BULLETIN DE LA S. M. F.

HEDI DABOUSSI

Sur les fonctions multiplicatives ayant une valeur moyenne non nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 183-205
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__183_0>

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 183-205.

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES AYANT UNE VALEUR MOYENNE NON NULLE

PAR

HÉDI DABOUSSI (*)

RÉSUMÉ. — Nous déterminons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction multiplicative f vérifiant $\overline{\lim}_{x \to \infty} 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^{\lambda} < \infty$ pour un $\lambda > 1$, ait une valeur moyenne non nulle. Nous généralisons ainsi des résultats antérieurs de H. DELANGE et de P.D.T.A. ELLIOTT.

ABSTRACT. — We give necessary and sufficient condition for a multiplicative function f, satisfying the condition $\overline{\lim}_{x \to \infty} 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^{\lambda} < \infty$ for some $\lambda > 1$ to have a non zero mean value. This generalizes earlier results of H. DELANGE and P.D.T.A. ELLIOTT.

1. Introduction

1.1. Une fonction $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1)=1$ et $f(m.n)=f(m).f(n)$ toutes les fois que $(m, n)=1$.

1.2. Une fonction $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la quantité $1/x \sum_{n \leq x} f(n)$ tend, quand $x \to +\infty$, vers une limite non nulle. On notera $M(f)$ cette limite.

1.3. Un théorème de DELANGE [4] affirme que si f est multiplicative, $|f(n)| \leq 1$, alors f a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la série $\sum_p (f(p)-1)/p$ converge et $1+\sum_{k=1}^{\infty} f(2^k)/2^k \neq 0$.

1.4. ELLIOTT [6] a montré que, si f est multiplicative, et satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\overline{\lim}_x 1/x \sum_{n \leq x} |f(n)|^2 < +\infty$;

(ii) f a une valeur moyenne non nulle;

(*) Texte reçu le 7 janvier 1980, révisé le 24 octobre 1980.

H. DABOUSSI, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

alors les séries suivantes sont convergentes :

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_p \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_p \left(\sum_{k\geq 2} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k}\right),$$

et, pour tout nombre premier p, $1+\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)/p^k \neq 0$.

Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, alors f et $|f|^2$ ont une valeur moyenne non nulle.

DELANGE et l'auteur [2] ont donné une nouvelle démonstration de ce résultat, et ont, indépendamment, montré que ces conditions impliquaient que f est limite périodique B^2 ([5], [1]).

1.5. Nous allons établir dans cet article le résultat suivant, qui généralise celui d'Elliott.

THÉORÈME 1. — *Soit $\lambda > 1$, et soit f une fonction multiplicative vérifiant :*

$$\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} |f(n)|^{\lambda} < +\infty; \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n) \quad \textit{existe et est non nulle.} \tag{2}$$

Alors :

(3) *la série $\sum (f(p)-1)/p$ est convergente et on a :*

$$\sum_{|f(p)|\leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < +\infty, \qquad \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^{\lambda}}{p} < +\infty,$$

$$\sum_p \left(\sum_{r\geq 2} \frac{|f(p^r)|^{\lambda}}{p^r}\right) < +\infty;$$

(4) *pour tout nombre premier p, la série $1+\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)/p^k$ est non nulle.*

Réciproquement, si la condition (3) *est vérifiée alors f est limite périodique B^{λ}, et en particulier $M(f)$ et $M(|f|^{\lambda})$ existent. De plus, $M(f)$ est non nul si, et seulement si, la condition* (4) *est vérifiée.*

Remarques. — Le nombre 3/2 du théorème peut être remplacer par tout nombre supérieur à un.

Notre méthode est essentiellement différente de celle d'ELLIOTT.

Elle consiste à étudier la série de Dirichlet de la fonction multiplicative et, en ce sens, est plus proche de la méthode analytique de DELANGE [4].

Ce travail a été exposé au *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* en octobre 1976. Il constitue une part de la thèse de l'auteur (Orsay, 1979).

Nous avons démontré la réciproque du théorème 1 dans [1].

Nous allons en fait, démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* $\lambda > 1$ *et* f *une fonction multiplicative vérifiant :*

(5) $$\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty \quad \textit{pour tout } s > 1;$$

(6) $$\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty;$$

(7) $$\lim_{s\to 1, s>1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{f(n)}{n^s} \quad \textit{existe et est non nulle.}$$

Alors les conditions (3) *et* (4) *sont vérifiées.*

Il est facile de voir que les hypothèses (1) et (2) du théorème 1 entraînent (5), (6) et (7).

2.

2.1. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit* f *une fonction multiplicative réelle ou complexe. Soit* $\lambda > 1$. *Supposons que :*

(8) $$\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty \quad \textit{pour tout } s > 1,$$

(9) $$\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty,$$

(10) $$\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{f(n)}{n^s} \right| = B > 0.$$

Alors :

(11) $$\sum_{|f(p)| \leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < \infty,$$

(12) $$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty$$

et pour tout p premier, la série :

$$1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r} \tag{13}$$

est convergente et est non nulle.

On montrera ensuite qu'en remplaçant l'hypothèse (10) par (7) on pourra ajouter aux conclusions que la série $\sum (f(p)-1)/p$ est convergente et que :

$$\sum_p \left(\sum_{r\geqslant 2}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\right) < +\infty.$$

Nous établirons à la fin une généralisation du théorème 2.

2.2. Notations

La lettre p désigne un nombre premier;
$p \mid n$ signifie « p divise n »;
$p \nmid n$ signifie « p ne divise pas n »;
$p^j \| n$ signifie « $p^j \mid n$ et $p^{j+1} \nmid n$ ».

2.3. Lemme 1. — *Soient $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ et $v_1, v_2, \ldots v_n \ldots$ des fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble S.*

Supposons que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in S$,

$$|u_m(s)| \leqslant U_m, \qquad |v_m(s)-u_m(s)| \leqslant V_m,$$

où U_m et V_m sont des nombres positifs vérifiant :

$$\sum_m U_m^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum V_m < \infty.$$

Alors le produit infini :

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+u_m(s))\, e^{-v_m(s)}$$

est absolument convergent pour $s \in S$. De plus il existe une constante C telle que pour tout ensemble E d'entiers et tout $s \in S$:

$$\left|\prod_{m\in E} (1+u_m(s))\, e^{-v_m(s)}\right| < C.$$

Preuve. — Soit $T > 0$ tel que $U_m \leqslant T$ et $V_m \leqslant T$. Posons :

$$w_m(s) = (1+u_m(s))\, e^{-v_m(s)} - 1.$$

Les fonctions $((1+u)e^{-u}-1)/u^2$ et $(e^u-1)/u$ (prises égales à $-1/2$ et 1 respectivement pour $u=0$) étant continues, il existe M tel que :

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leqq M|u|^2 \qquad |e^u-1| \leqslant M|u| \quad \text{pour } |u| \leqslant T.$$

Il en résulte, en remarquant que :

$$|w_m(s)| \leqslant |((1+u_m(s))e^{-u_m(s)}-1||e^{u_m(s)-v_m(s)}|+|e^{(u_m(s)-v_m(s))}-1|,$$

l'inégalité,

$$|w_m(s)| \leqslant M|u_m(s)|^2 e^{|u_m(s)-v_m(s)|}+M|u_m(s)-v_m(s)| \leqslant MW_m,$$

ou :

$$W_m = U_m^2 e^{2T}+V_m.$$

On a :

$$\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} |W_m| \leqslant M e^{2T}\sum_m U_m^2+M\sum_m V_m < +\infty,$$

et donc le produit infini $\prod(1+w_m(s))$ est absolument et uniformément convergent pour $s \in S$.

2.4. LEMME 2. — *Soit* $\alpha>1$ *et* $z \in \mathbb{C}$.

La quantité $|z|^\alpha-1+\alpha(1-\operatorname{Re} z)$ *est positive pour tout z complexe.*

De plus il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 *et* c_4 *ne dépendant que de* α *telles que :*

(14) *si* $|z| \leqslant 3/2, c_1|z-1|^2 \leqslant |z|^\alpha-1+\alpha(1-\operatorname{Re} z) \leqslant c_2|z-1|^2$,

(15) *si* $|z| > 3/2$, $c_3|z|^\alpha \leqslant |z|^\alpha-1+\alpha(1-\operatorname{Re} z) \leqslant c_4|z|^\alpha$.

Preuve. — Posons $z=xe^{i\theta}$ avec $x \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque $x^\alpha-1+\alpha-\alpha x\cos\theta \geqslant x^\alpha-1+\alpha-\alpha x$, il suffit de remarquer que la fonction définie pour $x \geqslant 0$ par $x \to x^\alpha+\alpha-1-\alpha x$ est minimale au point $x=1$, où elle vaut 0 pour obtenir que $x^\alpha-1+\alpha-\alpha x\cos\theta \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

L'inégalité (15) est immédiate.

De même l'inégalité (14) pour $x \in [0, 1/2]$ puisque chacune des fonctions $x \to |xe^{i\theta}-1|^2$ et $x \to x^\alpha-1+\alpha-\alpha x\cos\theta$ est majorée et minorée par des constantes positives indépendantes de θ pour $x \in [0, 1/2]$.

Soit alors $x \in [1/2, 3/2]$. La formule de Taylor montre qu'il existe $h \in]0, 1[$ tel que :

$$x^\alpha = 1 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 [1 + h(x-1)]^{\alpha-2}.$$

Ainsi :

$$x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos\theta = \alpha x (1 - \cos\theta) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2 [1 + h(x-1)]^{\alpha-2}.$$

Puisque $1 + h(x-1) \in]1/2, 3/2[$ et que $(x-1)^2 + 2x(1-\cos\theta) = |xe^{i\theta} - 1|^2$, on a, en prenant,

$$c'_1 = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha-2}\right),$$

$$c'_2 = \max\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha-2}\right),$$

$$c'_1 |xe^{i\theta} - 1|^2 \leqslant x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x \cos\theta \leqslant c'_2 |xe^{i\theta} - 1|^2.$$

2.5. Supposons que f satisfait aux hypothèses du théorème 3.

Soit $\mu = \lambda/(\lambda-1)$ et $\sigma_0 = 1 - 1/2\mu$.

Montrons, d'abord, que l'hypothèse (8) entraîne que :

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}}\right) < \infty \quad \text{pour} \quad s > 1 \quad \text{et} \quad \alpha \in [1, \lambda], \tag{16}$$

$$\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r\sigma}}\right) < \infty \quad \text{si} \quad \sigma > \sigma_0. \tag{17}$$

Si $\alpha = \lambda$ (16) découle de (8).

Si $\alpha < \lambda$, l'inégalité de Hölder entraîne que :

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}}\right) \leqslant \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right)\right)^{\alpha/\lambda} \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}}\right)\right)^{(\lambda-\alpha)/\lambda},$$

et donc (16) se déduit de (8) et de la convergence de la série $\sum_p (\sum_{r=1}^{\infty} 1/p^{rs})$, pour $s > 1$.

D'autre part, soit $g(n)$ la fonction multiplicative déterminée par :

$$g(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r = 1, \\ 1 & \text{si} \quad r \geqslant 2. \end{cases}$$

Ainsi $\sum_p (\sum_{r=1}^{\infty} g(p^r)/p^{r\gamma}) < \infty$ pour $\gamma > 1/2$, et donc :

$$\sum \frac{g(n)}{n^\gamma} < \infty \qquad \text{pour} \quad \gamma > 1/2. \tag{18}$$

Soit $\sigma > \sigma_0$. On peut trouver deux nombres a et b tels que $a+b=\sigma$ et $a > 1/\lambda$, $b > 1/2\mu$. L'inégalité de Hölder montre que :

$$\sum \frac{|g(n)f(n)|}{n^\sigma} \leqslant \left(\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^{\lambda a}}\right)^{1/\lambda} \left(\sum \frac{g(n)}{n^{b\mu}}\right)^{1/\mu},$$

et donc $\sum |g(n)f(n)|/n^\sigma < \infty$ grâce à (8) et (18). Tenant compte de la définition de g, on obtient (17).

2.6. Pour tout p premier, la série $1+\sum_{r=1}^{\infty} f(p^r)/p^r$ est convergente d'après (17).

Nous allons voir que les hypothèses entraînent qu'elle est non nulle.

Posons, pour $s > 1$,

$$F(s)=\sum \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad F_p(s)=\sum_{p \mid n} \frac{f(n)}{n^s}.$$

L'inégalité de Hölder et l'hypothèse (9) donnent :

$$\overline{\lim}_{s \to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\alpha}{n^s} \leqslant \overline{\lim}_{s \to 1, s>1} \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}\right)^{\alpha/\lambda} = A^{\alpha/\lambda} \tag{19}$$

pour tout $\alpha \in [1, \lambda[$.

Par suite, puisque $|F_p(s)| \leqslant \sum |f(n)|/n^s$,

$$\overline{\lim}_{s \to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} |F_p(s)| \leqslant A^{1/\lambda}. \tag{20}$$

Mais, pour $s > 1$,

$$F_p(s)=\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p^r \parallel n} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$F_p(s)=\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \sum_{p \nmid n} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} (F(s)-F_p(s)).$$

Ainsi :

$$\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right)F_p(s)=\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right)F(s)$$

et donc :

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|\overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\,|F(s)|=\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|\overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\,|F_p(s)|.$$

Il résulte de (10) et (20) que :

$$\left|\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|.B\leqslant A^{1/\lambda}\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|.$$

B étant non nul, cela implique que $1+\sum_{r=1}^{\infty}f(p^r)/p^r\neq 0$ et prouve donc (13).

2.7. Soit $\alpha\in[1, \lambda[$. On a :

(21) $$\sum\frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2}<\infty.$$

En effet : si $\lambda\geqslant 2\alpha$, cela découle de (16).

Supposons $\alpha<\lambda<2\alpha$ et soit $\sigma_1\in]1, \lambda/(2\alpha-\lambda)[$.

De (16) on déduit l'existence d'une constante c_5 telle que $|f(p)|^\lambda\leqslant c_5\,p^{\sigma_1}$. Ainsi :

$$\sum_p |f(p)|^{2\alpha}p^{-2}\leqslant c_5^{(2\alpha-\lambda)/\lambda}\sum_p|f(p)|^\lambda p^{-2+\sigma_1((2\alpha-\lambda)/\lambda)}.$$

Il suffit alors de remarquer que $2-\sigma_1\,((2\alpha-\lambda)/\lambda)>1$ pour déduire (21) de (8).

2.8. Pour $s>1$, posons :

$$\mathscr{H}(s)=\prod_p\left[\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\exp\frac{1-f(p)}{p^s}\right],$$

$$u_p(s)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^{rs}},$$

$$v_p(s)=\frac{f(p)-1}{p^s}.$$

Ainsi :

$$\mathscr{H}(s)=\prod_p[(1+u_p(s))\exp-v_p(s)],$$

$$U_p=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r},$$

$$V_p=2\left(\sum_{r\geqslant 2}\frac{|f(p^r)|}{p^r}\right)+\frac{|f(p)|}{p^2}.$$

Les inégalités (16) et (17) montrent que : $\sum V_p<\infty$, ce qui entraîne que $\sum V_p^2<\infty$.

Et, puisque $U_p\leqslant V_p+|f(p)-1|/p$, on a :

$$\sum U_p^2\leqslant 3\sum V_p^2+3\sum\frac{|f(p)|^2}{p^2}+3\sum\frac{1}{p^2}<+\infty \quad \text{d'après (2.1).}$$

En appliquant le lemme 1, on obtient que $\mathscr{H}(s)$ est absolument convergent pour $s\geqq 1$ et qu'il existe une constante C telle que, pour tout ensemble F de nombres premiers distincts et tout $s\geqq 1$ on a :

$$(22)\qquad \prod_{p\in F}\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right|\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\exp\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p^s}\leqslant C.$$

De plus $\mathscr{H}(1)$ est différent de zéro.

2.9. Lemme 3. — *Soit E un ensemble fini de nombres premiers, k un entier et* α *et* λ *réels satisfaisant à :* $1<\alpha\leqslant\lambda$.

Supposons que la fonction f satisfait les hypothèses du théorème 3.

Alors, il existe une constante $D(\alpha)$ *ne dépendant pas de E et de k telle que :*

$$(\mathrm{I})\qquad \prod_{p\in E}\left[1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right]\left[1-\frac{1}{p}\right]\exp\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\Bigg]\leqslant D(\alpha).$$

Preuve. — Soit $h_E(n)$ la fonction multiplicative définie par :

$$h_E(p^r)=\begin{cases}1 & \text{si } p\notin E,\\ 0 & \text{si } p\in E,\end{cases}\qquad r\geqslant 1.$$

On voit immédiatement que pour $s>1$,

$$\sum\frac{f(n)\,h_E(n)}{n^s}=\prod_{p\notin E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right).$$

On en déduit que :

$$F(s)=\left(\sum \frac{f(n)\,h_E(n)}{n^s}\right)\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right),$$

Comme, grâce à (13), quand $s\to 1$, le produit :

$$\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right)$$

tend, vers le produit :

$$\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r}}\right),$$

qui est non nul, on a :

$$\overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\,|F(s)|=\prod_{p\in E}\left|\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r}}\right)\right|\overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\left|\sum\frac{f(n)\,h_E(n)}{n^s}\right|.$$

Ainsi :

$$\text{(23)}\quad \overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\left|\sum\frac{f(n)\,h_E(n)}{n^s}\right|=B\left[\left|\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r}}\right|\right]^{-1}.$$

Si $\alpha\in[1,\lambda]$ et si $s>1$, on a également :

$$\sum\frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s}=\prod_{p\notin E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}}\right)$$

et donc :

$$\left[\sum\frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s}\right]\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}}\right)=\sum\frac{|f(n)|^\alpha}{n^s}.$$

Par suite, pour tout entier k,

$$\left[\sum\frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s}\right]\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}}\right)\leqslant\sum\frac{|f(n)|^\alpha}{n^s}.$$

Il résulte de (19) que :

$$\text{(24)}\quad \overline{\lim}_{s\to 1}\sum\frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s}\leqslant A^{\alpha/\lambda}\left[\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{r}}\right)\right]^{-1}.$$

Soit $\alpha \in]1, \lambda]$ pour $s>1$, on a par l'inégalité de Hölder :

$$[\zeta(s)]^{-1}\left|\sum \frac{f(n)h_E(n)}{n^s}\right|$$
$$\leqslant \left(\zeta(s)^{-1}\sum \frac{|f(n)|^\alpha h_E(n)}{n^s}\right)^{1/\alpha}\left(\zeta(s)^{-1}\sum \frac{h_E(n)}{n^s}\right)^{1-1/\alpha}.$$

Il résulte alors de (23) et (24) que :

$$B\left(\prod_{p\in E}\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|\right)^{-1}$$
$$\leqslant A^{1/\lambda}\left(\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right)^{1/\alpha}\prod_{p\in E}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{1-(1/\alpha)}\right.$$

puisque $1/\zeta(s)\sum h_E(n)/n^s$ tend vers $\prod_{p\in E}(1-(1/p)$.

Ceci peut s'écrire :

$$\prod_{p\in E}\left(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)$$
$$\leqslant A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}\left[\prod_{p\in E}\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]^\alpha.$$

Multipliant par :

$$\prod_{p\in E}\exp\left(\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right),$$

il vient :

$$\prod_{p\in E}\left[\left(1+\sum_{r=1}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left(\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right)\right.$$
$$\leqslant A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}\left[\prod_{p\in E}\left|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\right|\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right]^\alpha.$$

Il résulte alors de (22) que :

$$\prod_{p\in E}\left[1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r}\right]\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left(\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right)\leqslant D(\alpha),$$

où $D(\alpha)=A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}C^\alpha$.

2.10. Prenons $k=1$ dans l'inégalité (I) du lemme 3.

Puisque $\log(1+u)\geqslant u-u^2$ si $u\geqslant -1/2$, on déduit :

$$\sum_{p\in E}\frac{|f(p)|^\alpha-1+\alpha-\alpha\operatorname{Re}f(p)}{p}-\sum_{p\in E}\frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2}-\sum_{p\in E}\frac{1}{p^2}\leqslant\log D(\alpha),$$

pour tout $\alpha\in]1, \lambda]$.

Comme, d'après (21), $\sum |f(p)|^{2\alpha}/p^2<\infty$ on voit que :

$$\sum_{p\in E}\frac{|f(p)|^\alpha+\alpha-1-\alpha\operatorname{Re}f(p)}{p}\leqslant D_1(\alpha),$$

où :

$$D_1(\alpha)=\log D(\alpha)+\sum\frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2}+\sum\frac{1}{p^2}.$$

On remarquera que $D_1(\alpha)$ est une constante indépendante de E.

Pour $x>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, la quantité $x^\alpha+\alpha-1-\alpha x\cos\theta$ étant positive d'après le lemme 2, il en résulte que :

$$\sum\frac{|f(p)|^\alpha+\alpha-1-\alpha\operatorname{Re}f(p)}{p}<\infty.$$

En particulier :

$$\sum_{|f(p)|\leqslant 3/2}\frac{|f(p)|^\alpha+\alpha-1-\alpha\operatorname{Re}f(p)}{p}<\infty$$

et :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\alpha+\alpha-1-\alpha\operatorname{Re}f(p)}{p}<\infty.$$

Ceci entraîne d'après (14) et (15) que :

$$\sum_{|f(p)|\leqslant 3/2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}<\infty,$$

et :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\alpha}{p}<\infty \quad \text{pour tout } 1<\alpha<\lambda. \tag{25}$$

Il nous reste à montrer que :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}<\infty.$$

Reprenons l'inégalité (I) du lemme 3 avec $k=1$, $E=\{p\leq y$ tel que $|f(p)|>3/2\}$ et $\alpha=\lambda$, ce qui donne :

$$\prod_{p\in E}\left(1+\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left(\lambda\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right)\leq D(\lambda).$$

Or d'après (25), les séries :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{1}{p}\qquad\text{et}\qquad\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|}{p}$$

sont convergentes, et donc le produit :

$$\prod_{|f(p)|>3/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\left(\lambda\,\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right)$$

est convergent. Il est non nul ayant tous ses facteurs non nuls et il en résulte que :

$$\prod_{p\in E}\left(1+\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}\right)\leq D'(\lambda),$$

où :

$$D'(\lambda)=D(\lambda)\left[\prod_{|f(p)|>3/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\exp\lambda\left(\frac{1-\mathrm{Re}f(p)}{p}\right)\right]^{-1}.$$

Cela montre que :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}<+\infty$$

et achève la démonstration du théorème 3.

3. Démonstration du théorème 2

Soif f vérifiant les hypothèses du théorème 2. *A fortiori* f vérifie les hypothèses du théorème 3. Il nous suffit donc de prouver que la série $\sum(f(p)-1)/p$ converge et que :

$$\sum_{p}\left(\sum_{r\geq 2}\frac{|f(p^{r})|^{\lambda}}{p^{r}}\right)<\infty.$$

3.1. Convergence de la série $\sum(f(p)-1)/p$

Nous utilisons pour cela la méthode classique de Delange [4].

Il est immédiat que, pour $s>1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{f(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\sum_{r\geqslant 1}\frac{f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^{rs}}\right),$$

le produit étant absolument convergent pour $s>1$. Ainsi :

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{f(n)}{n^s}=\mathscr{H}(s)\exp\sum\frac{f(p)-1}{p^s}.$$

D'après l'hypothèse (7) on a :

$$\lim_{s\to 1}\mathscr{H}(s)\exp\sum\frac{f(p)-1}{p^s}=M(f)\qquad\text{où}\quad M(f)\neq 0.$$

D'après le lemme 4, $\mathscr{H}(s)$ tend vers $\mathscr{H}(1)\neq 0$, quand $s\to 1$, et donc :

$$\lim_{s\to 1}\exp\sum\frac{f(p)-1}{p^s}=\frac{M(f)}{\mathscr{H}(1)}.$$

Il en résulte que $\sum(f(p)-1)/p^s$ tend vers une limite finie quand s tend vers 1.

Posons :

$$\alpha(u)=\sum_{p<e^u}\frac{f(p)-1}{p}$$

et montrons que :

$$\alpha\left(\frac{1}{s-1}\right)-\sum\frac{f(p)-1}{p^s}$$

tend vers zéro quand s tend vers 1. Posons $\sigma=s-1$.

Pour $\sigma>0$, on a :

$$\sum\frac{f(p)-1}{p^s}=\int_0^\infty e^{-t}\alpha(t/\sigma)\,dt.$$

Ainsi :

$$\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\sum\frac{f(p)-1}{p^s}=\int_0^\infty e^{-t}\left(\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)dt.$$

Il nous suffit alors de démontrer que, pour tout t, $e^{-t}\,[\alpha(1/\sigma)-\alpha(t/\sigma)]$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro et que son module est majoré par une fonction de t intégrable sur $(0,\infty)$.

Soient y et z réels satisfaisant à $0<y<z$. On a :

$$|\alpha(y)-\alpha(z)|=\left|\sum_{e^y<p\leqslant e^z}\frac{f(p)-1}{p}\right|.$$

Notons :

$$E_1=E_1(y,z)=\{p \text{ tel que } e^y<p\leqslant e^z \text{ et } |f(p)|\leqslant 3/2\}$$

et

$$E_2=E_2(y,z)=\{p \text{ tel que } e^y<p\leqslant e^z \text{ et } |f(p)|>3/2\}.$$

On a :

$$|\alpha(y)-\alpha(z)|\leqslant\sum_{p\in E_1}\frac{|f(p)-1|}{p}+\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)-1|}{p}.$$

Or :

$$\sum_{p\in E_1}\frac{|f(p)-1|}{p}\leqslant\left(\left(\sum_{p\in E_1}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)\left(\sum_{p\in E_1}\frac{1}{p}\right)\right)^{1/2},$$

$$\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)-1|}{p}\leqslant 2\left(\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}\right)^{1/\lambda}\left(\sum_{p\in E_2}\frac{1}{p}\right)^{1-(1/\lambda)}.$$

Remarquant alors que :

$$\sum_{e^y<p\leqslant e^z}\frac{1}{p}\leqslant\left(\log\frac{z}{y}+d\right),$$

où d est une constante absolue, on en déduit que :

$$|\alpha(y)-\alpha(z)|\leqslant\left(\sum_{p\in E_1}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^{1/2}\left(\log\frac{z}{y}+d\right)^{1/2} +2\left(\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}\right)^{1/\lambda}\left(\log\frac{z}{y}+d\right)^{1-(1/\lambda)}.$$

Ainsi grâce à (11) et (12) on voit que $|\alpha(1/\sigma)-\alpha(t/\sigma)|$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro en tout point t, et que :

$$\left|\alpha\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\alpha\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right|\leqslant c_6(\log|t|+d)^{1/2}+c_7(\log|t|+c_6)^{1-(1/\lambda)},$$

où :

$$c_6=\left(\sum_{|f(p)|\leqslant 3/2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^{1/2}$$

et

$$c_7=\left(\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}\right)^{1/\lambda}.$$

Les fonctions $e^{-t}(\log|t|+d)^{1/2}$ et $e^{-t}(\log|t|+d)^{1-(1/\lambda)}$ étant intégrables sur $[0, +\infty[$, nous obtenons le résultat.

3.2. CONVERGENCE DE LA SÉRIE $\sum_p\sum_{r\geqslant 2}|f(p^r)|^\lambda/p^r$.

Notons $f^*(p)=\mathrm{Inf}(|f(p)|, 3/2)$.

Il est facile de voir que la convergence des séries :

$$\sum\frac{f(p)-1}{p},\quad \sum_{|f(p)|\leqslant 3/2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\quad \text{et}\quad \sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}$$

entraîne la convergence des séries :

$$\sum\frac{f^*(p)^\lambda-1}{p}\qquad \text{et}\qquad \sum\frac{f^*(p)-1}{p}.$$

En effet,

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f^*(p)-1|}{p}=\frac{1}{2}\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{1}{p}<+\infty,$$

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)-1|}{p}\leqslant 2\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}<+\infty.$$

Remarquons alors que :

$$||f(p)|-1|^2\leqslant|f(p)-1|^2$$

et que :

$$||f(p)|-1|^2=|f(p)|^2-1+2(1-|f(p)|),$$

$$|f(p)-1|^2=|f(p)|^2-1+2\,\mathrm{Re}(1-f(p)),$$

on obtient que :

$$\sum\frac{1-|f(p)|}{p}$$

converge et aussi :

$$\sum_{|f(p)|<3/2} \frac{1-|f(p)|}{p} = \sum_{|f(p)|<3/2} \frac{1-f^*(p)}{p}.$$

L'inégalité :

$$c_1 |f(p)-1|^2 \leqslant |f(p)|^\lambda - 1 + \lambda(1-\operatorname{Re} f(p)) \leqslant c_2 |f(p)-1|^2$$

si $|f(p)|<3/2$, entraîne alors la convergence de $\sum_{|f(p)|<3/2}(f^*(p)^\lambda - 1)/p$ et finalement de $\sum (f^*(p)^\lambda - 1)/p$ puisque :

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f^*(p)^\lambda - 1|}{p} \leqslant \left[\left(\frac{3}{2}\right)^\lambda - 1\right] \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{1}{p} < \infty.$$

Mais, pour tout p et tout $s>1$ on a :

$$1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} \leqslant \frac{1}{\mu} \qquad \text{où} \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^\lambda\right)^{-1}.$$

Alors, étant donné k entier $\geqslant 2$, on a pour tout p et tout $s>1$,

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \geqslant 1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} + \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}$$

$$\geqslant \left(1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s}\right)\left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right).$$

Comme, pour $x \geqslant -1/2$, $\log(1+x) \geqslant x - x^2$ on en déduit :

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right)$$

$$\geqslant \left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right) \exp\left(\frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^s}\right).$$

Il en résulte que, pour $s>1$, et y quelconque $\geqslant 2$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_1^{\infty} \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \geqslant \left(\prod_{p \leqslant y} \left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right)\right.$$

$$\left. \times \exp\left(\sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^2}\right)\right).$$

D'où :

$$\sum_{p\leqslant y}\sum_{r=2}^{k}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\leqslant\frac{1}{\zeta(s)}\left(\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}\right)$$

$$\times\frac{1}{\mu}\exp\left(\sum\frac{f^*(p)^{2\lambda}-1}{p^2}-\sum\frac{f^*(p)^\lambda-1}{p^s}\right).$$

Prenant les limites supérieures quand s tend vers 1 on obtient :

$$\sum_{p\leqslant y}\left(\sum_{r=2}^{k}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\right)\leqslant\frac{A}{\mu}\exp\left[\sum\frac{f^*(p)^{2\lambda}+1}{p^2}-\sum\frac{f^*(p)^\lambda-1}{p}\right].$$

Faisons alors tendre k et y vers l'infini on a :

$$\sum_{p}\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\right)<\infty.$$

4. Nous pouvons généraliser le théorème 2 ainsi :

THÉORÈME 4. — *Soit $\lambda>1$ et f une fonction multiplicative vérifiant :*

$$\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}<+\infty \quad \textit{pour tout } s>1, \tag{26}$$

$$\overline{\lim}_{s\to1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}<\infty, \tag{27}$$

il existe deux entiers l, k tels que :

$$\lim_{s\to1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n\equiv l(k)}\frac{f(n)}{n^s} \tag{28}$$

existe et est non nulle.

(29) *Alors : il existe un caractère de Dirichlet χ_1 tel que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :*

$$\sum\frac{\chi_1(p)f(p)-1}{p},\qquad \sum_{|f(p)|\leqslant3/2}\frac{|\chi_1(p)f(p)-1|^2}{p},$$

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p},\qquad \sum_{p}\left(\sum_{r\geqslant2}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\right).$$

(30) *De plus, pour tout p premier ne divisant pas* (l, k) :

$$1+\sum_{k\geq 1}\frac{\chi_1(p)^k f(p^k)}{p^k} \quad \textit{est non nulle.}$$

Réciproquement si les sommes ou séries ci-dessus sont finies ou convergentes alors f est limite périodique B^λ.

Notons $l=l'd$, $k=k'd$ avec $(k', l')=1$.

Soient a et b les fonctions complètement multiplicatives définies par :

$$a(p)=\begin{cases} 1 & \text{si } p\mid d, \\ 0 & \text{si } p\nmid d, \end{cases} \qquad b(p)=\begin{cases} 1 & \text{si } p\nmid d, \\ 0 & \text{si } p\mid d. \end{cases}$$

On voit facilement que $n\equiv l(k)$ équivaut à : $n=n_1 dn_2$ avec $a(n_1 d)=b(n_2)=1$, $(n_1 d, n_2)=1$ et $n_1 n_2\equiv l'(k')$.

Dès lors :

$$\sum_{n\equiv l(k)}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n_1}\frac{f(n_1 d)}{n_1^s d^s}a(n_1 d)\left(\sum_{n_1 n_2\equiv l'(k')}\frac{f(n_2)b(n_2)}{n_2^s}\right),$$

(31) $$\sum_{n\equiv l(k)}\frac{f(n)}{n^s}=\frac{1}{\varphi(k')}\sum_{\chi \bmod k'}\overline{\chi(l')}$$
$$\times\sum_{n_1}\frac{f(n_1 d)a(n_1 d)\chi(n_1)}{n_1^s d_1^s}\left(\sum_{n_2}\frac{f(n_2)b(n_2)\chi(n_2)}{n_2^s}\right).$$

Comme en 2.3, on voit que :

$$\sum_{r\geq 1}\frac{|f(p^r)|}{p^r}<\infty \quad \text{pour tout } p \text{ premier.}$$

Ainsi :

$$\sum_{p,r}\frac{|f(p^r)|a(p^r)}{p^r}=\sum_{p\mid d}\sum_{r\geq 1}\frac{|f(p^r)|}{p^r}<\infty.$$

Il en résulte que :

$$\sum\frac{|f(n)|a(n)}{n}<\infty$$

et donc :

(32) $$\sum_{d\mid n}\frac{|f(n)a(n)|}{n}<+\infty.$$

Nous allons montrer qu'il existe un caractère χ_1 modulo k'. et un seul tel que :

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{f(n)\chi_1(n)b(n)}{n^s} \quad \text{existe et est non nulle.}$$

Ceci entraînera que la fonction $b\chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2, et donc, puisque $b(p)|\chi_1(p)|=1$ sauf pour un nombre fini de nombres premiers, que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :

$$\sum\frac{\chi_1(p)f(p)-1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leq 3/2}\frac{|\chi_1(p)f(p)-1|^2}{p},$$

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}, \qquad \sum_{|\chi_1(p)|b(p)=1}\sum_{r\geq 2}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}.$$

De plus :

$$1+\sum_{k\geq 1}\frac{f(p^k)\chi_1(p^k)}{p^k}$$

est non nulle pour tout $p\,|\,d$. On montrera alors que :

$$\sum_{|\chi_1(p)|b(p)=0}\sum_{r\geq 2}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}<\infty.$$

Considérons les quantités :

$$\overline{\lim}_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\left|\sum\frac{\chi(n)f(n)b(n)}{n^s}\right|.$$

Si elles sont nulles pour tout caractère χ modulo k', on déduirait de (31) et de (32) que :

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n\equiv l(k)}\frac{f(n)}{n^s}=0.$$

Il y a donc au moins un caractère χ_1 modulo k', pour lequel la quantité plus haut est non nulle. Supposons que ce soit encore vrai, pour un autre caractère χ_2 modulo k'. On aurait, en appliquant le théorème 3 aux fonctions $b\chi_1 f$ et $b\chi_2 f$,

$$\sum_{|f(p)|\leq 3/2}\frac{|\chi_1(p)f(p)-1|^2}{p}<\infty,$$

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}<+\infty,$$

$$\sum_{|f(p)|\leq 3/2}\frac{|\chi_2(p)f(p)-1|^2}{p}<\infty,$$

puisque, sauf pour un nombre fini de p, $|\chi_1(p)|b(p)=|\chi_2(p)|b(p)=1$. Ces inégalités impliquent à leur tour que :

$$\sum_{1/2<|f(p)|\leq 3/2}\frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p}<\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{|f(p)|<1/2}\frac{1}{p}<+\infty.$$

Comme, d'autre part,

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p}<\infty$$

entraîne que :

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{1}{p}<\infty,$$

on voit que :

$$\sum\frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p}<+\infty.$$

Mais, si $\chi_1\neq\chi_2$, il existe m premier avec k' tel que $\chi_1(m)\neq\chi_2(m)$. Si $p\equiv m(k')$,

$$|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2=|\chi_1(m)-\chi_2(m)|^2>0$$

et comme :

$$\sum_{p\equiv m(k')}\frac{1}{p}=+\infty,$$

on a :

$$\sum\frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p}=+\infty,$$

ce qui est contradictoire.

Ainsi pour tout χ modulo k' $\chi\neq\chi_1$,

$$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{\chi(n)f(n)b(n)}{n^s}=0.$$

L'hypothèse (28) et (31), (32), entraînent alors que :

(33) $$\lim_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{\chi_1(n)f(n)b(n)}{n^s}$$

existe et est non nulle et par conséquent la fonction $b\chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2.

Montrons maintenant que :

$$\sum_{\chi_1(p)b(p)=0}\sum_{r\geq 1}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}<\infty.$$

Pour $s>1$:

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{f(n)\chi_1(n)b(n)}{n^s}\right|\leqslant\left(\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|}{n^s}\right)^{1/\lambda}.$$

Ainsi, (33) entraîne que :

$$\varliminf_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}>0.$$

Or,

$$\left(\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}\right)\times\prod_{\chi_1(p)b(p)=0}\left(1+\sum_{r\geq 1}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}$$

et donc :

$$\varlimsup_{s\to 1}\prod_{\chi_1(p)b(p)=0}\left[1+\sum_{r\geq 1}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right]\leqslant\left[\varlimsup_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}\right]\left[\varliminf_{s\to 1}\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}\right]^{-1};$$

quantité finie d'après (27).

On en déduit le résultat désiré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DABOUSSI (H.). — Caractérisation des fonctions multiplicatives $pp\ B^\lambda$ à spectre non vide, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXX, fasc. 3, 1980, p. 141-166.

[2] DABOUSSI (H.) et DELANGE (H.). — On a theorem of P. D. T. A. Elliot on multiplicative functions, *J. London Math. Soc.*, (2), vol. 14, 1976, p. 345-356.

[3] DABOUSSI (H.) et DELANGE (H.). — Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, série A, p. 657-660.

[4] DELANGE (H.). — Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 78, 1961, p. 273-304.

[5] DELANGE (H.). — Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, 281, 1975, p. 997-1000.

[6] ELLIOT (P. D. T. A.). — A mean value theorem for multiplicative functions, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 31, 1975, p. 418-438.