

BULLETIN DE LA S. M. F.

JÉRÔME BRUN

Les fibrés de rang deux sur \mathbb{P}_2 et leurs sections

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 457-473

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__457_0

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES FIBRÉS DE RANG DEUX SUR \mathbb{P}_2 ET LEURS SECTIONS

PAR

JÉRÔME BRUN (*)

RÉSUMÉ. — On étudie sur une surface, et plus particulièrement sur le plan projectif, la relation entre fibrés de rang deux et sous-ensembles de codimension deux. On montre aussi que le fibré stable générique de rang deux sur \mathbb{P}_2 admet au plus un groupe de cohomologie non nul.

ABSTRACT. — We study on a surface, particularly on the projective plane, the relation between rank-two bundles and two-codimensional subsets. We also show that the generic stable rank-two bundle on \mathbb{P}_2 has at most one non-zero cohomology group.

Soient X une surface algébrique projective lisse définie sur un corps algébriquement clos k , $Y \subset X$ un ensemble de n points distincts, I_Y l'idéal de Y dans \mathcal{O}_X , L un fibré de rang un sur X .

On dit qu'un fibré vectoriel algébrique E de rang deux sur X est associé à Y s'il existe une section de E dont l'idéal d'annulation est I_Y . L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés associés à Y et de déterminant L est noté $\mathbb{E}(L, Y)$; son étude est le principal objet de ce travail.

En utilisant l'éclatement de Y , et en s'inspirant donc de SCHWARZENBERGER [8], on donne d'abord (1.8) une condition nécessaire et suffisante portant sur L et Y pour que $\mathbb{E}(L, Y)$ soit non vide (c'est un résultat démontré par GRIFFITHS-HARRIS [3] dans le cas complexe).

Ensuite, on prend pour X le plan projectif $\mathbb{P}_2(k)$ noté \mathbb{P}_2 ; $\mathbb{E}(\mathcal{O}(a), Y)$ étant noté $\mathbb{E}(a, Y)$. Après quelques généralités sur $\mathbb{E}(a, Y)$ (§ 2), on est amené à définir une notion de position générale pour des systèmes de points de \mathbb{P}_2

(*) Texte reçu le 12 novembre 1979.

Jérôme BRUN, Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

(§ 3). On peut alors décrire assez précisément $E(a, Y)$ quand Y est en position générale (§ 4).

Les fibrés ainsi contruits permettent de démontrer des résultats sur les fibrés stables (§ 5), par exemple (5.2) : le fibré stable générique de rang deux sur \mathbb{P}_2 possède au plus un groupe de cohomologie non nul (cf. fig. 2, pour l'explicitation de ce résultat en fonction des classes de Chern).

NOTATIONS. — Si A est un fibré sur X : A^\vee désigne le dual de A et $h^i(A)$ la dimension du k -espace vectoriel $H^i(X, A)$.

Si $a \in \mathbb{R}$, on note a^+ la partie positive de a ($a^+ := \sup(a, 0)$), a^- la partie négative de a ($a^- := \sup(-a, 0)$) et $[a]$ la partie entière de a (le plus grand entier $\leq a$).

1. Existence de fibrés associés à un ensemble de points

Soient L un fibré de rang un sur X , et Y un ensemble de n points de X : y_1, \dots, y_n .

Pour étudier $E(L, Y)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés associés à Y et de déterminant L , on introduit $\pi : \hat{X} \rightarrow X$, l'éclatement de Y ; $\Delta \subset \hat{X}$, la réunion des droites exceptionnelles $\Delta_i = \pi^{-1}(y_i)$; $j : \Delta \hookrightarrow \hat{X}$ et $j_i : \Delta_i \hookrightarrow \hat{X}$, les inclusions; ω_X et $\omega_{\hat{X}}$, les fibrés canoniques de X et \hat{X} ; N , le fibré de rang un sur \hat{X} : $\pi^* L^\vee \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(2\Delta)$; ($\mathcal{O}_{\hat{X}}$ sera parfois noté simplement \mathcal{O}).

La méthode consiste à étudier \mathbb{F} , l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés F sur \hat{X} qui s'insèrent dans une extension du type suivant :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}}(\Delta) \rightarrow F \rightarrow \pi^* L \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta) \rightarrow 0.$$

Ces extensions sont classifiées dans $H^1(\hat{X}, N)$.

Soit \mathbb{F}_0 l'ensemble des éléments de \mathbb{F} dont la restriction à chaque Δ_i est triviale. Les deux lemmes suivants sont implicites dans SCHWARZENBERGER [8] :

LEMME 1.1. — *Les ensembles $E(L, Y)$ et \mathbb{F}_0 sont en bijection via π^* .*

Démonstration. — Si E appartient à $E(L, Y)$, $\pi^* E$ admet une section avec zéro simple en Δ , et donc $\pi^* E \otimes \mathcal{O}(-\Delta)$ admet une section qui ne s'annule pas, d'où la suite exacte de fibrés sur \hat{X} :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \pi^* E \otimes \mathcal{O}(-\Delta) \rightarrow \pi^* L \otimes \mathcal{O}(-2\Delta) \rightarrow 0,$$

car $\Lambda^2(\pi^* E) = \pi^*(\Lambda^2 E) = \pi^* L$. En tensoriant par $\mathcal{O}(\Delta)$, on obtient $\pi^* E$ dans une extension du type (1).

Réciproquement, un élément de \mathbb{F}_0 est de la forme $\pi^* E$ d'après le théorème 5 de [8], et on vérifie sans peine qu'alors E est dans $\mathbb{E}(L, Y)$.

LEMME 1.2. — Soit $\varepsilon \in H^1(\hat{X}, N)$ et F le fibré de l'extension (1) correspondant. Le fibré F appartient à \mathbb{F}_0 si et seulement si, pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on a $j_i^*(\varepsilon) \neq 0$.

Démonstration. — Rappelons que l'inclusion $j_i : \Delta_i \hookrightarrow X$ induit une application $j_i^* : H^1(\hat{X}, N) \rightarrow H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$. La restriction de (1) à Δ_i s'écrit :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_i}(-1) \rightarrow F|_{\Delta_i} \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_i}(1) \rightarrow 0,$$

et l'élément correspondant à cette extension sur $\Delta_i \simeq \mathbb{P}_1$ est :

$$j_i^*(\varepsilon) \in H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i}) = H^1(\Delta_i, \mathcal{O}_{\Delta_i}(-2)) \simeq k.$$

La restriction $F|_{\Delta_i}$ est donc triviale si et seulement si $j_i^*(\varepsilon)$ est non nul.

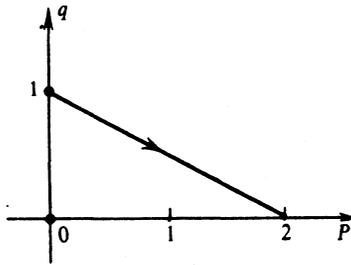
CONCLUSION 1.3. — L'ensemble $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si aucune des applications $j_i^* : H^1(\hat{X}, N) \rightarrow H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$ n'est identiquement nulle.

En effet, $\text{Ker } j_i^*$ est alors un hyperplan H_i de $H^1(\hat{X}, N)$ et tout $\varepsilon \in H^1(\hat{X}, N) \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ donne un élément de \mathbb{F}_0 .

LEMME 1.4. — Pour tout fibré A de rang un sur \hat{X} , on a une suite exacte naturelle :

$$0 \rightarrow H^1(X, \pi_* A) \rightarrow H^1(\hat{X}, A) \rightarrow H^0(X, R^1 \pi_* A) \rightarrow H^2(X, \pi_* A) \rightarrow H^2(\hat{X}, A) \rightarrow 0.$$

Démonstration (cette suite se rencontre dans la littérature, cf par exemple ODA [7], p. 253, mais sous une forme incomplète).



On utilise la convergence de la suite spectrale de Leray de terme :

$$E_2^{p,q} := H^p(X, R^q \pi_* A) \Rightarrow H^{p+q}(\hat{X}, A).$$

Les seuls termes $E_2^{p,q}$ éventuellement non nuls sont les suivants : $E_2^{0,0}$, $E_2^{0,1}$, $E_2^{0,2}$, $E_2^{1,0}$ car le support de $R^1 \pi_* A$ est de dimension zéro.

L'aboutissement de la suite de Leray donne :

— en degré un :

$$0 \rightarrow E_\infty^{1,0} \rightarrow H^1(\hat{X}, A) \rightarrow E_\infty^{0,1} \rightarrow 0;$$

— en degré deux :

$$E_\infty^{2,0} = H^2(\hat{X}, A).$$

D'autre part, l'homologie de l'unique différentielle s'écrit :

$$0 \rightarrow E_\infty^{0,1} \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow E_\infty^{2,0} \rightarrow 0.$$

On déduit de cela une suite :

$$0 \rightarrow E_\infty^{1,0} \rightarrow H^1(\hat{X}, A) \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2(\hat{X}, A) \rightarrow 0$$

qui, en remarquant que $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}$, est la suite annoncée.

LEMME 1.5. — Si A est un fibré du type $\pi^* B \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(2\Delta)$, où B est un fibré de rang un sur X , alors la flèche naturelle $H^0(X, R^1 \pi_* A) \rightarrow H^1(\Delta, A|_\Delta)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme pour $A = \mathcal{O}(2\Delta)$, et aussi pour le cas où π est l'éclatement d'un seul point y , avec $\pi^{-1}(y) = \Delta$ d'idéal J dans \hat{X} .

Le faisceau $R^1 \pi_* A$, étant de support y , est isomorphe à sa complétion J -adique, laquelle, d'après un théorème de Grothendieck (cf. par exemple HARTSHORNE [4], III. 11. 1) est isomorphe naturellement à $\varprojlim H^1(\Delta, A|_{\Delta_n})$ où Δ_n est le n -ième voisinage infinitésimal de Δ : Δ muni du faisceau $\mathcal{O}_{\hat{X}}/J^{n+1}$. Tensoriant par $A = \mathcal{O}(2\Delta)$ la suite :

$$0 \rightarrow J^{n+1}/J^{n+2} \rightarrow \mathcal{O}/J^{n+2} \rightarrow \mathcal{O}/J^{n+1} \rightarrow 0,$$

on obtient, en remarquant que :

$$\begin{aligned} J^{n+1}/J^{n+2} &\simeq \bigotimes_{n+1} J/J^2 \simeq \mathcal{O}_\Delta(n+1), \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}(2\Delta) \otimes \mathcal{O}_\Delta(n+1) &\rightarrow A|_{\Delta_{n+1}} \rightarrow A|_{\Delta_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{C}(2\Delta) \otimes \mathcal{O}_\Delta = \mathcal{C}_\Delta(2\Delta, \Delta) = \mathcal{C}_\Delta(-2)$, et donc on obtient la suite sur Δ :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_\Delta(n-1) \rightarrow A|_{\Delta_{n+1}} \rightarrow A|_{\Delta_n} \rightarrow 0$$

ce qui prouve, comme $H^1(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(n-1)) = 0$ pour $n \geq 0$, que :

$$H^1(\Delta, A|_{\Delta_{n+1}}) = H^1(\Delta, A|_{\Delta_n}) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Ainsi, $\varprojlim H^1(\Delta, A|_{\Delta_n}) = H^1(\Delta, A|_{\Delta})$, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 1.6. — Pour le fibré $N = \pi^* L^\vee \otimes \mathcal{O}(2\Delta)$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(X, L^\vee) \rightarrow H^1(\hat{X}, N) \xrightarrow{\oplus_{j^*} j^*} \bigoplus_{i=1}^n H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i}) \rightarrow H^2(X, L^\vee) \rightarrow H^2(\hat{X}, N) \rightarrow 0.$$

Démonstration. — L'inclusion j^* est obtenue en composant les flèches naturelles données par 1.4 et 1.5 :

$$H^1(\hat{X}, N) \rightarrow H^0(X, R^1 \pi_* N) \simeq H^1(\Delta, N|_{\Delta}).$$

La proposition en découle car $\pi_* N = L^\vee$.

LEMME 1.7. — $h^2(\hat{X}, N) = h^0(X, L \otimes \omega_X \otimes I_Y)$.

Démonstration. — Le fibré canonique de \hat{X} est $\omega_{\hat{X}} = \pi^* \omega_X \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(\Delta)$ (cf. par exemple [4], V.3.3). Par dualité de Serre, on a :

$$h^2(\hat{X}, N) = h^0(\hat{X}, N^\vee \otimes \omega_{\hat{X}}) = h^0(\hat{X}, \pi^*(L \otimes \omega_X) \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta)) = h^0(X, L \otimes \omega_X \otimes I_Y),$$

d'après la formule d'adjonction car $\pi_* \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta) = I_Y$.

THÉORÈME 1.8. — L'ensemble $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si la condition suivante est réalisée : pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, toute section de $L \otimes \omega_X$ qui s'annule en $Y - \{y_i\}$ s'annule également en y_i .

N.B. — Dans le cadre analytique complexe, ce résultat est démontré par GRIFFITHS-HARRIS ([3], prop. 1.33).

Démonstration. — D'après 1.3, $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si aucun des j_i^* n'est identiquement nul. Fixons un indice $i, 1 \leq i \leq n$, et décomposons ainsi l'éclatement π :

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\pi_i} & X_i & \xrightarrow{\pi_i} & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \pi \end{array}$$

où π'_i est l'éclatement de $Y - \{y_i\}$ et π_i l'éclatement de $\pi_i'^{-1}(y_i)$.

Notons $\Delta^i = \bigcup_{k \neq i} \pi_i'^{-1}(y_k)$ et N_i le fibré sur X_i :

$$\pi_i'^* L^\vee \otimes \mathcal{O}_{X_i}(2\Delta^i).$$

On a évidemment $N_i = \pi_{i*} N$ et $N = \pi_i^* N_i \otimes \mathcal{O}_X(2\Delta_i)$.

La suite 1.6 appliquée à l'éclatement π_i s'écrit :

$$0 \rightarrow H^1(X_i, N_i) \rightarrow H^1(\hat{X}, N) \xrightarrow{j_i^*} H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i}) \rightarrow H^2(X_i, N_i) \rightarrow H^2(\hat{X}, N) \rightarrow 0.$$

Or $H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$ est de dimension un. La restriction j_i^* est donc nulle si et seulement si $h^2(X_i, N_i)$ égale $h^2(\hat{X}, N)$. Avec 1.7, cette égalité devient :

$$h^0(X, L \otimes \omega_X \otimes I_i) = h^0(X, L \otimes \omega_X \otimes I_Y),$$

où I_i désigne l'idéal de $Y - \{y_i\}$. C'est bien la condition cherchée.

Remarque 1.9. — La condition de 1.8 est réalisée en particulier si $L \otimes \omega_X$ n'a pas de sections, c'est-à-dire si $H^2(X, L^\vee) = 0$, qui est une condition bien connue (cf. [2]).

2. Fibrés associés à des points dans \mathbb{P}_2

A partir de maintenant, on prend pour X le plan projectif \mathbb{P}_2 . Si a appartient à \mathbb{Z} et si Y est un ensemble de n points de \mathbb{P}_2 , l'ensemble $\mathbb{E}(\mathcal{O}(a), Y)$ est noté $\mathbb{E}(a, Y)$. On considèrera les classes de Chern des fibrés sur \mathbb{P}_2 comme des entiers, et, si $E \in \mathbb{E}(a, Y)$, on a, en particulier, $c_1(E) = a$ et $c_2(E) = n$.

DÉFINITION 2.1. — Si $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ est un ensemble de n points de \mathbb{P}_2 , on note a_Y le plus grand entier a tel que, pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, toute courbe de degré $a - 3$ contenant $Y - \{y_i\}$ contienne y_i .

Le résultat suivant est la traduction de 1.8 :

PROPOSITION 2.2. — L'ensemble $\mathbb{E}(a, Y)$ est non vide si et seulement si $a \leq a_Y$.

2.3. REMARQUES SUR LA FONCTION $Y \mapsto a_Y$

1° Voici ses valeurs pour $n \leq 4$:

$$\begin{aligned} \cdot &\mapsto 2; & \cdot \cdot &\mapsto 3; & \cdot \cdot \cdot &\mapsto 3; & \cdot \cdot \cdot \cdot &\mapsto 4; \\ \cdot \cdot &\mapsto 4; & \cdot \cdot \cdot &\mapsto 3; & \cdot \cdot \cdot \cdot &\mapsto 5. \end{aligned}$$

2° Quand $n=9$, et quand trois points quelconques de Y ne sont pas alignés et six quelconques pas sur une conique, deux cas peuvent se produire :

(a) ces neuf points sont intersection de deux cubiques; alors $a_Y=6$, car toute cubique passant par huit d'entre eux contient le neuvième (cf. par exemple [4], V. 4. 5);

(b) ces neuf points ne sont pas intersection de deux cubiques; alors $a_Y=5$.

3° Si $n \geq 2$, on a toujours $3 \leq a_Y \leq n+1$. Cependant, on vérifie facilement que les deux extrêmes sont atteints pour des positions relativement « voisines » :

– $a_Y=3$ si et seulement si $n-1$ exactement des points sont alignés;

– $a_Y=n+1$ si et seulement si les n points sont alignés (le fibré correspondant étant d'ailleurs alors $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(n)$).

2. 4. LA COHOMOLOGIE DES FIBRÉS DE $\mathbb{E}(a, Y)$

Si E appartient à $\mathbb{E}(a, Y)$ écrivons la suite exacte associée à une section s de E s'annulant en Y (cf. par exemple [5], 1. 1) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \rightarrow I_Y(a) \rightarrow 0.$$

Comme $h^1(\mathcal{O}(t))$ est nul pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et $h^2(\mathcal{O}(t))$ est nul pour $t \geq -2$, on en tire :

– pour $t \in \mathbb{Z} : h^0(E(t)) = h^0(\mathcal{O}(t)) + h^0(I_Y(a+t))$;

– pour $t \geq -2 : h^1(E(t)) = h^1(I_Y(a+t))$

3. Les systèmes de points de \mathbb{P}_2

NOTATION. – t_n désigne le plus petit entier positif t tel que :

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2} \geq n.$$

DÉFINITION 3.1. – Un ensemble Y de n points de \mathbb{P}_2 est dit en position générale quand les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout entier p , toute courbe de degré p contient au plus $((p+1)(p+2)/2) - 1$ points de Y ;

(ii) pour tout $y \in Y$, il existe une courbe C de degré t_n telle que $C \cap Y = Y - \{y\}$.

Rappel. — Pour tout entier d et pour tout ensemble de points Z , on a l'inégalité évidente :

$$(\star) \quad h^0(I_Z(d)) \geq \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - \#Z \right)^+.$$

PROPOSITION 3.2. — *Un ensemble Y est en position générale si et seulement si, pour tout entier d et tout $Z \subset Y$, (\star) est une égalité.*

Avant de démontrer cette proposition, il faut établir le :

LEMME 3.3. — *Si Y est en position générale, tout $Z \subset Y$ est en position générale.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que si $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ est en position générale, $Z = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ l'est aussi (l'ensemble vide étant évidemment en position générale). Or, pour Z , (i) est trivialement satisfait; (ii) l'est aussi si $t_{n-1} = t_n$.

Si $t_{n-1} = t_n - 1$, c'est-à-dire si :

$$n = \frac{(t_{n-1} + 1)(t_{n-1} + 2)}{2} + 1,$$

il faut trouver une courbe de degré t_{n-1} contenant par exemple y_1, \dots, y_{n-2} et pas y_{n-1} . Or, d'après l'inégalité (\star) , il existe au moins une courbe de degré t_{n-1} contenant y_1, \dots, y_{n-2} puisque :

$$\frac{(t_{n-1} + 1)(t_{n-1} + 2)}{2} - (n - 2) = 1;$$

cette courbe ne peut contenir $n - 1$ points de Y d'après la condition (i) pour Y : elle ne contient donc pas y_{n-1} .

Démonstration de la proposition 3.2. — Quand (\star) est une égalité pour tout entier d et tout $Z \subset Y$, la vérification des conditions (i) et (ii) pour Y est immédiate.

Réciproquement, il suffit, d'après 3.3, de montrer que si $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ est en position générale, alors on a :

$$h^0(I_Y(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n \right)^+ \quad \text{pour tout } d.$$

Fixons d et démontrons cela par récurrence sur n . $Z = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ est en position générale d'après 3.3 et, d'après l'hypothèse de récurrence pour Z et l'inégalité (\star) pour Y , on a :

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n \leq h^0(I_Y(d)) \leq h^0(I_Z(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n + 1 \right)^+.$$

Si $n \geq ((d+1)(d+2)/2) + 1$, $h^0(I_Y(d)) = 0$,

Q.E.D.

Si $n \leq ((d+1)(d+2)/2)$, il suffit de montrer que $h^0(I_Y(d))$ diffère de $h^0(I_Z(d))$. Or, dans ce cas, on a $d \geq t_n$, et cette différence résulte donc de la condition 3.1 (ii) pour Y .

PROPOSITION 3.4. — Soient d un entier positif et Y un ensemble de n points en position générale. Alors :

$$h^0(I_Y(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n \right)^+,$$

$$h^1(I_Y(d)) = \left(n - \frac{(d+1)(d+2)}{2} \right)^+.$$

Démonstration. — En considérant la cohomologie de la suite :

$$0 \rightarrow I_Y(d) \rightarrow \mathcal{O}(d) \rightarrow \mathcal{O}/I_Y(d) \rightarrow 0,$$

on obtient :

$$h^1(I_Y(d)) = h^0(I_Y(d)) + n - \frac{(d+1)(d+2)}{2},$$

ce qui donne le résultat d'après 3.2.

PROPOSITION 3.5. — Pour tout entier k , il existe des systèmes de k points en position générale.

Démonstration. — La proposition est évidente pour $k=1$. Supposons la démontrée jusqu'à l'entier n .

Soit $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ un système de n points en position générale. Cherchons les conditions sur y pour que $Y \cup \{y\}$ soit en position générale.

Pour tout $((p+1)(p+2)/2) - 1$ -uple de points de Y , donc en position générale d'après 3.3, il existe, d'après 3.4, une seule courbe de degré p le contenant. Avec la condition :

(Ci) « y n'appartient pas à la réunion (finie) de ces courbes » ;
la condition 3.1 (i) sera vérifiée pour $Y \cup \{y\}$.

D'autre part :

$$\frac{(t_{n+1} + 1)(t_{n+1} + 2)}{2} \geq n + 1.$$

On peut donc choisir une courbe Γ de degré t_{n+1} contenant Y . Avec la condition :

(Cii) « y n'appartient pas à Γ »

la condition 3.1 (ii) sera vérifiée pour $Y \cup \{y\}$ et y . Elle le sera également pour $Y \cup \{y\}$ et y_i . En effet, il s'agit de trouver une courbe de degré $\leq t_{n+1}$, contenant $Y - \{y_i\}$, y et pas y_i .

Or, d'après 3.1 (ii) pour Y et y_i , il existe une courbe Γ_i de degré t_n contenant $Y - \{y_i\}$ et pas y_i . Si on note γ et γ_i les équations de Γ et Γ_i , la courbe d'équation $\gamma_i(y)\gamma - \gamma(y)\gamma_i$ est une des courbes cherchées.

Ainsi, pour tout y appartenant au complémentaire dans \mathbb{P}_2 d'un nombre fini de courbes, $Y \cup \{y\}$ est en position générale, ce qui démontre par récurrence la proposition.

Remarque 3.6. — On montre facilement que l'ensemble des n -uples en position générale forme un ouvert de Zariski dense de $\text{Hilb}^n \mathbb{P}_2$.

4. Fibrés associés à des points en position générale

DÉFINITION 4.1. — Si $n \geq 1$, on note a_n le plus grand entier a tel que

$$\frac{(a-2)(a-1)}{2} \leq n-1.$$

On a $a_n = [(3 + \sqrt{8n-7})/2]$ et la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	

PROPOSITION 4.2. — Soit Y un ensemble de n points en position générale. Alors $a_Y = a_n$, et donc l'ensemble $\mathbb{E}(a, Y)$ est non vide si et seulement si $a \leq a_n$.

Démonstration. — Soient $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ et $Y_i = Y - \{y_i\}$. Y_i est en position générale d'après 3.3. Par définition, a_Y est le plus grand entier a tel que, pour tout i ,

$$1 \leq i \leq n, \quad h^0(I_Y(a-3)) = h^0(I_{Y_i}(a-3)).$$

D'après 3.4, ceci ne peut se produire que si $h^0(I_{Y_i}(a-3)) = 0$, c'est-à-dire, quand $a \geq 3$, si $(a-2)(a-1)/2 \leq n-1$. ■

PROPOSITION 4.3. — Soient Y un système de n points en position générale et a un entier tel que $1 \leq a \leq a_n$. Pour tout fibré E de $E(a, Y)$, on a :

$$(a) \quad h^0(E) = 1 + \left(\frac{(a+1)(a+2)}{2} - n \right)^+;$$

$$(b) \quad h^0(E(-1)) = \left(\frac{a(a+1)}{2} - n \right)^+;$$

$$(c) \quad h^1(E(l)) = \left(n - \frac{(a+l+1)(a+l+2)}{2} \right)^+ \quad \text{pour } l \geq 0;$$

(d) E est stable sauf si (a, n) est l'un des couples suivants : (2, 1); (2, 2); (3, 2); (4, 4); (4, 5).

Démonstration. — Les propriétés (a), (b) et (c) résultent immédiatement de 2.4 et de 3.4.

D'après le critère classique de stabilité (cf. TAKEMOTO [9], prop. 4.1), E est stable si et seulement si son normalisé n'a pas de sections, c'est-à-dire, d'après 2.4, si et seulement si :

$$h^0\left(E\left(\left[-\frac{a}{2}\right]\right)\right) = h^0\left(I_Y\left(a + \left[-\frac{a}{2}\right]\right)\right) = h^0\left(I_Y\left(\left[\frac{a}{2}\right]\right)\right) = 0,$$

c'est-à-dire, d'après 3.4, si et seulement si :

$$n \geq \frac{([a/2] + 1)([a/2] + 2)}{2}.$$

Comme $a \leq a_n$, on a :

$$n \geq \frac{(a-2)(a-1)}{2} + 1.$$

On en déduit que E est sûrement stable si $a-3 \geq [a/2]$, c'est-à-dire si $a \geq 5$. L'examen des cas $a = 1, 2, 3, 4$ donne le résultat (d).

Ces résultats se lisent sur la figure 1. Au sujet des fibrés de la zone hachurée, on peut énoncer le lemme suivant qui résulte de 4.3 :

LEMME 4.4. — Si a et n sont tels que $a \geq 1$ et :

$$\frac{a(a+1)}{2} \leq n \leq \frac{(a+1)(a+2)}{2},$$

alors il existe un fibré E , stable, de classes de Chern a et n , tel que $h^0(E(-1))=0$ et, pour $l \geq 0$, $h^1(E(l))=0$.

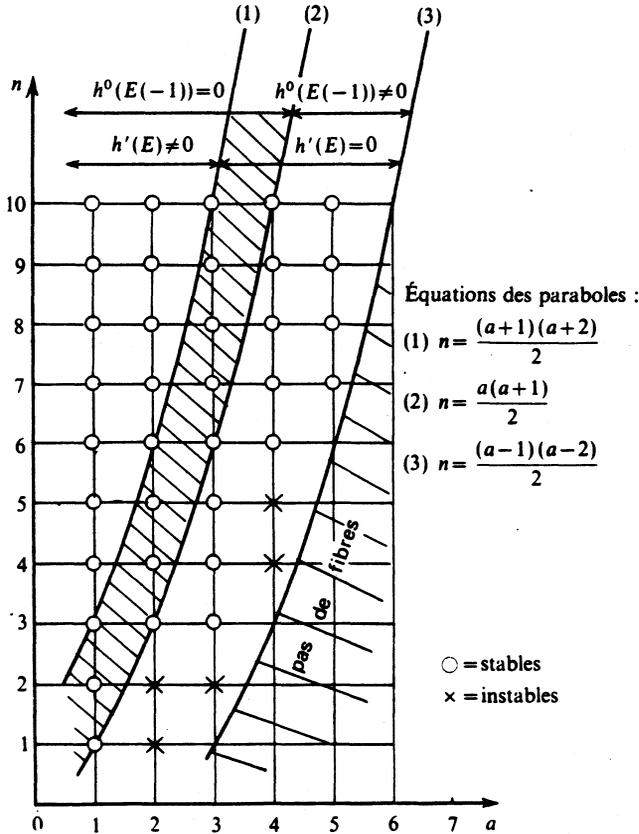


Fig. 1. — Fibrés E de première classe de Chern $a \geq 1$, admettant une section s'annulant en n points en position générale.

5. Le fibré stable générique

On note $M(c_1, c_2)$ le module des fibrés stables de rang deux sur \mathbb{P}_2 , de classes de Chern c_1 et c_2 . On confond abusivement $M(c_1, c_2)$ avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés. La phrase : « le fibré générique de $M(c_1, c_2)$ vérifie la propriété X » signifie que la propriété X est vérifiée dans un ouvert de Zariski dense de $M(c_1, c_2)$.

Rappelons que les fibrés stables de classes de Chern données forment une famille limitée (TAKEMOTO [9], cor. 4.2) et que la variété algébrique lisse $M(c_1, c_2)$ est irréductible (cf. BARTH [1] et MARUYAMA [6], prop. 7.5).

Si E est un fibré de $M(c_1, c_2)$ et si $c_1 \leq 0$, alors $h^0(E) = 0$ d'après le critère de stabilité déjà mentionné. On en déduit par dualité de Serre que si E est un fibré de $M(c_1, c_2)$ et si $c_1 \geq -6$, alors $h^2(E) = 0$.

Enfin, si E est un fibré de rang deux sur \mathbb{P}_2 de classes de Chern c_1 et c_2 , le théorème de Riemann-Roch donne la caractéristique d'Euler-Poincaré de E :

$$\chi(E) = \frac{(c_1 + 1)(c_1 + 2)}{2} - c_2 + 1 = : \chi(c_1, c_2)$$

(cf., par exemple [5], 3.2).

THÉORÈME 5.1. — Soit $c_1 \geq 1$. Le fibré générique E de $M(c_1, c_2)$ est tel que :

$$h^0(E) = (\chi(c_1, c_2))^+ \quad \text{et} \quad h^1(E) = (\chi(c_1, c_2))^-.$$

Démonstration. — Soit E dans $M(c_1, c_2)$ avec $c_1 \geq 1$. D'après la remarque précédente, on a $h^2(E) = 0$ et donc, pour $i = 0, 1$, si $h^i(E) = 0$, alors h^{1-i} a la valeur indiquée dans le théorème. Or la propriété $h^i(E) = 0$ est Zariski-ouverte dans $M(c_1, c_2)$: cela résulte immédiatement du fait que la famille $M(c_1, c_2)$ est limitée et du théorème général de semi-continuité (cf. [4], th. III.12.8). Comme $M(c_1, c_2)$ est irréductible, il suffit, pour démontrer le théorème, d'exhiber :

(a) si $\chi(c_1, c_2) < 0$, un fibré E tel que $h^0(E) = 0$;

(b) si $\chi(c_1, c_2) \geq 0$, un fibré E tel que $h^1(E) = 0$.

Si E est dans $M(c_1, c_2)$ et si t appartient à \mathbb{Z} , les classes de Chern de $E(t)$ sont :

$$\begin{cases} a_t = c_1 + 2t, \\ n_t = c_2 + tc_1 + t^2. \end{cases}$$

LEMME. — Il existe un unique entier t_0 tel que :

$$\frac{a_{t_0}(a_{t_0}+1)}{2} \leq n_{t_0} \leq \frac{(a_{t_0}+1)(a_{t_0}+2)}{2}$$

(cela signifie que (a_{t_0}, n_{t_0}) appartient à la zone hachurée de la figure 1).

En effet, la double inéquation :

$$\frac{a_t(a_t+1)}{2} \leq n_t \leq \frac{(a_t+1)(a_t+2)}{2}$$

est équivalente à :

$$t^2 + t(c_1+1) + \frac{c_1^2 + c_1}{2} \leq c_2 \leq t^2 + t(c_1+3) + \frac{c_1^2 + 3c_1}{2} + 1$$

$$\begin{array}{ccc} !! & & !! \\ A(t) & & B(t) \end{array}$$

et on constate que $A(t+1) = B(t) + 1$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de t_0 , et démontre le lemme.

Il est clair que si :

$$\chi(c_1, c_2) = \frac{(c_1+1)(c_1+2)}{2} - c_2 + 1$$

est < 0 (resp. ≥ 0), alors t_0 est > 0 (resp. ≤ 0).

D'après le lemme 4.4, il existe un fibré F dans $M(a_{t_0}, n_{t_0})$ tel que $h^0(F(-1)) = 0$ et, pour $l \geq 0$, $h^1(F(l)) = 0$. Alors le fibré $E := F(-t_0)$ satisfait (a) et (b).

COROLLAIRE 5.2. — *Le fibré stable générique possède au plus un groupe de cohomologie non nul.*

Démonstration. — Si $-6 \leq c_1 \leq 0$, cela est vrai pour tous les fibrés de $M(c_1, c_2)$. Si $c_1 \geq 1$, cela résulte de 5.1. On en déduit le cas général par dualité de Serre.

Comme application, on obtient la figure 2.

COROLLAIRE 5.3. — *Pour le fibré générique E de $M(c_1, c_2)$, on a, pour tout $t \in \mathbb{Z}$: $h^1(E(t)) = (\chi(E(t)))^-$.*

Démonstration. — D'après 5.2, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert de Zariski dense U_t de $M(c_1, c_2)$ tel que, pour tout E dans U_t , on ait $h^1(E(t)) = (\chi(E(t)))^-$.

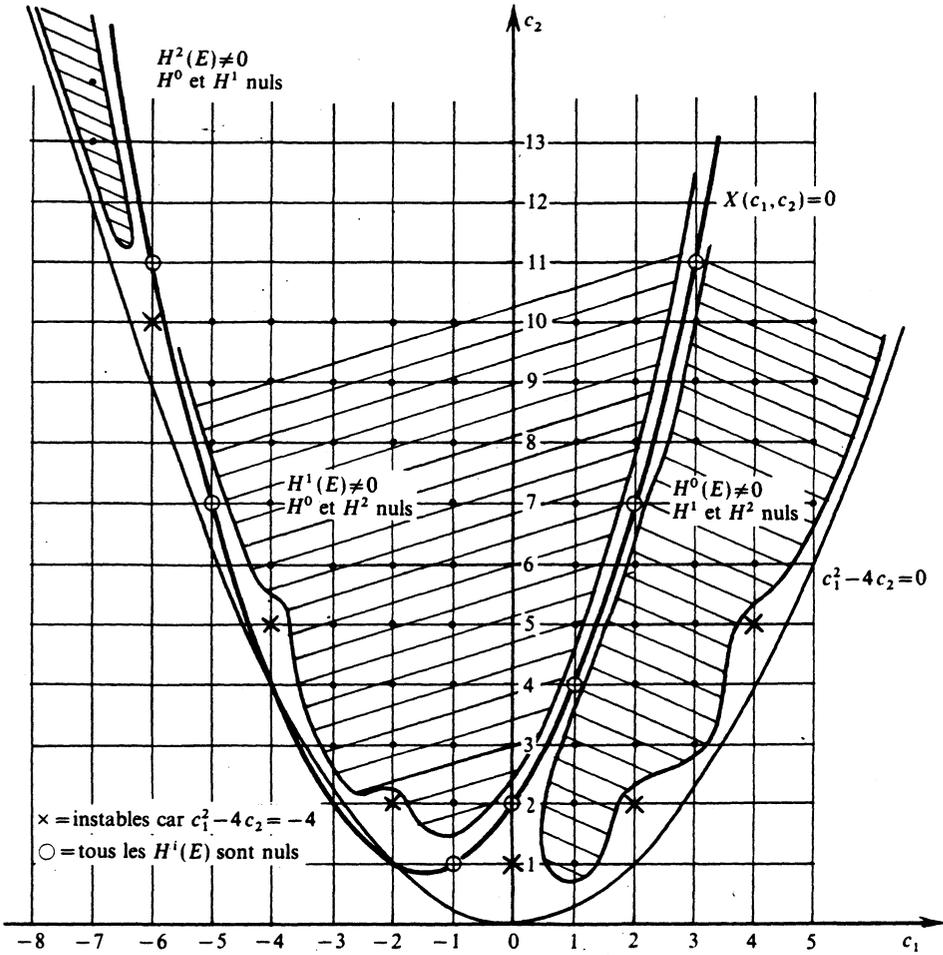


Fig. 2. — La cohomologie du fibré générique E de $M(c_1, c_2)$.

D'autre part, il existe des entiers relatifs n_1 et n_2 ($n_1 \leq n_2$), dépendant de c_1 et c_2 , tels que, pour tout fibré E de $M(c_1, c_2)$ et pour tout entier n n'appartenant pas à l'intervalle $[n_1, n_2]$, on ait : $h^1(E(n))=0$ (ce résultat classique peut par exemple se déduire de la limitation de la famille $M(c_1, c_2)$ et du théorème relatif d'annulation de Serre; pour une autre démonstration, cf. ELENCAJG-FORSTER [10], th. 3.2).

L'assertion de 5.3 est donc vérifiée pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et pour tout E appartenant à $\bigcap_{n_1 \leq n \leq n_2} U_n$, donc pour E générique.

Nous allons énoncer ce résultat dans le cadre des fibrés normalisés c'est-à-dire de première classe de Chern 0 ou -1 . Si E est un fibré normalisé, on note $s(E)$ le plus petit entier s tel que $H^0(E(s)) \neq 0$.

Si E est de classe de Chern 0 et n (resp. -1 et n), on a, pour $t \in \mathbb{Z}$:

$$\chi(E(t)) = (t+1)(t+2) - n \quad (\text{resp. } \chi(E(t)) = (t+1)^2 - n).$$

On est donc amené aux définitions :

$$h_n : = \text{le plus grand entier } h \text{ tel que } h(h+1) \leq n,$$

$$k_n : = \text{le plus grand entier } k \text{ tel que } k^2 \leq n.$$

Il est clair que pour tout fibré E de $M(0, n)$ (resp. de $M(-1, n)$) on a $s(E) \leq h_n$ (resp. $s(E) \leq k_n$) (cf. prop. 7.1 de [5]). On déduit du corollaire 5.3 le :

COROLLAIRE 5.4. — (i) pour le fibré générique E de $M(0, n)$, on a :

$$s(E) = h_n \quad \text{et} \quad h^1(E(t)) = 0 \quad \text{pour } t \geq h_n;$$

(ii) pour le fibré générique E de $M(-1, n)$, on a :

$$s(E) = k_n \quad \text{et} \quad h^1(E(t)) = 0 \quad \text{pour } t \geq k_n.$$

On a la table de valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	...
h_n		1	1	1	1	2	2	...
k_n	1	1	1	2	2	2	2	...

5.5. Il est facile de construire des fibrés stables dont le h^0 et le h^1 sont non nuls simultanément.

Soient par exemple $n \geq 4$, $a \geq 1$ tel que $((a+1)(a+2)/2) < n$ et Y un ensemble de n points en position générale. Alors, d'après 4.3, les éléments E de $\mathbb{E}(a, Y)$ sont stables et vérifient :

$$h^0(E) = 1 \quad \text{et} \quad h^1(E) = n - \frac{(a+1)(a+2)}{2}$$

(on peut d'ailleurs montrer dans ce cas que les fibrés de $\mathbb{E}(a, Y)$ admettent une famille universelle dont la base est de dimension $n - ((a-2)(a-1)/2) - 1$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARTH (W.). — Moduli of vector bundles on the projective plane, *Invent. Math.*, vol. 42, 1977, p. 63-91.
- [2] GRAUERT (H.) und MULICH (G.). — Vektorbündel Vom Rang 2 über dem n -dimensionalen komplex-projectiver Raum, *Manu scripta Math.*, vol. 16, 1975, p. 75-100.
- [3] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). — Residues and zero-cycles on algebraic varieties, *Ann. math.*, vol. 108, 1978, p. 461-505.
- [4] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.
- [5] HARTSHORNE (R.). — Stable Vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}^3 , *Math. Ann.*, vol. 238, 1978, p. 229-280.
- [6] MARUYAMA (M.). — Moduli of stable sheaves II, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 18, 1978, p. 557-614.
- [7] ODA (T.). — Vector bundles on abelian surfaces, *Invent. Math.*, vol. 13, 1971, p. 247-260.
- [8] SCHWARZENBERGER (R.). — Vector bundles on algebraic surfaces, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 11, 1961, p. 601-622.
- [9] TAKEMOTO (F.). — Stable vector bundles on algebraic surfaces, *Nagoya Math. J.*, vol. 47, 1972, p. 29-48.
- [10] ELENOWAJG (G.) and FORSTER (O.). — Bounding cohomology groups of vector bundles on \mathbb{P}_n , *Math. Ann.*, vol. 246, 1980, p. 251-270.

Note. — Herbert Lange démontre, par des méthodes différentes, le résultat du corollaire 5.4, dans l'article : Invertierbare Untergarben maximalen Grades von Rang-2 Vektorbündeln auf der projektiven Ebene, *Archiv der Mathematik*, vol. 34, 1980, p. 313-321.