis.

2. X -diagrammes à valeurs dans un produit libre

Un élément différent de 1 peut être conjugué de son inverse. Une difficulté nouvelle surgit dans la construction d'un graphe valué, réduit, destiné à représenter un élément de N . On fait généralement intervenir la condition $C'(1/k)$. Nous procéderons autrement.

Un graphe M est un X -diagramme à valeurs dans le produit libre $F = F_1 \star F_2 \star \dots \star F_n$ quand il vérifie les sept conditions suivantes :

- (1) M est un graphe valué, à valeurs dans F ;
- (2) M est un graphe biparti (voir par exemple C. BERGE [1], p. 7).

Plus précisément, nous distinguons deux sortes de sommets qui joueront des rôles différents, nous les appelons « sommets libres » et « sommets liés ». Tout arc a une extrémité de chaque sorte. Un « segment » est un chemin de longueur 2 dont le sommet intermédiaire est un sommet lié;

(3) les valeurs des arcs sont dans les facteurs F_i ($1 \leq i \leq n$);

(4) tous les arcs ayant pour extrémité un même sommet lié ont leurs valeurs dans un même facteur;

(5) si un segment fait partie d'un circuit frontière d'une face finie, alors sa valeur est différente de 1.

Considérons un arc \vec{a} d'un circuit frontière d'une face finie K . Il y a un segment $\vec{\delta}$ dont \vec{a} fait partie et qui fait partie d'un circuit frontière de K ; $\varphi(\vec{\delta})$ appartient à un unique facteur F_i qui ne dépend que de \vec{a} . Nous l'appelons « facteur correspondant à l'arc \vec{a} »;

(6) si deux arcs consécutifs dans un circuit frontière d'une face finie sont séparés par un sommet libre, alors les facteurs correspondants sont distincts;

(7) les valeurs des circuits frontière des faces finies de M sont des éléments de X_0 .

Remarquons que dans un graphe biparti le périmètre d'une face finie est toujours pair. Si une face finie a le périmètre 2, on ne peut pas avoir à la fois (4), (5) et (6). Donc pour un X -diagramme à valeurs dans F , le périmètre d'une face finie est un nombre pair supérieur ou égal à 4.

Si un circuit frontière d'une face finie de périmètre $2k$ a pour extrémité initiale un sommet libre, alors il est de la forme $\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2 \dots \vec{\delta}_k$ où $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \dots, \vec{\delta}_k$ sont des segments, et sa valeur est un élément de X_* ayant pour forme normale $\varphi(\vec{\delta}_1) \varphi(\vec{\delta}_2) \dots \varphi(\vec{\delta}_k)$.

Plus généralement, un circuit frontière d'une face finie de périmètre p a pour valeur un élément de X_0 dont la longueur est $p/2$ ou $(p/2) + 1$, elle est donc supérieure ou égale à 2.

Si $\vec{\alpha}$ est un arceau interne et si $\vec{\alpha}'$ est un circuit frontière d'une face finie, alors le produit $\varphi(\vec{\alpha}) \varphi(\vec{\alpha}')$ est D.R.; si de plus le X -diagramme est réduit, $\varphi(\vec{\alpha})$ est une pièce.

Si A est un sommet lié d'un X -diagramme M , alors tous les arcs d'extrémité A ont leurs valeurs dans un même facteur. Soit F_i ce facteur, soit a un élément de F_i .

Si nous multiplions à gauche par a les valeurs de tous les arcs d'extrémité initiale A et si en même temps nous multiplions à droite par a^{-1} les valeurs des arcs d'extrémité terminale A , alors nous ne changeons pas la valeur des segments de M qui reste un X -diagramme et qui reste réduit s'il l'était. Nous dirons que nous avons fait un « réajustement des valeurs » en A .

Rappelons que si X vérifie $T(4)$, un X -diagramme n'a pas de sommet interne de degré 3 [5]. Un tel sommet ne pourrait être ni libre ($T(4) - 1^\circ$) ni lié ($T(4) - 2^\circ$). Nous utiliserons cela ultérieurement.

Nous voulons maintenant généraliser les lemmes 3 et 4 du chapitre précédent. Nous savons que pour le lemme 3 une propriété des groupes libres nous fera défaut. Nous devons la remplacer par une hypothèse supplémentaire. Nous prenons celle du lemme 4 :

LEMME 6. — *Si les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs du produit libre et si tout X -diagramme réduit sans bout de degré supérieur ou égal à 2 contient deux fronts simples strictement majeurs, alors pour tout élément non trivial, w , de N , il existe un X -diagramme réduit M_w dont un circuit frontière $\vec{\gamma}_w$ a pour valeur w et possède en outre les propriétés suivantes :*

- l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_w$ est un sommet libre;
- $\vec{\gamma}_w$ ne comporte pas de segment de valeur 1;
- si $\vec{\delta}_1$ et $\vec{\delta}_2$ sont deux segments consécutifs de $\vec{\gamma}_w$, leurs valeurs sont dans des facteurs distincts.

Démonstration. — Nous commençons par établir trois conséquences des hypothèses :

(a) si $\vec{\alpha}$ est un arceau interne contenu dans les frontières des faces finies K_1 et K_2 d'un X -diagramme, et si K_1 et K_2 ne sont pas réciproques en $\vec{\alpha}$ (voir chap. 1), alors : $l(\vec{\alpha}) < (1/2)p(K_1)$, $l(\vec{\alpha}) < (1/2)p(K_2)$.

En effet, on peut construire un X -diagramme réduit sans bout ayant exactement deux faces finies K'_1 et K'_2 et deux arceaux internes $\vec{\alpha}'$ et $\vec{\alpha}'^{-1}$, tel que : $p(K'_1) = p(K_1)$, $p(K'_2) = p(K_2)$ et $l(\vec{\alpha}') = l(\vec{\alpha})$. Ce X -diagramme a deux fronts simples strictement majeurs, ce qui implique :

$$l(\vec{\alpha}') < \frac{1}{2}p(K'_1), \quad l(\vec{\alpha}') < \frac{1}{2}p(K'_2);$$

(b) si un circuit frontière $\vec{\gamma}$ du X -diagramme M est tel que $d_X(\varphi(\vec{\gamma})) = d(M)$, alors M est réduit. ($\varphi(\vec{\gamma})$ est un produit de conjugués d'éléments de $X \cup X^{-1}$ et $d_X(\varphi(\vec{\gamma}))$ désigne le nombre minimal de facteurs dans un tel produit, chap. 1).

Nous nous reportons au chapitre 1, lemme 2 : si M n'est pas réduit, il existe une face finie K réciproque d'elle-même. Sa frontière contient un circuit élémentaire qui délimite un lobe L_1 ne contenant pas K , donc : $d(L_1) < d(M)$; si L_1 n'est pas réduit, alors L_1 contient de même un lobe L_2 et $d(L_2) < d(L_1)$; il existe i ($i < d(M)$) tel que L_i est réduit.

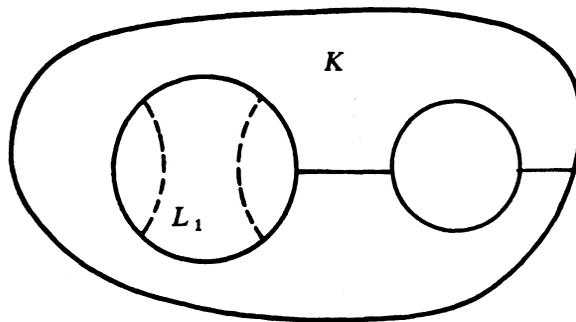


Fig. 5

Si $d(L_i) > 1$, alors L_i a deux fronts simples strictement majeurs (dans la figure, nous avons supposé $i = 1$). L'un des deux, au moins, est le support d'un arceau de M . Cet arceau est contenu dans les frontières de deux faces finies de M ; l'une est une face finie de L_i , l'autre pas; donc ces deux faces finies sont distinctes. Elles ne sont pas réciproques (lemme 2). Nous avons une contradiction avec le point (a).

Si $d(L_i) = 1$, alors un des circuits frontière de L_i est un arceau de M contenu dans les frontières de deux faces finies de M ; l'une est l'intérieur de L_i , l'autre n'est pas une face de L_i ; donc elles sont distinctes et nous retrouvons la contradiction précédente.

Donc M est nécessairement réduit.

(c) Dans un X -diagramme réduit, la longueur d'un circuit élémentaire est au moins 4.

Soit $\bar{\gamma}$ un circuit élémentaire, soit L le lobe délimité par $\bar{\gamma}$. Si $d(L) = 1$, alors la longueur de $\bar{\gamma}$ est le périmètre d'une face finie, donc $l(\bar{\gamma}) \geq 4$. Si $d(L) \geq 2$, alors L contient au moins deux fronts simples strictement majeurs. Chacun d'eux contient au moins trois arêtes. Donc $l(\bar{\gamma}) \geq 6$.

Nous abordons maintenant la démonstration proprement dite. Nous montrons par récurrence sur $d_X(w)$ qu'il existe un X -diagramme réduit $M_{w,1}$ dont le degré est $d_X(w)$ et dans lequel il y a un circuit frontière de valeur w dont l'extrémité initiale est un sommet libre. Nous avons : $w = w_1 w_2 \dots w_d$ où $d = d_X(w)$ et où w_1, w_2, \dots, w_d sont conjugués d'éléments de X_* . Ainsi, $w_d = t w'_d t^{-1}$ où w'_d appartient à X_* . Nous désignons par $t_1 t_2 \dots t_p$ la forme normale de t et par $u_1 u_2 \dots u_q$ celle de w'_d .

Dans le X -diagramme réduit ci-dessous nous avons marqué d'une étoile les sommets libres et nous avons souligné d'une flèche les segments de valeur $t_1, t_2, \dots, t_p, u_1, u_2, \dots, u_q$.

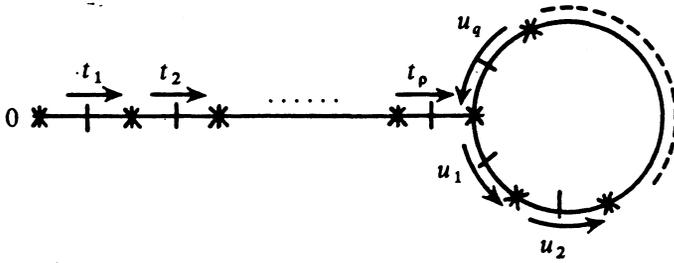


Fig. 6

Le circuit frontière d'extrémité initiale 0 a pour valeur w_d . Nous appelons M_d ce X -diagramme.

Si $d = 1$, alors $w = w_d, M_{w, 1} = M_d$.

Si $d > 1$ et si M'_{d-1} est un X -diagramme réduit de degré $d - 1$ dans lequel il y a un circuit frontière de valeur $w_1 w_2 \dots w_{d-1}$ dont l'extrémité initiale est un sommet libre O' , alors on obtient $M_{w, 1}$ en « recollant » M'_{d-1} et M_d de façon que $O = O'$ et que le circuit frontière $\vec{\gamma}_1$ d'origine O ait pour valeur w .

Si $M_{w, 1}$ et $\vec{\gamma}_1$ ne remplissent pas les conditions demandées, nous distinguons trois cas :

- 1° $M_{w, 1}$ a un bout B distinct de l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_1$;
- 2° $M_{w, 1}$ n'a pas d'autre bout que l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_1$, mais $\vec{\gamma}_1$ comporte un segment de valeur 1;
- 3° $M_{w, 1}$ n'a pas d'autre bout que l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_1$ ne comporte pas de segment de valeur 1, mais il y a deux segments consécutifs de $\vec{\gamma}_1$ qui ont leurs valeurs dans un même facteur.

Nous pouvons alors définir deux suites :

$$(\vec{M}_{w, 1}, \vec{M}_{w, 2}, \dots, \vec{M}_{w, k}),$$

$$(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_k)$$

dans lesquelles pour $1 \leq i \leq k$:

- $M_{w, i}$ est un X -diagramme réduit de degré $d_X(w)$;
- $\vec{\gamma}_i$ est un circuit frontière de $M_{w, i}$, de valeur w , et dont l'extrémité initiale est un sommet libre.

Pour $i > 1$, $M_{w,i}$ est défini à partir de $M_{w,i-1}$ comme suit :

Cas 1. — $M_{w,i-1}$ a un bout B qui n'est pas l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_{i-1}$. Alors B est l'extrémité terminale d'un arc \vec{a} tel que \vec{a} et \vec{a}^{-1} sont consécutifs dans $\vec{\gamma}_{i-1}$; $M_{w,i}$ est le sous-graphe obtenu en supprimant le sommet B et l'arête portant \vec{a} .

Cas 2. — $M_{w,i-1}$ n'a pas d'autre bout que l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_{i-1}$, mais $\vec{\delta}$ est un segment de $\vec{\gamma}_{i-1}$ tel que $\varphi(\vec{\delta}) = 1$.

$\vec{\delta}$ n'est pas la forme (\vec{a}, \vec{a}^{-1}) parce que son sommet intermédiaire n'est pas un bout et $\vec{\delta}$ n'est pas un circuit élémentaire (c), donc ses extrémités sont deux sommets distincts A et B .

Soit $\vec{\delta} = (\vec{a}, \vec{b})$, $\varphi(\vec{b}) = \varphi(\vec{a})^{-1}$. Soit O_{i-1} l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_{i-1}$. On peut obtenir en identifiant A et B , \vec{a} et \vec{b}^{-1} , \vec{a}^{-1} et \vec{b} , un X -diagramme de même degré que $M_{w,i-1}$, dont le circuit frontière d'extrémité initiale O_{i-1} a pour valeur w . Ce X -diagramme est réduit (b). On a ainsi $M_{w,i}$ et $\vec{\gamma}_i$.

Cas 3. — $M_{w,i-1}$ n'a pas d'autre bout que l'extrémité initiale de $\vec{\gamma}_{i-1}$, $\vec{\gamma}_{i-1}$ ne comporte pas de segment de valeur 1, mais $\vec{\delta}_1$ et $\vec{\delta}_2$ sont deux segments consécutifs de $\vec{\gamma}_{i-1}$ dont les valeurs sont dans un même facteur

$$\vec{\delta}_1 = (\vec{a}_1, \vec{b}_1),$$

$$\vec{\delta}_2 = (\vec{a}_2, \vec{b}_2)$$

A extrémité terminale de \vec{a}_1 (sommet lié);

B extrémité terminale de \vec{a}_2 (sommet lié);

C extrémité terminale de $\vec{\delta}_1$ (sommet libre).

Comme dans le cas précédent, A et B sont distincts. Nous faisons un réajustement des valeurs en A pour que $\varphi(\vec{b}_1) = \varphi(\vec{a}_2)^{-1}$ et nous construisons $M_{w,i}$ comme dans le cas précédent.

Dans les trois cas, $M_{w,i}$ a moins de sommets que $M_{w,i-1}$; la longueur des suites ci-dessus est majorée par le nombre de sommets de $M_{w,1}$. Donc il existe un entier k tel que :

$M_{w,k}$ est un X -diagramme réduit de degré $d_X(w)$;

$\vec{\gamma}_k$ est un circuit frontière de $M_{w,k}$, de valeur w , dont l'extrémité initiale est un sommet libre;

$\vec{\gamma}_k$ ne comporte pas de segment de valeur 1.

Les valeurs de deux segments consécutifs de $\vec{\gamma}_k$ sont dans des facteurs distincts.

Fin de la démonstration.

Remarques. — Si M_w et $\bar{\gamma}$ satisfont aux conclusions du lemme 6, alors $\bar{\gamma} = \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \dots \bar{\delta}_p$ où $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_p$ sont des segments, et $\varphi(\bar{\delta}_1) \varphi(\bar{\delta}_2) \dots \varphi(\bar{\delta}_p)$ est la forme normale de w .

M_w n'a pas d'autre bout que l'extrémité initiale de $\bar{\gamma}$.

Si w est S.C.R., M_w n'a pas de bout.

Si $|w| = 1$, alors $\bar{\gamma} = \bar{\delta}_1$, $l(\bar{\gamma}) = 2$, donc $\bar{\gamma}$ n'est pas un circuit élémentaire (c), donc $\bar{\delta}_1 = (\bar{a}, \bar{a}^{-1})$ et $\varphi(\bar{\delta}_1) = 1$, contradiction. Donc N ne contient pas d'élément de longueur 1. Tout élément non trivial de N a un conjugué S.C.R.

LEMME 7. — *Si les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs du produit libre et si tout X -diagramme réduit sans bout de degré supérieur ou égal à 2 contient deux fronts simples, strictement majeurs, alors le problème des mots de F/N est résoluble.*

Démonstration. — Afin de pouvoir utiliser l'algorithme de Dehn, nous démontrons la propriété suivante :

Si w est un élément S.C.R. de N et si $v_1 v_2 \dots v_p$ est la forme normale de w , alors il existe r appartenant à X_* et il existe $i (1 \leq i \leq p)$ tels que

$$|v_1 v_2 \dots v_i r v_{i+1} \dots v_p| < p.$$

En effet, considérons M_w et $\bar{\gamma}$ satisfaisant aux conclusions du lemme 6 : $\bar{\gamma} = \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \dots \bar{\delta}_p$, $\varphi(\bar{\delta}_i) = v_i (1 \leq i \leq p)$, M_w est un X -diagramme réduit sans bout.

Si $d(M_w) = 1$, alors w appartient à X_* , il suffit de prendre $i = p$ et $r = w^{-1}$.

Si $d(M_w) > 1$, alors M_w a deux fronts simples strictement majeurs. L'un au moins est le support d'une partie consécutive $\bar{\varepsilon}$ de $\bar{\gamma}$. Soit K la face finie dont il est le front, soit $\bar{\varepsilon}'$ le chemin tel que $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'$ est un circuit frontière de K : $l(\bar{\varepsilon}') < l(\bar{\varepsilon})$.

Soient $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\gamma}_2$ tels que $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_1 \bar{\varepsilon} \bar{\gamma}_2$. Les extrémités de $\bar{\varepsilon}$ ne sont pas nécessairement des sommets libres de M_w ; néanmoins, on peut trouver :

- i, j tels que $1 \leq i < j \leq p$;
- v'_i, v''_i tels que $v_i = v'_i v''_i$;
- v'_j, v''_j tels que $v_j = v'_j v''_j$;

de sorte que :

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\gamma}_1) &= v_1 \dots v_{i-1} v'_i; \\ \varphi(\bar{\varepsilon}) &= v'_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v'_j; \\ \varphi(\bar{\gamma}_2) &= v''_j v_{j+1} \dots v_p. \end{aligned}$$

Comme $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'$ est un circuit frontière de K , $\varphi(\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}')$ appartient à X_0 ; $v_{i+1}v_{i+2}\dots v_{j-1}v'_j\varphi(\bar{\varepsilon}')v''_i$ appartient à X_* ; soit r son inverse, alors :

$$v_1v_2\dots v_iv_{i+1}\dots v_p = v_1v_2\dots v'_i\varphi(\bar{\varepsilon}')^{-1}v''_j\dots v_p = \varphi(\bar{\gamma}_1\bar{\varepsilon}'^{-1}\bar{\gamma}_2)$$

d'où :

$$|v_1v_2\dots v_iv_{i+1}\dots v_p| \leq \frac{1}{2}l(\bar{\gamma}_1\bar{\varepsilon}'^{-1}\bar{\gamma}_2) < \frac{1}{2}l(\bar{\gamma}_1\bar{\varepsilon}\bar{\gamma}_2) = p.$$

Utilisation de l'algorithme de Dehn. — Les facteurs de F sont en nombre fini et chacun d'eux est un groupe de type fini dont le problème des mots est résoluble. Si un élément w de F est donné sous la forme

$$a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\dots a_r^{\varepsilon_r},$$

où, pour tout i ($1 \leq i \leq r$), $\varepsilon_i = \pm 1$, et a_i est un générateur de l'un des facteurs du produit libre, alors on sait trouver la forme normale de w et distinguer les trois cas suivants :

- $w = 1$;
- w a un conjugué de longueur 1;
- w a un conjugué S.C.R.

Si $w = 1$, alors w appartient à N ; si w a un conjugué de longueur 1, alors w n'appartient pas à N (remarques ci-dessus).

Dans le troisième cas, on sait trouver la forme normale d'un conjugué S.C.R. w_* de w (voir § 1), et on sait que w appartient à N si et seulement si w_* appartient à N .

Soit $v_1v_2\dots v_p$. La forme normale de w_* . On forme tous les produits $v_1v_2\dots v_iv_{i+1}\dots v_p$ pour $1 \leq i \leq p$ et pour r appartenant à X_* (X_* est fini et est constructible à partir de X). S'ils sont tous de longueur supérieure ou égale à p , alors, d'après ce qui précède, w n'appartient pas à N . Si l'un d'eux, w' , est de longueur strictement inférieure à p , on recommence le cycle d'opérations ci-dessus pour w' en remarquant que w appartient à N si et seulement si w' appartient à N .

Comme $|w'| < |w|$, l'algorithme est fini.

Fin de la démonstration.

3. Troisième application du théorème 1 : la condition D'

Nous venons de voir des hypothèses sur X qui permettent de résoudre le problème des mots du quotient F/N (lemme 7). Nous proposons maintenant une condition décidable, suffisante pour que ces hypothèses soient vérifiées.

La condition porte sur certains X -diagrammes dont la définition s'inspire de la conclusion du théorème 1.

Nous dirons qu'un graphe G est « en éventail » autour d'une de ses faces finies K si G est un lobe, si les fronts de ses autres faces finies contiennent au moins une arête, et si elles peuvent être rangées dans un ordre K_1, K_2, \dots, K_j tel que les intersections $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j$ ($1 \leq i < j$) de leurs frontières avec celle de K sont les supports d'arceaux consécutifs dans un circuit frontière de K .

Un graphe en éventail est de la forme ci-dessous où $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_j$ et \bar{c} sont des pré-arceaux et où :

- si \bar{c} est un arceau, \bar{c}_0 et \bar{c}_j sont réduits chacun à un sommet;
- si \bar{c} est réduit à un sommet, \bar{c}_0 et \bar{c}_j sont confondus.

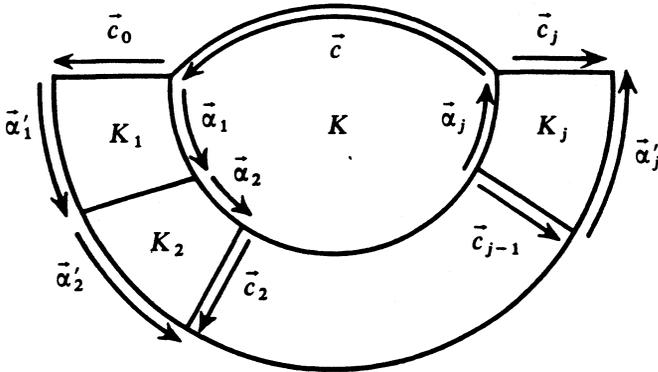


Fig. 7

Condition D' :

- 1° les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs du produit libre;
- 2° tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré 2, a deux fronts strictement majeurs;
- 3° tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré supérieur ou égal à 3, a au moins trois fronts strictement majeurs.

Remarque. — Le lecteur intéressé pourra s'apercevoir qu'appliqués au chapitre précédent les énoncés 2° et 3° deviennent la transposition en termes de diagrammes des conditions $C'(1/2)$ et D_0 . Dans le cas présent, l'énoncé en termes de diagrammes nous paraît le plus simple et son utilisation naturelle comme on pourra le constater dans l'exemple du prochain paragraphe.

PROPOSITION 1. — *La condition D' est décidable.*

Démonstration. — Le premier point ne pose pas de problème : on se reportera au début de ce chapitre. Pour les deux autres points, nous démontrons qu'il n'y a qu'un nombre fini de X -diagrammes à examiner et nous en proposons en même temps une construction.

Un graphe biparti n'a pas de boucles. Un arc \vec{a} est donc défini par une injection continue i de $[0, 1]$ dans le plan. Si f est un homéomorphisme du plan sur lui-même, l'arc défini par $f \circ i$ ne dépend que de \vec{a} et de f . C'est l'image $f(\vec{a})$.

Si G_1 et G_2 sont deux graphes bipartis connexes et si f est un homéomorphisme du plan sur lui-même tel que les arcs de G_2 sont les images des arcs de G_1 , alors les sommets de G_2 sont les images des sommets de G_1 , les faces (finies) de G_2 sont les images des faces (finies) de G_1 ; si de plus f conserve l'orientation, alors un circuit frontière d'une face finie de G_1 est transformé en un circuit frontière de son image, un circuit frontière de G_1 en un circuit frontière de G_2 .

Nous dirons que deux X -diagrammes G_1 et G_2 sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme f remplissant toutes les conditions ci-dessus et si de plus f conserve la nature des sommets et la valeur des segments.

Pour notre propos, si plusieurs X -diagrammes en éventail sont isomorphes, il nous suffit d'examiner l'un d'eux.

L'ensemble X_* des conjugués S.C.R. des éléments de X et de leurs inverses étant fini et construit à partir de X (voir § 1), nous appelons m le maximum des longueurs des éléments de X_* . Le degré d'un X -diagramme en éventail est au plus $2m + 1$, parce que s'il est en éventail autour d'une face de périmètre p , alors son degré est au plus $p + 1$.

Pour chaque degré possible d , $1 \leq d \leq 2m + 1$, nous construisons une famille finie \mathcal{F}_d de X -diagrammes telle que tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré d , est isomorphe à un X -diagramme de \mathcal{F}_d . Pour décider si X vérifie D' , il suffira d'examiner les X -diagrammes de $\mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{2m+1}$.

Pour construire \mathcal{F}_1 nous ordonnons X_* et pour chaque élément qui n'est pas une permutation circulaire de l'un des précédents nous construisons un X -diagramme de \mathcal{F}_1 . Si cet élément a pour forme normale $r_1 r_2 \dots r_n$, alors ce X -diagramme est le suivant (nous avons indiqué les valeurs des arcs soulignés d'une flèche) :

Tout X -diagramme de degré 1 est isomorphe à un X -diagramme de \mathcal{F}_1 .

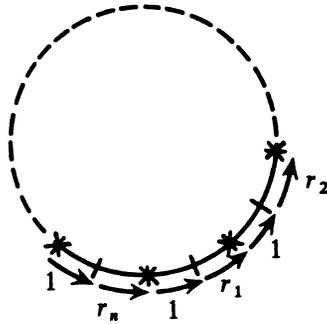


Fig. 8

Supposons construit \mathcal{F}_j . Dans la construction de \mathcal{F}_{j+1} , nous dirons que deux chemins de X -diagrammes sont semblables si les conditions suivantes sont vérifiées :

- ils ont même longueur;
- leurs extrémités initiales (respectivement terminales) sont des sommets de même nature,
- leurs segments de même rang ont même valeur;
- si leurs extrémités initiales (respectivement terminales) sont des sommets liés, alors le facteur correspondant à leur premier (respectivement dernier) arc est le même.

Nous dirons qu'ils sont équivalents si de plus leurs arcs de même rang ont même valeur.

Un chemin et son transformé par un isomorphisme sont semblables.

Soit M un X -diagramme réduit, en éventail, de degré $j + 1$. Nous prenons pour M les notations de la figure 7. Le sous-graphe de M obtenu en supprimant l'arceau $\bar{\alpha}_j$ est un X -diagramme réduit, en éventail, de degré j ; il est isomorphe à un X -diagramme M_1 de \mathcal{F}_j . De plus dans ce sous-graphe le front de K contient au moins une arête. M_1 est de la forme suivante, où \bar{e} n'est pas réduit à un sommet :

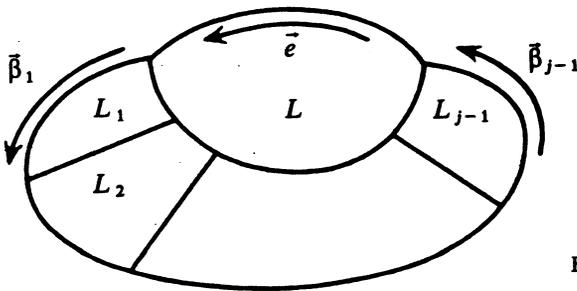


Fig. 9

Le sous-graphe de M obtenu en supprimant tous les arceaux non contenus dans la frontière de K_j est un X -diagramme de degré 1 isomorphe à un X -diagramme P_1 de \mathcal{F}_1 .

Notons $\bar{\gamma}_1$ la partie consécutive d'un circuit frontière de M_1 et $\bar{\rho}_1$ la partie consécutive d'un circuit frontière de P_1 correspondant respectivement à $\bar{c}_{j-1}^{-1} \bar{\alpha}_j \bar{c}_j$ et $\bar{c}_j^{-1} \bar{\alpha}_j^{-1} \bar{c}_{j-1}$ par les isomorphismes ci-dessus. $\bar{\gamma}_1$ et $\bar{\rho}_1^{-1}$ sont semblables.

$\bar{\gamma}_1$ est une partie consécutive de $\bar{\beta}_{j-1} \bar{e} \bar{\beta}_1$ qui comporte au moins le premier arc de \bar{e} mais ne comporte ni le premier arc de $\bar{\beta}_{j-1}$ ni le dernier arc de $\bar{\beta}_1$. Le nombre des parties consécutives $\bar{\gamma}$ de $\bar{\beta}_{j-1} \bar{e} \bar{\beta}_1$ remplissant ces conditions est :

$$l(\bar{\beta}_{j-1}) \times [l(\bar{e}) + l(\bar{\beta}_1) - 1].$$

Pour chaque $\bar{\gamma}$ nous cherchons les couples $(P, \bar{\rho})$ où P est un X -diagramme de \mathcal{F}_1 et $\bar{\rho}$ une partie consécutive d'un circuit frontière de P , telle que $\bar{\rho}^{-1}$ est semblable à $\bar{\gamma}$ (pour chaque P de \mathcal{F}_1 , le nombre d'essais est majoré par le demi-périmètre de P).

Pour chaque triplet $(\bar{\gamma}, P, \bar{\rho})$ remplissant les conditions ci-dessus, nous construisons un X -diagramme de \mathcal{F}_{j+1} : soit $\bar{\rho}'$ le chemin tel que $\bar{\rho}' \bar{\rho}$ est un circuit frontière de P , soit M'_1 le X -diagramme obtenu par un réajustement des valeurs dans M_1 tel que $\bar{\gamma}$ soit équivalent à $\bar{\rho}'^{-1}$. Nous ajoutons à M'_1 un arceau $\bar{\gamma}'$ équivalent à $\bar{\rho}'$, de mêmes extrémités que $\bar{\gamma}$ et tel que $\bar{\gamma}' \bar{\gamma}^{-1}$ est circuit frontière d'une nouvelle face finie.

$(\bar{\gamma}_1, P_1, \bar{\rho}_1)$ est l'un des triplets ci-dessus et M est isomorphe à l'un des X -diagrammes que nous venons de construire.

Nous construisons donc \mathcal{F}_{j+1} en répétant les opérations ci-dessus pour chaque X -diagramme de \mathcal{F}_j .

Fin de la démonstration.

La condition D' est décidable. Nous en venons maintenant à l'application du théorème 1 :

THÉORÈME 4. — Soit F le produit libre d'un nombre fini de groupes de type fini dont le problème des mots est résoluble, soit X un sous-ensemble fini de F , soit N la clôture normale de X dans F .

Si X vérifie la condition D' , alors le problème des mots du quotient F/N est résoluble.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : si le problème des mots de F/N n'est pas résoluble, alors les hypothèses du lemme 7 ne sont pas vérifiées; comme d'après D' les éléments de X n'ont pas de conjugués dans les facteurs

du produit libre, il existe des X -diagrammes réduits, sans bout, de degré au moins 2, qui ne contiennent pas deux fronts simples strictement majeurs; l'ensemble de leurs degrés a un plus petit élément d , $d \geq 2$; soit M un tel X -diagramme, de degré d . Le graphe sous-jacent vérifie les hypothèses du théorème 1 :

M n'a pas de sommet interne de degré 1; nous nous référons à la définition d'un X -diagramme à valeurs dans un produit libre : un sommet interne de degré 1 ne pourrait être ni lié (5) ni libre (6).

D'autre part :

1° si $\tilde{\alpha}$ est un arceau interne dont le support est contenu dans les frontières des faces finies K_1 et K_2 , alors on peut construire un X -diagramme réduit, en éventail, de degré 2, dont les faces finies K'_1 , K'_2 et les arceaux internes $\tilde{\alpha}'$ et $\tilde{\alpha}'^{-1}$ vérifient :

$$p(K'_1) = p(K_1), \quad p(K'_2) = p(K_2), \quad l(\tilde{\alpha}') = l(\tilde{\alpha}).$$

On applique la condition D' : les fronts de K'_1 et K'_2 sont strictement majeurs donc

$$l(\tilde{\alpha}) < \frac{1}{2} p(K_1), \quad l(\tilde{\alpha}) < \frac{1}{2} p(K_2);$$

2° si $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ sont deux arceaux internes consécutifs dans un circuit frontière d'une face finie K , alors on construit un X -diagramme réduit, de degré 3, en éventail autour d'une face finie K' telle que $p(K') = p(K)$, de sorte que si K'_1 et K'_2 sont les deux autres faces finies, alors les intersections $\tilde{K}'_1 \cap \tilde{K}'$ et $\tilde{K}'_2 \cap \tilde{K}'$ de leurs frontières avec celle de K' sont les supports de deux arceaux $\tilde{\alpha}'_1$ et $\tilde{\alpha}'_2$ tels que

$$l(\tilde{\alpha}'_1) = l(\tilde{\alpha}_1), \quad l(\tilde{\alpha}'_2) = l(\tilde{\alpha}_2).$$

D'après D' , le front de K' doit être strictement majeur, d'où

$$l(\tilde{\alpha}'_1) + l(\tilde{\alpha}'_2) < \frac{1}{2} p(K);$$

3° M n'a pas deux fronts simples strictement majeurs, par définition;

4° Si M' est un sous-graphe propre, sans bout, de M , alors M' est un X -diagramme réduit et $2 \leq d(M') < d(M) = d$. Donc M' a deux fronts simples strictement majeurs.

Nous nous reportons aux conclusions du théorème 1.

On peut construire un X -diagramme en éventail de degré $j + 1$ contenant au plus deux fronts *strictement majeurs*. Or $j + 1 \geq 4$. Ceci contredit D' .

Fin de la démonstration.

4. Intérêt de la condition D'

Nous montrons ici que la condition $C'(1/6)$ et la condition [$C'(1/4)$ et $T(4)$] impliquent la condition D' . Nous donnons ensuite un exemple qui ne vérifie ni $C'(1/6)$ ni $C(6)$ ni $T(4)$ mais qui vérifie D' . La condition D' élargit la classe des quotients de produits libres dont le problème des mots est résoluble.

PROPOSITION 2. — *La condition $C'(1/6)$ et la condition [$C'(1/4)$ et $T(4)$] impliquent la condition D' .*

Démonstration. — Montrons d'abord que si X vérifie $C'(1/k)$ ($k = 4$ ou 6) et si $\vec{\alpha}$ est un arceau interne d'un X -diagramme réduit, faisant partie d'un circuit frontière d'une face finie K , alors $l(\vec{\alpha}) < (1/k)p(K)$.

Soit $\vec{\beta}$ tel que $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ est un circuit frontière de K . Si l'extrémité initiale A de $\vec{\alpha}$ est un sommet lié, nous faisons un réajustement des valeurs en A pour que le dernier arc de $\vec{\beta}$ ait la valeur 1. Si l'extrémité terminale B de $\vec{\alpha}$ est également un sommet lié, alors B est distinct de A parce que $\vec{\alpha}$ n'est pas un circuit frontière de K ($\varphi(\vec{\alpha})$ serait à la fois une pièce et un élément de X_0 , ce que contredit $C'(1/k)$). Nous faisons alors un réajustement des valeurs en B pour que le premier arc de $\vec{\beta}$ ait la valeur 1. Nous avons ainsi dans tous les cas :

$$|\varphi(\vec{\alpha}\vec{\beta})| = \frac{1}{2}p(K).$$

$$|\varphi(\vec{\alpha})| \geq \frac{1}{2}l(\vec{\alpha}).$$

D'autre part $\varphi(\vec{\alpha})$ est une pièce et $\varphi(\vec{\alpha})\varphi(\vec{\beta})$ est un produit D.R., nous appliquons $C'(1/k)$:

$$l(\vec{\alpha}) \leq 2|\varphi(\vec{\alpha})| < \frac{2}{k}|\varphi(\vec{\alpha})\varphi(\vec{\beta})| = \frac{1}{k}p(K).$$

Un graphe en éventail de degré 2 ou 3 est de l'une des formes suivantes :

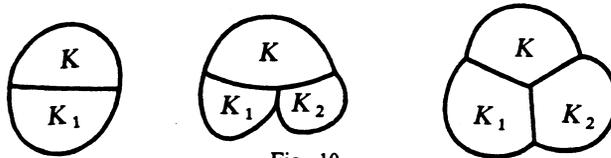


Fig. 10

et les circuits frontière des faces finies comportent au plus deux arceaux internes. Si X vérifie $C'(1/6)$ ou $C'(1/4)$, il résulte de l'inégalité ci-dessus que toutes les faces finies d'un X -diagramme réduit, en éventail, de degré 2 ou 3, ont un front strictement majeur.

Il reste le cas des X -diagrammes réduits, en éventail, de degré plus grand que 3. Pour un tel X -diagramme, nous reprenons les notations de la figure 7, avec $j \geq 3$. Les circuits frontière des faces K_1, K_2, K_3 comportent au plus trois arceaux internes, donc si x vérifie $C'(1/6)$, elles ont toutes un front strictement majeur. Si X vérifie $T(4)$, un X -diagramme réduit n'a pas de sommet interne de degré 3 [5], $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_j$ sont tous réduits à un sommet, les circuits frontière de K_1, K_2, K_3 comportent au plus un arceau interne et leur front est strictement majeur.

Fin de la démonstration.

L'exemple suivant montre que la réciproque de cette proposition est fautive. Pour en faciliter l'exposé, nous introduisons les notions de pièce stricte et de relateur d'extension.

Nous dirons qu'un élément b de forme normale $b_1 b_2 \dots b_p$ est une « pièce stricte » s'il existe x et y distincts, appartenant à X_* , de formes normales :

$$\begin{aligned} x_0 b_1 b_2 \dots b_p x_1 x_2 \dots x_q, \\ y_0 b_1 b_2 \dots b_p y_1 y_2 \dots y_r. \end{aligned}$$

Nous dirons que c'est une pièce stricte « extensible » à droite par un élément du facteur F_i s'il existe x et y remplissant les conditions ci-dessus et tels que x_1 et y_1 appartiennent à F_i . Nous dirons alors que x et y sont des « relateurs d'extension » de b à droite par un élément de F_i .

Si b est une pièce stricte extensible à droite par un élément de F_i , alors pour tout z appartenant à F_i , bz est une pièce. On définit de même les pièces strictes extensibles à gauche et les relateurs d'extension à gauche.

Nous dirons que b est une pièce stricte « simultanément » extensible à droite par un élément de F_i et à gauche par un élément de F_j s'il existe x et y remplissant les conditions ci-dessus et tels que x_1 et y_1 appartiennent à F_i , x_0 et y_0 à F_j .

Si b est une pièce stricte simultanément extensible à droite par un élément de F_i et à gauche par un élément de F_j , alors pour tout z appartenant à F_i et tout z' appartenant à F_j , $z'bz$ est une pièce.

Nous en venons à l'exemple annoncé.

EXEMPLE

Hypothèses

Dans toute la suite a, b, c, x, y, z sont six éléments donnés, de six groupes de type fini notés $F_a, F_b, F_c, F_x, F_y, F_z$ et leur ordre n'est ni 1, ni 3.

F est désormais le produit libre des groupes ci-dessus, et X est formé des éléments $axazxb^{-1}c, bybxyz^{-1}a, czyza^{-1}b$.

Étude de cet exemple :

1° les éléments de X sont strictement cycliquement réduits. X_* est formé des permutations circulaires de leurs formes normales et des inverses des éléments ainsi obtenus;

2° les hypothèses sont inchangées par une permutation circulaire de $(a, x), (b, y), (c, z)$;

3° a, b, c, x, y, z et leurs inverses sont des pièces strictes. Il n'y a pas de pièce stricte de longueur 2. Pour déterminer les pièces strictes extensibles, il suffit d'examiner a et x . Écrivons les formes normales d'éléments de X_* dans lesquelles a est le second facteur

$$\begin{aligned} & caxazxb^{-1}, \\ & xazxb^{-1}ca, \\ & c^{-1}abybxy, \\ & b^{-1}az^{-1}y^{-1}c^{-1}z^{-1}c^{-1}, \end{aligned}$$

a est extensible à gauche par un élément de F_c , à droite par un élément de F_z et n'est pas simultanément extensible. Nous en déduisons que a^{-1} est extensible à gauche par un élément de F_z et à droite par un élément de F_c .

Les formes normales d'éléments de X_* dans lesquelles x est le second facteur sont :

$$\begin{aligned} & axazxb^{-1}c, \\ & zxb^{-1}caxa, \\ & byc^{-1}aby \end{aligned}$$

x n'est pas extensible, x^{-1} non plus;

4° dans les permutations circulaires de $axazxb^{-1}c$, nous trouvons uniquement des relateurs d'extension :

– de a à gauche par un élément de F_c ;

- de a à droite par un élément de F_z ;
- de b^{-1} à gauche par un élément de F_x ;
- de c à gauche par un élément de F_b ;

5° X ne vérifie pas $C'(1/6)$ ni $C(6)$:

az est une pièce de longueur 2 alors que la longueur de $azxb^{-1}cax$ est 7, $(az)(xb^{-1})cax$ est le produit de 5 pièces;

6° X ne vérifie pas $T(4)$:

aucun des trois produits ci-dessous n'est strictement réduit :

$$(caxazxb^{-1}) \times (bczcyza^{-1}),$$

$$(bczcyza^{-1}) \times (abybxyc^{-1}),$$

$$(abybxyc^{-1}) \times (caxazxb^{-1}).$$

Nous voulons maintenant démontrer que X vérifie D' ;

7° le périmètre d'une face finie d'un X -diagramme est toujours 14;

8° la longueur d'un arceau interne d'un X -diagramme réduit est au plus 3:

Un arceau interne $\bar{\alpha}$, de longueur 4, serait de l'une des deux formes suivantes :

- $\bar{a}_1 \bar{\delta} \bar{a}_2$ où \bar{a}_1 et \bar{a}_2 sont des arcs, $\bar{\delta}$ un segment;
- $\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2$ où $\bar{\delta}_1$ et $\bar{\delta}_2$ sont des segments.

Dans le premier cas, $\varphi(\bar{\delta})$ serait une pièce stricte simultanément extensible, dans le second. $\varphi(\bar{\alpha})$ serait une pièce stricte de longueur 2:

9° dans un X -diagramme réduit, tout sommet interne de degré 3 est libre.

Il suffit [5] de montrer que X vérifie la seconde partie de la condition $T(4)$ c'est-à-dire : si y_1, y_2, y_3 sont des éléments d'un même facteur F_i , figurant dans des formes normales d'éléments de X_* , alors $y_1 y_2 y_3 \neq 1$.

Prenons par exemple le facteur F_a ; y_1, y_2, y_3 sont nécessairement de la forme $a^{\pm 1}$; $y_1 y_2 y_3 = a^\varepsilon$ où ε est l'un des nombres 1, -1, 3, -3. Nous savons justement que l'ordre de a n'est ni 1 ni 3;

10° si les circuits frontière d'une face finie d'un X -diagramme réduit ne comportent pas plus de deux arceaux internes, alors cette face a un front strictement majeur.

C'est une conséquence immédiate des points 7 et 8. Et nous en déduisons les premiers résultats suivants :

11° tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré 2, a deux fronts strictement majeurs.

Tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré 3, a trois fronts strictement majeurs.

Pour montrer que X vérifie D' , il reste à examiner le cas des X -diagrammes réduits, en éventail, de degré supérieur ou égal à 4.

Dans la suite, M est un X -diagramme réduit, en éventail, de degré supérieur ou égal à 4, pour lequel nous prenons les notations de la figure 7.

Si les fronts des faces K_i ($1 \leq i \leq j$) sont tous strictement majeurs, alors M a trois fronts strictement majeurs ($j \geq 3$).

Dans la suite, nous supposons i tel que le front de K_i n'est pas strictement majeur et nous montrons dans ce cas que les faces K_{i-1} et K_{i+1} ont un front strictement majeur, ainsi qu'une troisième. Nous aurons alors démontré que X vérifie D' ;

12° ni \bar{c}_{i-1} , ni \bar{c}_i ne sont réduits à un sommet (10); les extrémités de $\bar{\alpha}_i$ sont des sommets libres (9); $\bar{\alpha}_i$ est un segment (8). Les longueurs de \bar{c}_{i-1} et \bar{c}_i sont 2 ou 3 et l'une au moins est 3; en effet, nous avons :

$$\begin{aligned} l(\bar{c}_i) &\leq 3, & l(\bar{c}_{i-1}) &\leq 3 \quad (8), \\ l(\bar{c}_i) + l(\bar{c}_{i-1}) + l(\bar{\alpha}_i) + l(\bar{\alpha}'_i) &= 14 \quad (7), \\ l(\bar{\alpha}_i) &= 2, & l(\bar{\alpha}'_i) &\leq 7, \\ l(\bar{c}_i) + l(\bar{c}_{i-1}) &\geq 5. \end{aligned}$$

(Si $i = 1$, alors \bar{c}_0 n'est pas réduit à un sommet, \bar{c}_0 et \bar{c}_j sont confondus, K_{i-1} désigne K_j .)

Si un circuit frontière d'une face finie a pour extrémité initiale un sommet libre, alors il peut se mettre sous la forme $\bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 \dots \bar{\delta}_p$ où $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_p$ sont des segments et sa valeur est un élément de X_* ayant pour forme normale $\varphi(\bar{\delta}_1) \varphi(\bar{\delta}_2) \dots \varphi(\bar{\delta}_p)$.

Soit w la valeur du circuit frontière $\bar{\alpha}_i^{-1} \bar{c}_{i-1} \bar{\alpha}'_i \bar{c}_i^{-1}$ de K_i . Nous pouvons supposer que sa forme normale est une permutation circulaire de $axazxb^{-1}c$ ou de son inverse (2). Nous supposons que c'est une permutation circulaire de $axazxb^{-1}c$ (les autres cas se déduisent par symétrie).

13° nous démontrons par l'absurde que $l(\bar{c}_i) = 2$. Si $l(\bar{c}_i) = 3$, alors $\bar{c}_i = \bar{\delta} \bar{a}$, $\bar{\delta}$ étant un segment et \bar{a} un arc. La forme normale de w se termine par une pièce stricte extensible à gauche : $\varphi(\bar{\delta}^{-1})$. Reportons-nous au point 4 ci-dessus : w ne peut être que :

$$\begin{aligned} xazxb^{-1}ca, \\ caxazxb^{-1}, \\ axazxb^{-1}c. \end{aligned}$$

Nous éliminons successivement les trois cas :

$$14^\circ \quad w = xazxb^{-1}ca; \quad \varphi(\vec{\alpha}_i) = x^{-1}, \quad \varphi(\vec{\delta}) = a^{-1}.$$

La forme normale de $\varphi(\vec{c}_i \vec{\alpha}'_{i+1} \vec{c}_{i+1}^{-1} \vec{\alpha}_{i+1}^{-1})$ commence par a^{-1} suivi d'un élément de F_c . Elle n'est pas $a^{-1}c^{-1}bx^{-1}z^{-1}a^{-1}x^{-1}$ parce que M est réduit. Elle ne peut être que $a^{-1}cy^{-1}x^{-1}b^{-1}y^{-1}b^{-1}$. Comme $\vec{\alpha}_{i+1}$ comporte au moins un arc, la forme normale de $\varphi(\vec{\alpha}_{i+1} \dots \vec{\alpha}_j \vec{c} \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_i)$ commence par un élément de F_b . Elle finit par x^{-1} . Passons en revue les éléments de X_* : elle ne peut être que $b^{-1}y^{-1}b^{-1}a^{-1}cy^{-1}x^{-1}$. Enfin, comme $\vec{\alpha}_{i-1}$ comporte au moins un arc, la forme normale de $\varphi(\vec{\alpha}_{i-1} \vec{c}_{i-2} \vec{\alpha}'_{i-1} \vec{c}_{i-1}^{-1})$ commence par un élément de F_y ; comme \vec{c}_{i-1} comporte au moins un segment (12), elle finit par a^{-1} . Aucune forme normale d'élément de X_* ne remplit ces conditions.

$$15^\circ \quad w = caxazxb^{-1}; \quad \varphi(\vec{\alpha}_i) = c^{-1}, \quad \varphi(\vec{\delta}) = b.$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent

$$\varphi(\vec{c}_i \vec{\alpha}'_{i+1} \vec{c}_{i+1}^{-1} \vec{\alpha}_{i+1}^{-1}) = bxyz^{-1}aby;$$

$\varphi(\vec{\alpha}_{i+1} \dots \vec{\alpha}_j \vec{c} \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_i)$ commence par un élément de F_y et finit par c^{-1} . Ce n'est pas possible pour un élément de X_* ;

$$16^\circ \quad w = axazxb^{-1}c; \quad \varphi(\vec{\alpha}_i) = a^{-1}, \quad \varphi(\vec{\delta}) = c^{-1}.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{c}_i \vec{\alpha}'_{i+1} \vec{c}_{i+1}^{-1} \vec{\alpha}_{i+1}^{-1}) &= c^{-1}b^{-1}az^{-1}y^{-1}c^{-1}z^{-1}; \\ \varphi(\vec{\alpha}_{i+1} \dots \vec{\alpha}_j \vec{c} \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_i) \end{aligned}$$

commence par un élément de F_z et finit par a^{-1} . Ce n'est pas possible pour un élément de X_* ;

17° nous avons limité notre étude au cas suivant :

- le front de K_i n'est pas strictement majeur;
- w a pour forme normale une permutation circulaire de $axazxb^{-1}c$;
- $l(\vec{c}_i) = 2$.

Dans ce cas, \vec{c}_i est un segment et $l(\vec{c}_{i-1}) = 3$. La forme normale de $\varphi(\vec{c}_{i-1} \vec{\alpha}'_i \vec{c}_i^{-1} \vec{\alpha}_i^{-1})$ est comme celle de w une permutation circulaire de $axazxb^{-1}c$, et elle commence par une pièce stricte extensible à droite, donc elle ne peut être que $azxb^{-1}cax(4)$. La forme normale de $\varphi(\vec{\alpha}_{i-1} \vec{c}_{i-2} \vec{\alpha}'_{i-1} \vec{c}_{i-1}^{-1})$ finit par a^{-1} précédé d'un élément de F_z ; elle n'est pas $x^{-1}a^{-1}c^{-1}bx^{-1}z^{-1}a^{-1}$ parce que M est réduit. Elle ne peut

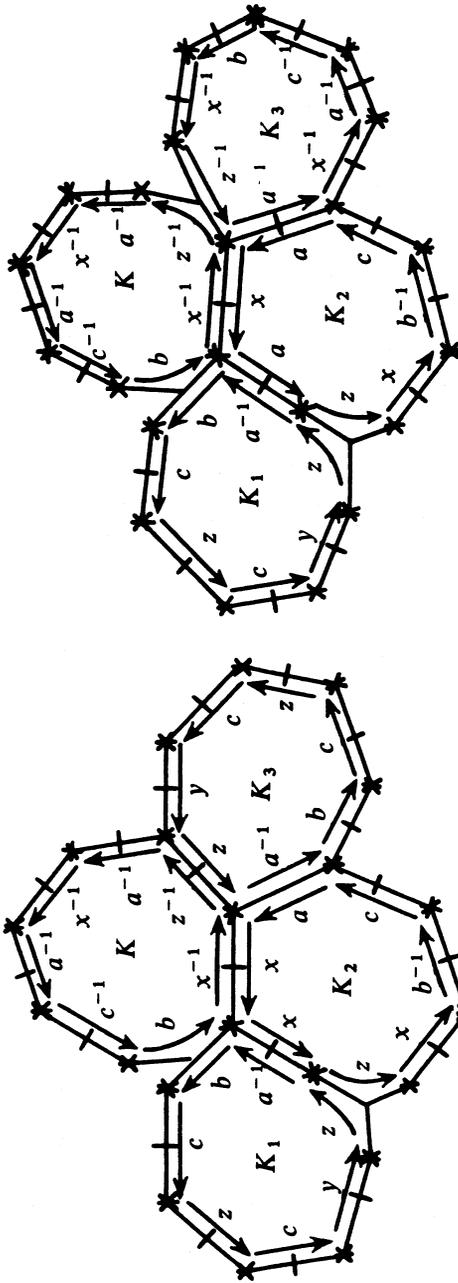


Fig. 11

être que $bczcyza^{-1}$. Considérons maintenant la forme normale de $\varphi(\bar{\alpha}_i \dots \bar{\alpha}_j \bar{c} \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{i-1})$: elle commence par $\varphi(\bar{\alpha}_i)$ c'est-à-dire x^{-1} et du fait que $\bar{\alpha}_{i-1}$ contient au moins un arc, elle finit par un élément de F_b . Elle est donc $x^{-1} z^{-1} a^{-1} x^{-1} a^{-1} c^{-1} b$. Alors la forme normale de $\varphi(\bar{c}_i \bar{\alpha}'_{i+1} \bar{c}_{i+1}^{-1} \bar{\alpha}_{i+1}^{-1})$ finit par un élément de F_z , d'autre part elle commence par $\varphi(\bar{c}_i)$, c'est-à-dire a^{-1} . Nous avons deux solutions possibles

$$a^{-1} bczcyz,$$

$$a^{-1} x^{-1} a^{-1} c^{-1} b x^{-1} z^{-1}.$$

Nous distinguons maintenant les cas $d(M)=4$ et $d(M)>4$.

18° si $d(M)=4$, alors M est l'un des X -diagrammes de la figure 11. où nous avons précisé la valeur des segments :

Les fronts de K, K_1 et K_3 sont strictement majeurs;

19° Si $d(M)>4$, alors M a un sous-graphe isomorphe à l'un des X -diagrammes ci-dessus. L'extrémité initiale de \bar{c}_{i-2} est un sommet lié, donc \bar{c}_{i-2} est réduit à un sommet (9), donc le front de K_{i-1} est strictement majeur (10).

Si $\varphi(\bar{c}_i \bar{\alpha}'_{i+1} \bar{c}_{i+1}^{-1} \bar{\alpha}_{i+1}^{-1}) = a^{-1} x^{-1} a^{-1} c^{-1} b x^{-1} z^{-1}$, alors l'extrémité initiale de \bar{c}_{i+1} est un sommet lié, \bar{c}_{i+1} est réduit à un sommet, le front de K_{i+1} est strictement majeur. L'une des autres faces de M doit être K_{i-2} ou K_{i+2} et son front est aussi strictement majeur.

Si $\varphi(\bar{c}_i \bar{\alpha}'_{i+1} \bar{c}_{i+1}^{-1} \bar{\alpha}_{i+1}^{-1}) = a^{-1} bczcyz$, alors \bar{c}_{i+1} n'est pas nécessairement réduit à un sommet. Pour montrer que le front de K_{i+1} est strictement majeur, nous raisonnons par l'absurde : s'il ne l'était pas, on aurait : $l(\bar{c}_{i+1})=3$; y serait une pièce stricte extensible à gauche par un élément de F_c . Ce n'est pas le cas (3). Le front de K_{i+1} est strictement majeur. Si $i-1 \neq 1$, alors K_{i-2} a un front strictement majeur; si $i-1=1$, alors K_j a un front strictement majeur (nous utilisons toujours le point 10).

Dans tous les cas, M a trois fronts strictement majeurs.

X vérifie la condition D' .

INDEX DES NOTATIONS

\mathcal{C}	complémentaire de la face infinie.....	288
C.R.	cycliquement réduit.....	307
D.R.	demi-réduit.....	308
$d(M), d(S)$	degré d'un graphe, d'un sommet.....	288
$d_x(w)$	degré de w par rapport à X	296
$l(R)$	longueur du mot R	298

$l(\bar{\alpha})$	longueur du chemin $\bar{\alpha}$	289
$p(K)$	périmètre de la face K	289
S.C.R.	strictement cycliquement réduit	307
S.R.	strictement réduit	308
X_0	symétrisé de X	308
X_*	pseudo-symétrisé de X	308
$ x , w $	longueur d'un élément	298, 307
$\varphi(\bar{a})$	valeur d'un arc	296
$\varphi(\bar{\gamma})$	valeur d'un chemin	296
$\Phi(\bar{\gamma})$	mot lu sur un chemin	299
$T \downarrow S$	T insertion S	303

INDEX TERMINOLOGIQUE

Arc	288
Arceau, arceau interne	289
Arête	288
Bout	289
Chemin élémentaire	289
Circuit élémentaire	289
Circuit frontière	288
Condition $C(k)$	298, 309
Condition $C'(1/k)$	298, 308
Condition $C''(1/6)$	303
Condition D	301
Condition D'	317
Condition $T(4)$	298, 309
Degré d'un élément par rapport à X	296
Degré d'un graphe, degré d'un sommet	288
Élément cycliquement réduit	307
Élément strictement cycliquement réduit	307
Éventail (X -diagramme en $-$)	317
Face, face finie	288
Face réciproque	296
Facteur correspondant à l'arc \bar{a}	310
Forme normale d'un élément	307
Front d'une face, front simple, front majeur	289
Fronts d'un graphe	289
Insertion	303
j -reste	300
Lobe	288
Mot lu sur un chemin	299
Partie consécutive	288
Pièce	297, 306
Pièce stricte extensible	323

Pré-arceau	288
Produit demi-réduit	306
Produit strictement réduit	306
Pseudo-symétrisé	306
Réajustement des valeurs	310
Réduit (graphe valué -)	296
Relateur	298
Relateur d'extension	323
Satellite	288
Segment d'un mot	300
Segment d'un X-diagramme	309
Sommet, sommet frontière, sommet interne	288, 289
Sommet libre, sommet lié	309
Sous-graphe, sous-graphe propre	286
Support	288
Symétrisé	298, 306
Système de compléments	300
Valeur d'un arc, d'un chemin	296
X-diagramme	297, 309

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE (C.). — *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [2] GREENDLINGER (M. D.). — On Dehn's algorithm for the word problem, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 67-83.
- [3] GREENDLINGER (M. D.). — On Dehn's algorithm for the word and conjugacy problems, with applications, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 13, 1960, p. 641-677.
- [4] GREENDLINGER (M. D.). — On the word problem and the conjugacy problem. *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Sér. Math.*, t. 29, 1965, p. 245-268.
- [5] LYNDON (R. C.). — On Dehn's algorithm, *Math. Ann.*, t. 166, 1966, p. 208-228.
- [6] LYNDON (R. C.) et SCHUPP (P. E.). — *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, 1977.
- [7] PERRAUD (J.). — Sur les conditions de petite simplification et l'algorithme de Dehn. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 284, série A, 1977, p. 659-662.
- [8] PERRAUD (J.). — Sur l'utilisation de l'algorithme de Dehn dans un produit libre, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 284, série A, 1977, p. 1341-1344.
- [9] PERRAUD (J.). — Sur les conditions de petite simplification qui permettent d'utiliser l'algorithme de Dehn, *Math. Z.*, t. 163, 1978, p. 133-143.
- [10] PETRESCO (J.). — Prégroupe des mots et problème des mots, *Séminaire Dubreil-Pisot*, 21^e année, 1967-1968, n° 17.
- [11] SCHUPP (P. E.). — On Greendlinger's Lemma, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 23, 1970, p. 233-240.
- [12] SCHUPP (P. E.). — A survey of small cancellation theory, *Studies in Logic and the foundations of mathematics*, n° 71, North-Holland, 1973.
- [13] SOLDATOVA (V. V.). — Solution of the word problem for certain class of groups, *Ivanov Gos. Ped. Inst. Učen. Zop.*, t. 44, 1969, vyp. math., p. 17-25.