LAWRENCE GRUMAN

Propriétés arithmétiques des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 421-440
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__421_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 421-440.

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR

LAWRENCE GRUMAN (*)

RÉSUMÉ. — Pour les fonctions entières ou méromorphes qui prennent des valeurs algébriques pour certains des entiers de Gauss $a+bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$, nous étudions des conditions de croissance qui entraînent que la fonction soit rationnelle ou polynôme.

ABSTRACT. — For entire or meromorphic functions which take on algebraic values for certain Gaussian integers, $a+bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$, we study growth conditions which imply that the function must reduce to a rational or polynomial function.

Soit $f(z)$ une fonction entière et posons :

$$M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

La fonction $f(z)$ est d'ordre fini ρ si :

$$\overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} = \rho < +\infty.$$

Si $f(z)$ est d'ordre fini $\rho \neq 0$, le type σ de $f(z)$ est donné par :

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Un théorème bien connu de G. Polya énonce qu'une fonction entière de type exponentiel (c'est-à-dire d'ordre 1 et type fini) inférieur à log 2 qui prend des valeurs entières aux entiers positifs se réduit à un polynôme (*cf.* C. PISOT [4] pour des résultats plus complets). Ce genre de résultat a été étendu aux fonctions entières qui prennent des valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}[i] = \{ a+bi : a, b \in \mathbb{Z} \}$ des entiers de Gauss en chaque point de $\mathbb{Z}[i]$. Avec la méthode de

(*) Texte reçu le 28 mai 1979, révisé le 25 février 1980.

Lawrence GRUMAN, U.E.R. de Mathématiques, Université de Provence, 3, place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

polynômes d'interpolation, S. FUKASAWA [1] a montré que si $f(z)$ possède cette propriété et est d'ordre inférieur à $1\,440/(919+27\sqrt{5})$ alors $f(z)$ est un polynôme. Plus tard, A. O. GEL'FOND [2], en améliorant la technique, a montré que si $f(z)$ possède cette propriété et est d'ordre 2 et de type inférieur à $\alpha=\pi/2(1+e^{164/\pi})^2$, *alors* $f(z)$ est un polynôme (ici, l'ordre est certainement le meilleur possible puisqu'il existe des fonctions entières non nulles d'ordre 2 qui s'annulent en chaque point de $\mathbb{Z}[i]$, mais le type obtenu, $\alpha<10^{-45}$, est clairement trop petit).

Avec une méthode différente basée sur une utilisation de la transformée de Fourier-Borel (*cf.* N. ARONSZAJN, [7]) pour les fonctions entières d'ordre 2 (le calcul fait a cette occasion a peut-être son intérêt propre) nous montrons que si $f(z)$ possède la propriété ci-dessus et est d'ordre 2 et de type inférieur à $\alpha=\pi/2\,e^{3,68}\,(1/26<\alpha<1/25)$ alors $f(z)$ est un polynôme. Le problème de base reste le calcul du plus petit multiple commun de certains entiers de Gauss et ici nous améliorons de beaucoup celui fait par M. Gel'fond. Avec la méthode des polynômes d'interpolation et ces améliorations, on trouverait une meilleure valeur de α que celle de M. Gel'fond bien que inférieure à celle que nous trouvons par notre méthode.

Dans un dernier paragraphe, en reprenant les méthodes de M. Waldschmidt [6], nous généralisons ces résultats au sens suivant : soit S un sous-ensemble de $\mathbb{Z}[i]$ tel que $\operatorname{card}[S\cap\{z : |z|<r\}]\geqslant\gamma_0 r^2$ pour $r\geqslant R_0$. Soient K un corps de nombres algébriques et $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions entières telles que pour $z\in S$ le quotient $\varphi(z)=f(z)g(z)^{-1}$ soit une valeur de K et vérifie :

$$\max_{z\in S,\,|z|<r}\{-\log|g(z)|,\, s(\varphi(z))\}\leqslant\gamma_1 r^2 \qquad \text{pour} \quad r>R_1.$$

On a noté :

$$s(\beta)=\max\{\log|\overline{\beta}|,\, \log d(\beta)\}$$

pour $\overline{\beta}$ parcourant les conjugués de β et d le dénominateur de β.

Alors il existe une constante α (effectivement calculable) telle que toute φ avec

$$(\star) \qquad \log\{\sup(M_f(r),\, M_g(r))\}\leqslant\alpha r^2 \qquad \text{pour} \quad r>R_3$$

soit une fonction rationnelle. Dans [6], la condition ($\star$) était remplacée par la condition plus forte :

$$\log\{\sup(M_f(r),\, M_g(r))\}\leqslant\frac{\tilde{\alpha} r^2}{\log r}.$$

Je tiens à remercier tout particulièrement M. François Gramain qui a lu le manuscrit avec soin, en y apportant beaucoup de corrections, dont de nombreuses non triviales et dont certaines ont permis une amélioration du résultat, et en y ajoutant beaucoup de suggestions qui rendent la lecture plus facile. Je voudrais remercier également M. Michel Waldschmidt qui a encouragé l'étude de ce problème.

1. Un analogue de la transformée de Fourier-Borel

Un outil fondamental dans les généralisations du théorème de Polya est la transformée de Fourier-Borel qui établit une bijection entre les fonctions de type exponentiel inférieur à α et les mesures de Radon à support contenu dans le disque de rayon α. Si μ est une mesure à support compact, sa transformée de Fourier-Borel classique ou d'ordre 1 est définie par :

$$f_\mu(\xi)=\int \exp \xi z \, d\mu(z).$$

Pour la définition de la transformation appliquée aux fonctions d'ordre quelconque $\rho>0$, *cf.* [8].

Nous allons développer les calculs pour les fonctions entières d'ordre 2.

Soient α un nombre réel, $0<\alpha<+\infty$, et $H(\alpha)$ l'espace de Hilbert des fonctions entières f telles que :

$$\|f\|^2=\frac{2\alpha}{\tau}\int_{\mathbf{C}} |f(\xi)|^2 \exp(-2\alpha|\xi|^2)\,d\lambda(\xi)<+\infty$$

(où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue). Si $f(\xi)=\Sigma_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n$ est le développement de Taylor à l'origine de la fonction $f(\xi)$ alors, la condition d'orthogonalité :

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta}\,d\theta=\delta mn,$$

entraîne :

$$(1)\qquad \|f\|^2=4\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} r^{2n+1}|C_n|^2 \exp(-2\alpha r^2)\,dr=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|C_n|^2 n!}{2^n\alpha^n}.$$

D'autre part, soit $\mathscr{H}^2(\sigma)$ l'espace de Hardy des fonctions $g(z)$ holomorphes dans le disque de rayon σ telles que l'on ait :

$$\|g\|^2 = lim_{r\to\sigma} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta < +\infty.$$

Si $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C'_n z^n$ est le développement de Taylor à l'origine de $g(z)$, alors il est bien connu que :

(2) $$\|g\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C'_n|^2 \sigma^{2n}.$$

Posons :

(3) $$P(\xi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n z^n}{(n!)^{1/2}}.$$

DÉFINITION. — Pour $g\in\mathscr{H}^2(\sigma)$, la transformée de Fourier-Borel d'ordre 2 de $g(z)$ est donnée par :

(4) $$F_g(\xi) = \langle P(\xi z), g(z)\rangle$$
$$= \lim_{r\to\sigma} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\xi re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{C}'_n \sigma^{2n}\xi^n}{(n!)^{1/2}}.$$

LEMME 1. — *L'application $g\to F_g$ établit une bijection antilinéaire isométrique entre $\mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$ et $H(\alpha/2)$.*

Démonstration. — Soit $g\in\mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$, d'après (4), on a :

$$F_g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{C}'_n \alpha^n \xi^n}{(n!)^{1/2}}.$$

D'après (1) dans $H(\alpha/2)$, on a :

$$\|F_g(\xi)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C'_n|^2 \alpha^n = \|g\|^2 < +\infty$$

donc $F_g(\xi)\in H(\alpha/2)$. D'autre part, si $f\in H(\alpha/2)$,

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n.$$

Posons :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n (n!)^{1/2}}{\alpha^n} z^n.$$

Alors on voit d'après (1) que $g(z)$ satisfait à (2) et d'après (4), on obtient $F_g(\xi)=f(\xi)$.

C.Q.F.D.

2. Fonctions entières qui envoient $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$

Ordonnons les entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ par module croissant et à module égal par argument croissant en sorte que :

$$\xi_0=0, \qquad \xi_1=1, \qquad \xi_2=i, \qquad \xi_3=-1,$$
$$\xi_4=-i, \ \ldots, \ |\xi_{n_{k-1}+1}|=\ldots=|\xi_{n_k}|=r_k, \ \ldots$$

et ainsi de suite. Posons $P_n(z)=P(\xi_n z)$ où P est défini par (3) ci-dessus de façon que, si $f\in H(\alpha/2)$ et $g\in \mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$ est l'image de f par la bijection donnée par le lemme 1, on ait :

$$\langle P(\xi_n z), g(z)\rangle = f(\xi_n).$$

Posons :

$$P_{n,m}(z)=\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_m^j z^j}{(j\,!)^{1/2}},$$

ce qui est P_m tronqué au degré $(n-1)$.

Le système d'équations :

$$\sum_{m=1}^{n} X_{m,n} P_{n,m}(z)=-1=-P_0(z)$$

s'écrit :

$$\sum_{m=1}^{n} X_{m,n}=-1, \qquad \sum_{m=1}^{n} X_{m,n}\frac{\xi_m^j}{(j\,!)^{1/2}}=0, \qquad j=1, \ldots, (n-1)$$

ou d'une façon équivalente :

$$\sum_{m=1}^{n} X_{m,n}=-1, \qquad \sum_{m=1}^{n} X_{m,n}\xi_m^j=0, \qquad j=1, \ldots, (n-1).$$

Son déterminant Δ est de Van der Monde :

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1 & & \xi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \ldots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\xi_j-\xi_i)\neq 0$$

et ainsi le système admet une solution unique :

$$X_{m,n}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_{m-1} & 0 & \xi_{m+1} & \dots & \xi_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_{m-1}^{n-1} & 0 & \xi_{m+1}^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(\pm 1)}{\Delta}\Pi_{j\neq m,\, 1\leqslant j\leqslant n}\xi_j \Pi_{1\leqslant i<j\leqslant n,\, i\neq m,\, j\neq m}(\xi_j-\xi_i)$$

$$=(\pm 1)\Pi_{j\neq m,\, 1\leqslant j\leqslant n}\xi_j \prod_{1\leqslant j\leqslant n,\, j\neq m}(\xi_m-\xi_j)^{-1}$$

$$=(\pm 1)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\xi_j \Pi_{0\leqslant j\leqslant n,\, j\neq m}(\xi_m-\xi_j)^{-1}.$$

Posons :

$$\alpha_{m,n}=\prod_{0\leqslant j\leqslant n,\, j\neq m}(\xi_m-\xi_j)$$

de sorte que :

$$X_{m,n}=(\pm 1)\frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{m,n}}$$

et soit β_n le plus petit multiplie commun (dans $\mathbb{Z}[i]$) des $\alpha_{m,n}(m\leqslant n)$. Posons finalement :

$$S_n(z)=\frac{\beta_n}{\alpha_{0,n}}[\textstyle\sum_{m=0}^{n} X_{m,n}P_m(z)+1].$$

LEMME 2. — *Supposons que $\alpha<\pi$ soit si petit que $\lim_{n\to\infty}\|S_n(z)\|=0$ dans $\mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$. Si $f(\xi)\in H(\alpha/2)$ envoie $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$, alors f est un polynôme.*

Nous montrerons par la suite avec l'aide de quelques lemmes arithmétiques que si α est assez petit, les hypothèses du lemme sont réalisées.

Démonstration. — Soit $g\in\mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$ la fonction dont f est la transformée de Fourier-Borel d'ordre 2. Par construction de S_n, on a $\langle S_n(z), g(z)\rangle\in\mathbb{Z}[i]$ ce qui entraîne $\langle S_n(z), g(z)\rangle=0$ pour $n\geqslant n_0$ parce que les $S_n(z)$ convergent vers zéro. Posons :

$$T_{n_0}(z)=\textstyle\sum_{j=0}^{n_0-1} a_j z^j,$$

où les a_j sont choisis de sorte que l'on ait :

$$\langle P_m(z), T_{n_0}(z)\rangle = \langle P_m(z), g(z)\rangle \qquad \text{pour} \quad m \leqslant n_0 - 1$$

(ce qui équivaut à résoudre le système :

$$\textstyle\sum_{j=0}^{n_0-1} \dfrac{a_j \xi_m^j \alpha^j}{(j\,!)^{1/2}} = \langle P_m(z), g(z)\rangle$$

et ce dernier admet toujours une solution parce que le déterminant n'est pas nul). Posons encore :

$$\tilde{g}(z) = g(z) - T_{n_0}(z).$$

Par construction, nous avons :

$$S_n(z) = \textstyle\sum_{j=n}^{\infty} b_j^{(n)} z^j$$

ce qui donne $\langle S_n(z), T_{n_0}(z)\rangle = 0$ pour $n \geqslant n_0$ par l'orthogonalité des z^j dans $\mathscr{H}^2(\sqrt{\alpha})$. Ainsi on voit que $\langle S_n(z), \tilde{g}(z)\rangle = 0$ pour $n \geqslant n_0$. D'autre part on a $\langle P_m(z), \tilde{g}(z)\rangle = 0$ pour $m \leqslant n_0 - 1$ et on montre facilement par récurrence $\langle P_m(z), \tilde{g}(z)\rangle = 0$ quel que soit m. Soit $\tilde{f}(\xi) = F_{\tilde{g}}(\xi)$ donnée par (4). Ainsi $\tilde{f}(\xi)$ est d'ordre 2 et de type inférieur à $\pi/2$ et s'annule en chaque point de $\mathbb{Z}[i]$. Si $n(t)$ est le nombre de zéros de $\tilde{f}(\xi)$ (avec multiplicités) dans le disque de rayon t et si $\tilde{f}(\xi) \not\equiv 0$, la formule de Jensen donne :

$$\int_0^r [n(t) - n(0)] \frac{dt}{t} \leqslant (\pi/2 - \delta) r^2$$

pour un $\delta > 0$ et r assez grand. Mais on a d'autre part $n(t) \geqslant \pi(t-2)^2 - C$ et ainsi pour r grand on aurait :

$$\int_0^r (n(t) - n(0)) \frac{dt}{t} > (\pi/2 - \delta) r^2$$

et une contradiction. Donc on a bien $\tilde{f}(\xi) \equiv 0$ ce qui entraîne $\tilde{g}(z) \equiv 0$ d'où $g(z) = T_{n_0}(z)$ et d'après (4) $\tilde{f}(\xi)$ est un polynôme.

C.Q.F.D.

Il s'agit alors de majorer les β_n.

LEMME 3. — *Soient D_1 et D_2 deux disques de rayon r dans le plan complexe et $A_j(r)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}[i]$ situés dans D_j, $j=1, 2$. Alors :*

$$|A_1(r)-A_2(r)| \leqslant (2+\sqrt{2})r+2.$$

Démonstration. — Soit (x_j, y_j) les centres de deux disques. Quitte à faire une translation et une rotation au besoin, on peut supposer :

$$0 \leqslant y_2-y_1 \leqslant x_2-x_1 \leqslant 1/2.$$

Soit

$$D'_1 = D_1 + (x_2-x_1, 0).$$

En translatant D_1 en D'_1 on perd au plus un point de $\mathbb{Z}[i]$ sur chaque droite $y=n \in \mathbb{Z}$ qui coupe D_1. Soit S l'ensemble des droites qui coupe D_1 sur lesquelles on ne perd aucun point et s son cardinal, et soit $A'_1(r)$ le cardinal de $D'_1 \cap \mathbb{Z}[i]$.

On a :

$$A'_1(r) \geqslant A_1(r)-(2r+1)+s.$$

Considérons les droites $x=n$, $n \in \mathbb{Z}$ avec $x_2-r \leqslant n \leqslant x_2-r/\sqrt{2}$, c'est-à-dire celles qui coupent σ (*voir* le dessin). Si sur une de ces droites on perd un point $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}[i]$ en passant de D'_1 à D_2 c'est que sa distance verticale à σ est 1/2 au

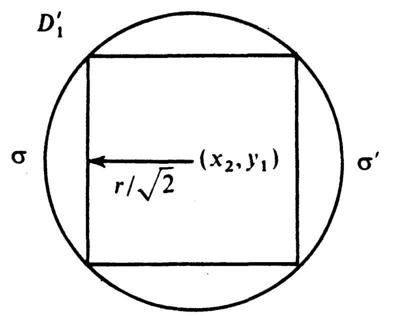

Fig. 1

plus. Or sa distance horizontale à σ est inférieure à sa distance verticale, donc inférieure à 1/2 et ainsi quand on est passé de D_1 à D'_1 on n'a pas perdu de point sur $y=\eta$, c'est-à-dire $\{y=\eta\} \in S$ et sur ces droites, on perd au plus s points. D'autre part, considérons des droites $x=n$, $n \in \mathbb{Z}$ avec

$x_2+r/\sqrt{2}\leqslant n\leqslant x_2+r$, c'est-à-dire celles qui coupent σ' (*voir* dessin). Si sur une de ces droites on perd un point $(\xi, \eta)\in\mathbb{Z}[i]$, c'est que (y_2-y_1) est supérieur à sa distance verticale à σ' et ainsi (x_2-x_1) est supérieur à sa distance horizontale à σ'. C'est donc un point qui est rentré en passant de D_1 à D'_1 et ainsi ne rentre pas dans les points à compter. On a alors :

$$A_2(r)\geqslant A'_1(r)-\sqrt{2}r-1-s\geqslant A_1(r)-(2+\sqrt{2})r-2.$$

C.Q.F.D.

LEMME 4. — *Soit* β_{n_k} *le plus petit multiple commun des* α_{m,n_k}, $m\leqslant n_k$. *Alors il existe* $\gamma_k\in\mathbb{Z}[i]$ *avec* $|\gamma_k|\leqslant C\exp 5{,}635\, r_k^2$ *tel que* β_{n_k} *divise* $\alpha_{0,n_k}\gamma_k$.

Démonstration. — On a :

$$\alpha_{m,n_k}=\prod\nolimits_{n\neq m,\,|\xi_n|\leqslant r_k}(\xi_m-\xi_n)$$

et $(\xi_m-\xi_n)$ est un entier de Gauss contenu dans le disque $|\xi-\xi_n|\leqslant r_k$ qui est à son tour contenu dans le disque $|\xi|\leqslant 2r_k$. Soit $\beta_{n_k}=\prod q^{t_q}$ où q parcourt tous les nombres premiers de $\mathbb{Z}[i]$ avec $|q|\leqslant 2r_k$. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ étant factoriel [3] ce produit est unique à une unité près. Posons pour chaque nombre premier q :

$$\delta_q=\left[\frac{\log r_k}{\log|q|}\right]$$

(où [ ] représente « la partie entière ») et :

$$\begin{aligned}A(m, l, q)&=\operatorname{card}\{\xi\in\mathbb{Z}[i] : |q^l\xi-\xi_m|\leqslant r_k\}-1\\&=\operatorname{card}\{\xi\in\mathbb{Z}[i] : |\xi-\xi_m/q^l|\leqslant r_k|q|^{-l}\}-1\end{aligned}$$

ce qui est le nombre de multiples non nuls de q^l dans le disque $|\xi-\xi_m|\leqslant r_k$.

Pour qu'un disque dans le plan complexe contienne trois points de $\mathbb{Z}[i]$ il faut qu'il ait un rayon d'au moins $1/\sqrt{2}$ et ainsi on obtient :

$$A(m, 1, q)\leqslant 1 \qquad \text{pour} \qquad \sqrt{2}r_k<|q|\leqslant 2r_k.$$

Pour qu'un disque contienne cinq points, il faut qu'il ait un rayon d'au moins 1 et ainsi on obtient :

$$A(m, 1, q)\leqslant 3 \qquad \text{pour} \qquad r_k<|q|\leqslant\sqrt{2}r_k.$$

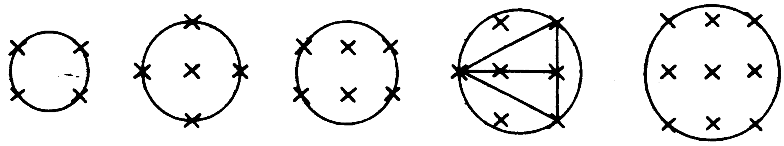

Fig. 2

Pour qu'un disque contienne six points, il faut ait un rayon d'au moins $\sqrt{5}/2$ et ainsi on obtient :

$$A(m, 1, q)\leqslant 4 \qquad \text{et} \qquad A(0, 1, q)=4 \qquad \text{pour} \quad 2\,r_k/\sqrt{5} < |\,q\,| \leqslant r_k.$$

Pour qu'un disque contienne sept points, il faut qu'il contienne un triangle isocèle de base 2 et de côté $\sqrt{5}$ et ainsi le cercle circonscrit dont le rayon est $5/4$ et ainsi on obtient :

$$A(m, 1, q)\leqslant 5 \qquad \text{pour} \quad 4\,r_k/5 < |\,q\,| \leqslant 2\,r_k/\sqrt{5}.$$

Pour qu'un disque contienne huit points, il faut qu'il ait un rayon d'au moins $\sqrt{2}$ (en ce cas, il peut contenir neuf points) et ainsi on obtient :

$$A(m, 1, q)\leqslant 6 \qquad \text{pour} \quad r_k/\sqrt{2} < |\,q\,| \leqslant 4\,r_k/5.$$

Posons :

$$\tilde{\beta}_k=\prod_{j=1}^{6} I_j \qquad \text{avec} \quad I_1=\prod_q q^{\sum A(0,\,l,\,q)},$$

$$I_2=\prod_{\sqrt{2}r_k<|q|\leqslant 2r_k} q, \qquad I_3=\prod_{r_k<|q|\leqslant\sqrt{2}r_k} q^3,$$

$$I_4=\prod_{4\,r_k/5<|q|\leqslant 2\,r_k/\sqrt{5}} q,$$

$$I_5=\prod_{r_k/\sqrt{2}<|q|\leqslant 4r_k/5} q^2 \qquad \text{et} \qquad I_6=\prod_{|q|\leqslant r_k/\sqrt{2}} q^{2\delta_q+\sum_l (2+\sqrt{2})r_k/|q|^l}.$$

Alors β_{n_k} divise $\tilde{\beta}_k$ et l'on voit aisément que I_1 n'est autre que $\alpha_{0,\,n_k}$, donc β_{n_k} est un facteur de $\alpha_{0,\,n_k}\gamma_k$, où $\gamma_k=\prod_{j=2}^{6} I_j$. Nous allons majorer le module de γ_k.

Si $p\in \mathbf{Z}$ est un nombre premier de la forme $4n+3$ alors p reste premier dans $\mathbf{Z}[i]$ tandis que si p est de la forme $4n+1$, p se factorise dans $\mathbf{Z}[i]$ comme produit $q\bar{q}=p$ [3]. Posons :

$$\pi_1(x)=\text{card}\{\,p \text{ premier dans } \mathbf{Z},\ p\leqslant x,\ p\equiv 1 \bmod 4\,\}$$

et

$$\pi_3(x)=\text{card}\{\, p \text{ premier dans } \mathbb{Z},\ p\leqslant x,\ p\equiv 3 \bmod 4\,\}.$$

Alors on a :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_1(x)}{x/\log x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi_3(x)}{x/\log x}=1/2 \qquad \text{([5], Satz 7.5).}$$

Ainsi si $\varepsilon>0$ est arbitraire on obtient :

$$\begin{aligned}|I_2|&=\textstyle\prod_{2r_k<|q|\leqslant 2r_k}|q|\\ &\leqslant \exp\Big\{(\log 4r_k^2)\frac{1}{2}\Big(\frac{4r_k^2}{\log(4r_k^2)}-\frac{2r_k^2}{\log(2r_k^2)}\Big)\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\ &\quad+(\log 2r_k)\frac{1}{2}\Big(\frac{2r_k}{\log(2r_k)}-\frac{\sqrt{2}r_k}{\log(\sqrt{2}r_k)}\Big)\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big\}\\ &\leqslant \exp r_k^2(1+\varepsilon) \qquad \text{pour } k\geqslant k_1(\varepsilon).\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient :

$$|I_3|\leqslant \exp 3/2\, r_k^2(1+\varepsilon) \qquad \text{pour } k\geqslant k_2(\varepsilon),$$
$$|I_4|\leqslant \exp .080\, r_k^2(1+\varepsilon) \qquad \text{pour } k\geqslant k_3(\varepsilon),$$
$$|I_5|\leqslant \exp .140\, r_k^2(1+\varepsilon) \qquad \text{pour } k\geqslant k_4(\varepsilon).$$

Par ailleurs, on a $|q^{\delta q}|\leqslant 2r_k$ ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}&\textstyle\prod_{|q|\leqslant r_k/\sqrt{2}}|q|^{2\delta q}\\ &\quad\leqslant \exp 2(\log 2r_k)(\pi_1(r_k^2/2)+\pi_3(r_k/\sqrt{2}))\\ &\quad\leqslant \exp .500\, r_k^2(1+\varepsilon) \qquad \text{pour } k\geqslant k_5(\varepsilon)\end{aligned}$$

et

$$\textstyle\prod_{|q|\leqslant r_k/\sqrt{2}}|q|^{\sum_t(2+\sqrt{2})r_k/|q|^t}\leqslant \exp\Big(\sum_{|q|\leqslant r_k/\sqrt{2}}\frac{\log|q|}{|q|-1}\Big)(2+\sqrt{2})r_k.$$

Posons :

$$\begin{aligned}\sum_{|q|\leqslant r_k/\sqrt{2}}\frac{\log|q|}{|q|-1}&=\sum_{p\leqslant r_k/\sqrt{2},\ p\equiv 3 \bmod 4}\frac{\log p}{p-1}\\ &\quad+2\sum_{p\leqslant r_k^2/2,\ p\equiv 1 \bmod 4}\frac{\log p^{1/2}}{p^{1/2}-1}=S_1+S_2.\end{aligned}$$

Un calcul facule montre que

$$S_2 = \int_1^{r_k^2/2} \frac{\log x}{x^{1/2}-1} d\pi_1(x) = \frac{\pi_1(x)\log x}{(x^{1/2}-1)}\Big]_1^{r_k^2/2}$$

$$+\frac{1}{2}\int_1^{r_k^2/2} \frac{\pi_1(x)\log x}{x^{1/2}(x^{1/2}-1)^2} - \int_1^{r_k^2/2} \frac{\pi_1(x)\,dx}{x(x^{1/2}-1)}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) r_k/\sqrt{2} \qquad \text{pour} \quad k \geqslant k_6(\varepsilon).$$

De la même façon on a $S_1 = O(r_k^{1/2})$, donc pour $k \geqslant k(\varepsilon)$ on obtient $|\gamma_k| \leqslant \exp 5{,}635\, r_k^2$ (où le ε a été absorbé dans l'approximation des valeurs des coefficients de r_k^2).

C.Q.F.D.

LEMME 5. — *Soit* $\xi \in \mathbb{Z}[i]$ *et :*

$$\alpha_m^k(\xi) = \prod_{\xi_n \neq \xi_m,\, |\xi_n| \leqslant r_k} (\xi - \xi_n).$$

Alors il existe $\tilde{\gamma}_k \in \mathbb{Z}[i]$ *qui ne dépend que de k tel que*

$$\alpha_{0,\, n_k} = \prod_{|\xi_n| \leqslant r_k,\, \xi_n \neq 0} \xi_n$$

divise $\tilde{\gamma}_k \alpha_m^k(\xi)$ *et* $\tilde{\gamma}_k$ *satisfait à la majoration* $|\tilde{\gamma}_k| \leqslant C \exp 4{,}915\, r_k^2$.

Démonstration. — Posons :

$$B(\xi, l, q) = \operatorname{card}\{\xi' \in \mathbb{Z}[i] : |q^l \xi' - \xi| \leqslant r_k\}.$$

Le lemme 3 montre que :

$$A(0, l, q) \leqslant B(\xi, l, q) + (2+\sqrt{2}) r_k / |q|^l + 3.$$

Alors, si l'on pose :

$$\tilde{\gamma}_k = \prod_{|q| \leqslant r_k} q^{\sum_l (2+\sqrt{2}) r_k / |q|^l + 3\delta_q},$$

il est clair que $\alpha_{0,\, n_k}$ est un diviseur de $\tilde{\gamma}_k \alpha_m^k(\xi)$ quel que soit ξ et comme dans le lemme 4, on montre que :

$$|\tilde{\gamma}_k| \leqslant C_\varepsilon \exp(3/2 + (2+\sqrt{2}) + \varepsilon) r_k^2 \leqslant C \exp 4{,}915\, r_k^2.$$

C.Q.F.D.

LEMME 6. — *Supposons $m \leqslant n$ et $n_{k-1} \leqslant n \leqslant n_k$ et posons $\delta = |\xi_m / r_k|$. Alors :*

$$\text{(i)}\quad |\alpha_{m,n}| = \exp\left\{\pi r_k^2 \log r_k + r_k^2 \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \log(x^2+(y+\delta)^2)^{1/2}\, dx\, dy + O(r_k \log r_k)\right\}$$

uniformément en m.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a la majoration :

$$\text{(ii)}\quad \left|\prod_{i \neq m,\, |\xi_i| \leqslant \eta} (z - \xi_i)\right| \leqslant \left(\exp\left\{\pi\eta^2 \log \eta + \eta^2 \log\left(\frac{|z|}{\eta} + 1\right) + O(\eta) + O(\eta \log |z|)\right)\right\}.$$

Démonstration. — Soit $\xi_s \in \mathbb{Z}[i]$ et posons :

$$A_s = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x - \mathcal{R}e\, \xi_s| \leqslant 1/2,\ |y - \operatorname{Im} \xi_s| \leqslant 1/2\},$$
$$D_{m,k} = \{z : |z - \xi_m| \leqslant r_k\}.$$

Quitte à multiplier par un facteur de l'ordre de $\exp O(r_k \log r_k)$ (uniforme en m), on peut remplacer $\alpha_{m,n}$ par α_{m,n_k}. D'après le théorème de la moyenne, nous avons :

$$\left|\log|\xi_s| - \int_{A_s} \log|z|\, dx\, dy\right| \leqslant \frac{1/\sqrt{2}}{(|\xi_s| - 1/\sqrt{2})} \qquad \text{pour} \quad s \neq 0$$

et ainsi nous avons :

$$\left|\sum_{\xi_s \in D_m,\, s \neq 0} \log|\xi_s| - \sum_{\xi_s \in D_m,\, s \neq 0} \int_{A_s} \log|z|\, dx\, dy\right| \leqslant O(r_k)$$

uniformément en m. De plus on a :

$$\left|\sum_{\xi_s \in D_m} \int \log|z|\, dx\, dy - \int_{D_m} \log|z|\, dx\, dy\right| \leqslant O(r_k \log r_k)$$

uniformément en m. Si $D'_m = \{ z/r_k : z \in D_m \}$, on a :

$$\int_{D_m} \log|z|\,dx\,dy = r_k^2 \int_{D'_m} \log(r_k|z|)\,dx\,dy$$

$$= \pi r_k^2 \log r_k + r_k^2 \int_{x^2+y^2 \leqslant 1} \log(x^2+(y+\delta)^2)^{1/2}\,dx\,dy$$

ce qui montre (i) et la majoration (ii) se montre de la même façon.

C.Q.F.D.

LEMME 7. — *La fonction :*

$$\delta^\pi \exp\left(- \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \log(x^2+(y+\delta)^2\right)^{1/2} dx\,dy$$

de la variable δ *est croissante sur* [0, 1].

Démonstration. — Soit :

$$f(\delta) = \pi \log \delta - \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \log(x^2+(y+\delta)^2)^{1/2}\,dx\,dy$$

de sorte que l'on ait :

$$f'(\delta) = \pi/\delta - \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} \frac{(y+\delta)}{x^2+(y+\delta)^2}\,dx\,dy$$

$$= \pi/\delta - 1/2 \int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{x^2+(\sqrt{1-x^2}+\delta)^2}{x^2+(-\sqrt{1-x^2}+\delta)^2} \right) dx$$

$$= \pi/\delta - 1/2 \int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{(\delta+1)^2 - 2(1-\sqrt{1-x^2})}{(\delta-1)^2 + 2(1-\sqrt{1-x^2})} \right) dx$$

ce qui est décroissante et prend son minimum sur l'intervalle [0, 1] en $\delta = 1$. D'autre part on voit aisément que :

$$1/2 \int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{4-2(1-\sqrt{1-x^2})}{2(1-\sqrt{1-x^2})} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 2 \int_0^1 \log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) dx.$$

Un calcul facile montre que :

$$\int_0^1 \log x = -1$$

et :

$$\int_0^1 \log(1+\sqrt{1-x^2})\,dx$$

$$= x\log(1+\sqrt{1-x^2})\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= [\theta - \sin\theta]_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1$$

et ainsi nous obtenons $f'(1)=0$.

C.Q.F.D.

LEMME 8. — *Pour k assez grand et pour $n_{k-1} < n \leqslant n_k$ on a :*

$$\sum_{m=1}^{n} \left|\frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{m,n}}\right| \frac{|\xi_m|^{n+l}}{[(l+n)\,!]^{1/2}} \leqslant \pi^{-n_k/2} \exp(1{,}84)\, n_k$$

quel que soit l.

Démonstration. — On a :

$$|\xi_m| \leqslant r_k < n^{1/2}, \qquad n_k = \pi r_k^2 - O(r_k), \qquad \delta_m = \frac{|\xi_m|}{r_k} \leqslant 1$$

donc on a :

$$\frac{|\xi_m|^{n+l}}{[(n+2)\,!]^{1/2}} \leqslant \frac{|\xi_m|^n}{(n\,!)^{1/2}} = \frac{\delta_m^n r_k^n}{(n\,!)^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{(\delta_m r_k)^{n_k}}{(n_k\,!)^{1/2}} \exp O(r_k \log r_k)$$

$$\leqslant \delta_m^{n_k} \pi^{-n_k/2} \frac{(\pi^{1/2} r_k)^{n_k}}{([\pi r_k^2]\,!)^{1/2}} \exp O(r_k \log r_k).$$

D'après la formule de Stirling on a :

$$n\,! = \sqrt{2\pi} \exp\{(n+1/2)\log n - n\}(1+1/12n + O(1/n)),$$

d'où :

$$[\pi r_k^2]! \geqslant C \exp\{\pi r_k^2 \log \pi r_k^2 - \pi r_k^2 + O(r_k \log r_k)\}.$$

D'après les lemmes 4 et 6, nous avons :

$$|\beta_{n_k}| \leqslant \exp\{\pi r_k^2 \log r_k - \pi r_k^2/2 + 5{,}635 r_k^2 + O(r_k \log r_k)\}$$

et d'après les lemmes 6 et 7 nous avons :

$$\delta^{n_k} |\alpha_{m,n}|^{-1} \leqslant exp\Big\{ -\pi r_k^2 \log r_k - r_k^2 \times \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \log(x^2+(y+1)^2)^{1/2}\, dx\, dy + O(r_k \log r_k)\Big\}.$$

Posons :

$$A = \{z = x+iy : x^2+y^2 \leqslant 1,\ x^2+(y+1)^2 \leqslant 1\},$$
$$B = \{z : |z| \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$
$$C = \{z : |z| < 1,\ z \notin A \cup B\}.$$

Alors nous avons :

$$\iint_B \log(x^2+(y+1)^2)^{1/2}\, dx\, dy = \iint_B \frac{1}{2}\log(r^2+2y+1)\, dx\, dy$$
$$= 1/2 \Big\{ \iint_B \log(r^2+1)\, r\, dr\, d\theta + \iint_B \log\Big(1+\frac{2y}{r^2+1}\Big) dx\, dy \Big\} = I_1 + I_2.$$

Une intégration par parties nous montre que :

$$I_1 = \pi/2 \int_0^1 r \log(r^2+1)\, dr = \pi/4\,[(r^2+1)(\log(r^2+1)-1)]_0^1 = \pi/2(\log 2 - 1/2).$$

Nous avons aussi :

$$\log(1+x) \geqslant x(1-x/2+x^2/3-x^3/4) \qquad \text{pour} \quad x \leqslant 1$$

et $1-x/2+x^2/3-x^3/4$ décroît quand x augmente, donc nous obtenons :

$$\log(1+x) \geqslant 7x/12 \qquad \text{pour} \quad x \leqslant 1$$

et :

$$I_2 \geqslant \frac{1}{2}\iint_{y\geqslant 0,\, x^2+y^2\leqslant 0} 7/12 \frac{2y}{(x^2+y^2+1)}\, dy\, dx$$

$$= 7/24 \int_{-1}^{+1} \log(x^2+y^2+1)_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\geqslant 7/24 \int_{-1}^{+1} (\log 2 - \log(x^2+1))\, dx$$

$$= 7/24 (2\log 2 - (x\log(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1} x)_{-1}^{+1})$$

$$\geqslant 7/12 (\log 2 - (\log 2 - 2 + \pi/2)) = 7/12(2-\pi/2).$$

En plus on a :

$$\int_A \int \log(x^2+(y+1)^2)^{1/2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^1 (\log r)\, r\, dr\, d\theta - \int_C \int (\log r)\, dx\, dy = -\pi/4 - I_3.$$

Posons $B(0, r) = \{ z : |z| \leqslant r \}$. Alors $\partial B(0, r)$ rencontre ∂A en deux points où $y = -r^2/2$, et puisque la sécante est inférieure à son argument, on voit que :

$$-I_3 \geqslant -2 \int_0^1 (\log r)\, r^3/2\, dr = 1/16.$$

De la même façon, puisque $\log(1+x) \geqslant 7/12\, x$, on obtient :

$$1/2 \iint \log(r^2+2y+1)\, dx\, dy$$

$$\geqslant \int_0^1 \int_0^{r^2/2} 7/12 (r^2 - 2r\sin\theta)\, d\theta\, r\, dr$$

$$\geqslant 7/12 \int_0^1 \int_0^{r^2/2} (r^2 - 2r\theta)\, d\theta\, r\, dr = 7/12(1/12 - 1/28) = 1/36.$$

Réunissant toutes ces majorations, nous obtenons :

$$\delta_m^{n_k} \left| \frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{m,n}} \right| \leqslant \exp\{ (-\pi/2 - \pi/2(\log 2 - 1/2) - 7/12(2-\pi/2)$$

$$+ \pi/4 - 1/16 - 1/36 + 5{,}635) r_k^2 + O(r_k \log r_k) \}$$

c'est-à-dire :

$$\delta_m^{n_k}\left|\frac{\beta_{n_k}}{\alpha_{m,n}}\right| \leqslant \exp\{4{,}206\, r_k^2 + O(r_k \log r_k)\} \leqslant \exp\{1{,}339\, n_k + O(n_k^{1/2}\log n_k)\}$$

et on somme moins de n_k termes d'où la majoration.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction entière d'ordre 2 et de type $\alpha<\pi/2e^{-3,68}$ telle que f envoie $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Z}[i]$. Alors f est un polynôme.*

Démonstration. — Si f est d'ordre 2 et de type $\tau<\pi/2e^{-3,68}$ alors on a $f\in H(\pi/2e^{-3,68})$. Si $S_n(z)$ est la somme associée à f, le lemme 8 montre :

$$|S_n(z)|\leqslant \sum_{l\geqslant 0}|z|^{l+n}\pi^{-n_k/2}\exp 1{,}84\, n_k.$$

Le second membre tend uniformément vers zéro dès que $|z|<\pi^{1/2}\exp-1{,}84$ donc $S_n(z)$ converge vers zéro dans $\mathscr{H}^2(\pi^{1/2}\exp-1{,}84)$ et le lemme 2 montre que alors que f est un polynôme.

C.Q.F.D.

3. Le théorème de Fukasawa-Gel'fond par la méthode de Schneider-Waldschmidt

La condition $f(\mathbb{Z}[i])\subset\mathbb{Z}[i]$ est trop contraignante et nous voudrions l'assouplir quelque peu en permettant à f de prendre des valeurs dans un ensemble plus grand et ceci simplement sur des sous-ensembles de $\mathbb{Z}[i]$ avec une densité asymptotique. Pour accomplir cette tâche, nous reprenons des techniques de M. Waldschmidt [6], où un énoncé plus faible est démontré.

THÉORÈME 2. — *Soit K un corps de nombres algébriques contenant $\mathbb{Z}[i]$ avec $[K:Q]=\delta<+\infty$. Soit $S\subset\mathbb{Z}[i]$ vérifiant* $\operatorname{card}\{S\cap B(0,r)\}\geqslant\gamma_0 r^2$ *pour r assez grand. Il existe une constante $\alpha>0$ (qui ne dépend que de δ, γ_0 et γ_1) telle que si f et g sont deux fonctions entières d'ordre 2 et de type inférieur à α et si l'on pose $\varphi=fg^{-1}$:*

(i) $\qquad g(\xi)\neq 0, \qquad \varphi(\xi)\in K \qquad$ *pour* $\xi\in S;$

(ii) $\max_{\xi\in S\cap B(0,r)}\left\{\dfrac{1}{|g(\xi)|};\, s(\varphi(\xi))\right\}\leqslant\gamma_1 r^2 \qquad$ *pour* r *grand,*

alors φ est une fonction rationnelle.

Démonstration. — Nous n'avons que des modifications mineures à apporter à la démonstration du théorème 1 du [6] et ainsi nous n'indiquons que les changements nécessaires en renvoyant le lecteur à cette publication pour une démonstration complète.

Choisissons $S_0 > 2\delta/\gamma_0$ (ce qui correspond au k_0 de [6]) et h_0 réel avec $\gamma_0 > h_0^2 \geqslant 2\delta/S_0$ et posons :

$$F(z) = \sum_{|\xi_m| \leqslant h_0 n} \sum_{0 \leqslant s \leqslant S_0} a_{h,s} h_m(z) \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right)^s,$$

où :

$$h_m(z) = \gamma_k \tilde{\gamma}_k \frac{\prod_{i \neq m, |\xi_i| \leqslant h_0 n} (z - \xi_i)}{\prod_{i \neq m, |\xi_i| \leqslant h_0 n} (\xi_m - \xi_i)} \qquad \text{avec} \quad \gamma_k \text{ et } \tilde{\gamma}_k$$

définis par les lemmes 4 et 5 pour $r_k \leqslant h_0 n < r_{k+1}$ (donc $h_m(z) \in \mathbb{Z}[i]$ pour $z \in \mathbb{Z}[i]$) et les $a_{h,s}$ sont des entiers choisis en sorte que l'on ait $F(\xi) = 0$ pour $\xi \in S \cap B(0, n)$ et $\log |a_{h,s}| \leqslant c_1 r_k^2$, où c_1 dépend de γ_0, γ_1, h_0 et S_0.

Par le lemme 6 nous avons :

$$\left|\prod_{i \neq m, |\xi_i| \leqslant h_0 n} (z - \xi_i)\right| \leqslant \exp\left\{ \pi (h_0 n)^2 \log h_0 n + (h_0 n)^2 \log\left(\frac{|z|}{h_0 n} + 1 \right) + O(n \log |z|) \right\}$$

uniformément en $|z|$, donc nous obtenons :

$$|h_m(z)| \leqslant \exp\left\{ 10{,}550 (h_0 n)^2 + (h_0 n)^2 \left(\pi/2 + \log\left(\frac{|z|}{h_0 n} + 1 \right) \right) + O(n \log |z|) \right\}.$$

La fin de la démonstration se fait maintenant comme dans [6].

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FUKASAWA (S.). — Uber ganze ganzwertige Funktionen; *Tohuku Math. J.*, vol. 27, 1926.

[2] GEL'FOND (A. O.). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières, *Tohuku Math. J.*, vol. 30, 1929, p. 280-285.

[3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). — *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1954.

[4] PISOT (C.). — Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 222, 1946, p. 988-990.

[5] PRACHAR (K.). — *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[6] WALDSCHMIDT (M.). — Polyà Theorem by Schneider's method, *Acta Math. Acad. Sc. Hung.*, vol. 31, 1978, p. 21-25.

[7] ARONSZAJN (N.). — Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications, *Acta Math.*, vol. 65, 1935, p. 1-150.

[8] VALIRON (G.). — Méthode de sommation et directions de Bord, *Ann. Sc. Norm. Pisa*, série II, vol. II, 1933, p. 355-380.