JACQUELINE DETRAZ

Classes de Bergman de fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 259-268
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__259_0>

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 259-268.

CLASSES DE BERGMAN DE FONCTIONS HARMONIQUES

PAR

JACQUELINE DETRAZ (*)

RÉSUMÉ. — Soit Ω un ouvert C^1 de $\mathbf{R}^n$ et $p>0$. Nous montrons que si une fonction harmonique u dans Ω a une dérivée dans une direction transverse à $\partial\Omega$ qui appartient à $L^p(\Omega)$, le gradient de u est aussi dans $L^p(\Omega)$.

ABSTRACT. — Let Ω be an open C^1 set of $\mathbf{R}^n$ and p positive. We show that if an harmonic function u in Ω has a derivative in some transverse direction to $\partial\Omega$ which belong to $L^p(\Omega)$, the gradient of u is also in $L^p(\Omega)$.

1. Le théorème de Riesz affirme que si une fonction u harmonique dans le disque unité vérifie :

$$\sup_r \int \left| \frac{\partial u}{\partial r}(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < \infty \qquad \text{pour} \quad p > 1$$

alors on a aussi :

$$\sup_r \int \left| \frac{\partial u}{\partial \theta}(re^{i\theta}) \right|^p d\theta < \infty.$$

Des extensions de ce théorème ont fait l'objet de nombreux travaux dont l'étude des espaces H^p du demi-plan $\mathbb{R}^n_+$ et des transformées de Riesz [3].

Plus généralement, si on considère un domaine Ω borné de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière est C^1 et une fonction u harmonique sur Ω telle que sa dérivée dans la direction normale à $\partial\Omega$ a une limite dans $L^p(\partial\Omega)$ pour $p>1$, on démontre que le gradient ∇u de u a la même propriété ([8], [2]).

Ici, nous étudierons si l'appartenance à $L^p(\Omega)$ de la dérivée dans une certaine direction d'une fonction harmonique u entraîne que le gradient de u est aussi dans $L^p(\Omega)$, pour $p>0$.

(*) Texte reçu le 18 juin 1980, révisé le 29 septembre 1980.

Jacqueline DETRAZ, Université de Provence, U.E.R. de Mathématiques, 3, place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

Ce problème a été abordé par HARDY-LITTLEWOOD [6] et par DUREN [1] dans le cas des fonctions conjuguées sur le disque unité et par FORELLI-RUDIN [4]. Les résultats que nous obtenons sont valables pour tout $p>0$ et ne font pas appel à la théorie des intégrales singulières contrairement au théorème de Riesz et à ses extensions qui concernent des propriétés d'intégrabilité sur $\partial\Omega$. On note $\delta(x)$ la distance d'un point x de Ω à $\partial\Omega$, et pour $p>0$ et $a\in\mathbb{R}$ on définit :

$$L_a^p(\Omega)=\left\{f,\ \text{mesurable sur } \Omega,\ \int_\Omega |f(x)|^p\delta^a(x)\,dx<\infty\right\}.$$

On notera :

$$\|f\|_{L_a^p}=\left(\int |f(x)|^p\delta^a(x)\,dx\right)^{1/p} \qquad \text{si} \quad p\geqslant 1$$

et :

$$\|f\|_{L_a^p}=\int |f(x)|^p\delta^a(x)\,dx \qquad \text{si} \quad p<1.$$

Nous obtiendrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit Ω un domaine borné à frontière C^1 de $\mathbb{R}^n$. Soit L un champ de vecteurs unitaires sur $\overline{\Omega}$, continu sur un voisinage de $\partial\Omega$, transverse à $\partial\Omega$ en tout point de $\partial\Omega$. Soit $p>0$. Soit U une fonction harmonique sur Ω telle que la dérivée $\partial U/\partial L=\nabla U.L$ est dans $L_a^p(\Omega)$ alors :*

1° *U appartient à $L_{a-p}^p(\Omega)$ si $a-p>-1$;*

2° *le gradient ∇U de U appartient à $L_a^p(\Omega)$ si $a>-1$.*

Dans la suite, C désignera indistinctement toute constante ne dépendant que de n et p; A désignera toute constante ne dépendant que de n et p et de la géométrie C^1 des domaines considérés.

2. Résultats préliminaires

(A) Soit u une fonction harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie alors les propriétés de sous-moyenne suivantes [3] :

$$(\star) \qquad |u(x)|^p\leqslant \frac{C}{R^n}\int_{B_R}|u(y)|^p\,dy,$$

$$(\star\star) \qquad |\nabla u(x)|^p\leqslant \frac{C}{R^{n+p}}\int_{B_R}|u(y)|^p\,dy$$

pour toute boule B_R de rayon R, de centre x, incluse dans Ω. On en déduit le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit u une fonction harmonique dans Ω; alors :*

$$\|\nabla u\|^p_{L^p_{a+p}} \leqslant C\|u\|_{L^p_a} \quad \textit{pour tout } a\in\mathbf{R}.$$

En effet, en utilisant l'inégalité (★★) et le fait que si $y\in B_{\delta(x)/2}$ alors :

$$\frac{\delta(x)}{2}\leqslant\delta(y)\leqslant\frac{3}{2}\delta(x),$$

on a :

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\delta^a(x)\,dx\leqslant C\int_\Omega \delta^{a-n}(x)\int_{B_{\delta(x)/2}}|u(y)|^p\,dy\,dx$$
$$\leqslant C\int_\Omega |u(y)|^p\delta^{a-n}(y)\int_{B'}dx\,dy\leqslant C\int|u(y)|^p\delta^a(y)\,dy.$$

(B) Soit ρ une fonction C^1 positive, définie sur la boule unité fermée de $\mathbf{R}^{n-1}$, nulle sur la sphère unité. On définit une « lunule » S dans $\mathbf{R}^n$ par :

$$S=\{(x, y);\ -\rho(x)<y<\rho(x);\ x\in\mathbf{R}^{n-1},\ \|x\|<1\}.$$

PROPOSITION 1. — *Soit u une fonction harmonique sur S; soit $p>0$ alors :*

$$\|u(x, y)-u(x, 0)\|_{L^p_a}\leqslant A\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^p_{a+p}} \qquad \textit{si}\quad a>-1.$$

Démonstration. — 1° Remarques :
(*a*) si $\delta(x, y)$ représente la distance d'un point (x, y) de S à ∂S, on a :

$$\rho(x)-y\leqslant A\,\delta(x, y) \qquad \text{si}\quad y>-\frac{\rho(x)}{2}.$$

En effet, soit $(x', y'=\rho(x'))$ un point de ∂S on a :

$$\rho(x)-y\leqslant A\,|x-x'|+|\rho(x')-y|\leqslant A\,|(x, y)-(x', \rho(x'))|,$$

d'où le résultat si $y>0$.

Si :

$$y>-\frac{\rho(x)}{2}, \qquad \rho(x)-y\leqslant C(\rho(x)+y)\leqslant A\,\delta(x, -y)=A\,\delta(x, y);$$

(*b*) si $p \geqslant 1$, la proposition 1 est une simple conséquence de l'inégalité suivante ([7], p. 245-246) :

$$\int_0^\infty s^a \left[\int_s^A |f(t)|\,dt\right]^p ds \leqslant \left[\frac{p}{a+1}\right]^p \int_0^A s^{a+p} |f(s)|^p ds \qquad \text{si} \quad a > -1,$$

où l'on pose :

$$A = \rho(x), \qquad t = \rho(x) - \rho, \qquad s = \rho(x) - y \qquad \text{et} \qquad f(y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y).$$

On va donc maintenant se restreindre au *cas* $p < 1$.

2° Posons :

$$y_k = (1 - 2^{-k})\,y, \qquad k \geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}
|u(x, y) - u(x, 0)|^p &\leqslant \left[\sum\nolimits_{k \geqslant 1} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}(x, \rho)\right| d\rho\right]^p \\
&\leqslant \sum\nolimits_{k \geqslant 1} (y_k - y_{k-1})^p \sup\nolimits_{y_{k-1} \leqslant \rho \leqslant y_k} \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}(x, \rho)\right|^p \\
&\leqslant C \sum \int_{y_{k-1}}^{y_k} (y - \rho)^{p-1} \sup\nolimits_{s \in I(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)\right|^p d\rho \\
&\leqslant C \int_0^y (\rho(x) - \rho)^{p-1} \sup\nolimits_{s \in I(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)\right|^p d\rho,
\end{aligned}$$

où :

$$I(\rho) = [\beta_1(\rho), \beta_2(\rho)] \qquad \text{avec} \quad \beta_1(\rho) = \sup(2\rho - \rho(x), 0)$$

et :

$$\beta_2(\rho) = \frac{\rho + \rho(x)}{2}.$$

D'où en posant :

$$S_+ = \{(x, y),\ 0 < y < \rho(x);\ \|x\| < 1\},$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_+} &|u(x, y) - u(x, 0)|^p \delta^a(x, y)\,dx\,dy \\
&\leqslant A \int |u(x, y) - u(x, 0)|^p (\rho(x) - y)^a\,dx\,dy \\
&\leqslant A \int_{S_+} (\rho(x) - \rho)^{p-1} \sup\nolimits_{s \in I(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)\right|^p \int_\rho^{\rho(x)} (\rho(x) - y)^a\,dy\,dx\,d\rho \\
&\quad A \int_{S_+} (\rho(x) - \rho)^{a+p} \sup\nolimits_{s \in I(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)\right|^p dx\,d\rho \qquad \text{si} \quad a > -1.
\end{aligned}$$

3° $\partial u/\partial y$ est harmonique, donc vérifie l'inégalité ($\star$).

Prenons $R=\gamma(\rho(x)-\rho)$ avec γ assez petit pour que :

$$\gamma(\rho(x)-\rho)\leqslant \operatorname{dist}(I(\rho), \partial\Omega).$$

Alors :

$$\sup_{s\in I(\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial s}(x, s)\right|^p \leqslant \frac{A}{(\rho(x)-\rho)^n}\int_{D(x,\rho)}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, t)\right|^p d\alpha\, dt$$

où $D(x, \rho)$ est l'union des boules de rayon R, centrées aux ponts de $I(\rho)$.

Si $(\alpha, t)\in D(x, \rho)$ on a :

$$\beta_1(\rho)-R\leqslant t\leqslant \beta_2(\rho)+R,$$

d'où :

$$\frac{\rho(x)-\rho}{2}-R-A|x-\alpha|\leqslant\rho(\alpha)-t\leqslant\rho(x)-\rho+R+A|x-\alpha|.$$

On peut choisir γ assez petit pour que si $(\alpha, t)\in D(x, \rho)$ on a :

$$t>-\frac{\rho(\alpha)}{2} \qquad \text{et} \qquad 0<A'<\frac{\rho(\alpha)-t}{\rho(x)-\rho}<A.$$

Alors si $(\alpha, t)\in D(x, \rho)$, $\delta(\alpha, t)$ vérifie l'inégalité de la remarque 1 (a) et de plus (x, ρ) appartient à un ensemble $D'(\alpha, t)$ de mesure $\leqslant A[\rho(\alpha)-t]^n$.

4° Si $a>-1$ on a alors, d'après les deux paragraphes précédents :

$$\int_{S_+}|u(x, y)-u(x, 0)|^p\delta^a(x, y)\,d\lambda(x, y)$$

$$\leqslant A\int_{t>-(\rho(\alpha)/2)}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, t)\right|^p(\rho(\alpha)-t)^{a+p-n}\left(\int_{D'(\alpha,t)}dx\,dy\right)d\alpha\, dt$$

$$\leqslant A\int_S\left|\frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, t)\right|^p\delta^{a+p}(\alpha, t)\,d\alpha\, dt.$$

Par symétrie, on obtient la même inégalité pour $S_-=\{(x, y),\ -\rho(x)<y<0\}$ et donc le résultat cherché.

3. Démonstration du théorème 1

1° Soit λ une fonction définissant le domaine $\Omega=\{\zeta;\ \lambda(\zeta)<0\}$. Pour tout ζ de $\partial\Omega$ et tout α positif assez petit, on considère le plan P perpendiculaire à la direction $L(\zeta)$ transverse à $\partial\Omega$ et passant par le point $\zeta\pm\alpha L(\zeta)$ intérieur à Ω à la distance α de ζ. On note Γ le 1/2 espace déterminé par P et contenant y.

Pour tout α assez petit, il existe une boule B de centre y de rayon $A.\alpha$ $(A>1)$ une fonction g positive, nulle au voisinage de ζ dont la norme $\mathscr{C}^1$ ne dépend que de Ω telles que :

– $\overline{B}\cap P\subset\Omega$;

– si $\mu\in\overline{B}\cap P$ alors $(\lambda+g)(\mu)=0$ si et seulement si $\mu\in\partial B\cap P$ on pose $S_+(\zeta)=\{\lambda+g<0\}\cap\Gamma$ et $S_-(\zeta)$ le symétrique de S_+ par rapport à P.

On définit alors la lunule $S(\zeta)=S_+(\zeta)\cup S_-(\zeta)$ et on choisit α assez petit pour que $S(\zeta)$ soit inclus dans Ω.

Soit S une telle lunule, par un changement de variable linéaire, on se ramène à la situation géométrique de la proposition 1, Oy étant l'image de $L(\zeta)$ et on note l l'image du champ de vecteur L. $\mathscr{S}$ l'image de S s'écrit :

$$\mathscr{S}=\{(x, y);\ x\in R^{n-1},\ \|x\|<1;\ -\rho(x)<y<\rho(x)\},$$

où la norme C^1 de ρ ne dépend que de la norme C^1 de λ.

La fonction harmonique U est transformée en une fonction harmonique sur $\mathscr{S}$ telle que $\mathscr{U}(x, 0)$ et $\nabla\mathscr{U}(x, 0)$ soit bornée (car $S\cap P\subset\Omega$).

2° Écrivons :

$$\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial l}=\pm\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i^2}\,\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial x_i}.$$

(a) Si $a-p>-1$ en utilisant le lemme 1 puis la proposition 1 on a :

$$\|\nabla\mathscr{U}\|_{L_a^p}\leqslant C\|\mathscr{U}\|_{L_{a-p}^p}\leqslant A\left\|\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial y}\right\|_{L_a^p}+\|\mathscr{U}(x, 0)\|_{L_{a-p}^p}C,$$

$\mathscr{U}(x,0)$ étant borné donc dans $L_{a-p}^p(\mathscr{S})$ si $a-p>-1$, U sera dans $L_{a-p}^p(\mathscr{S})$ dès que $\partial\mathscr{U}/\partial y$ est dans $L_a^p(\mathscr{S})$. Or :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial l}\right\|_{L_a^p}&\geqslant\left\|\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial y}\right\|_{L_a^p}\inf_{\mathscr{S}}\Big(\sqrt{1-\textstyle\sum_1^{n-1}\varepsilon_i^2}\Big)-\|\nabla\mathscr{U}\|_{L_a^p}\sup_{\mathscr{S}}|\varepsilon_i|\\&\geqslant\left\|\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial y}\right\|_{L_a^p}\Big[\inf_{\mathscr{S}}\sqrt{1-\textstyle\sum\varepsilon_i^2}-\sup_{\mathscr{S}}|\varepsilon_i|A\Big]-\sup_{\mathscr{S}}|\varepsilon_i|C\|\mathscr{U}(x, 0)\|_{L_{a-p}^p}.\end{aligned}$$

L étant un champ de vecteurs continu au voisinage de $\partial\Omega$ on peut choisir α assez petit pour que la variation de l sur $\mathscr{S}$ vérifie :

$$\inf_{\mathscr{S}}\sqrt{1-\textstyle\sum_1^{n-1}\varepsilon_i^2}-\sup_{\mathscr{S}}|\varepsilon_i|A>\frac{1}{2},$$

$\partial \mathscr{U}/\partial l$ étant dans $L_a^p(\mathscr{S})$ par hypothèse, on en déduit que $\partial \mathscr{U}/\partial y$ et donc $\nabla \mathscr{U}$ est dans $L_a^p(\mathscr{S})$.

(*b*) Si $a>-1$ on pose $u_i=\partial \mathscr{U}/\partial x_i(x_n=y)$ on a $\partial u_i/\partial y=\partial u_n/\partial x_i$.

En utilisant la proposition 1, puis le lemme 1 on a :

$$\|u_i(x, y)-u_i(x, 0)\|_{L_a^p}\leqslant A\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right\|_{L_{a+p}^p}\leqslant A\|u_n\|_{L_a^p} \quad \text{si} \quad i\leqq n-1.$$

On en déduit que si u_n est dans $L_a^p(\mathscr{S})$, $\nabla \mathscr{U}$ est aussi dans $L_a^p(\mathscr{S})$, car $u_i(x, 0)$ est borné donc dans $L_a^p(\mathscr{S})$ or :

$$\left\|\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial l}-\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i u_i(x, 0)\right\|_{L_a^p}\geqq\|u_n\|_{L_a^p}[\inf\sqrt{1-\sum\varepsilon_i^2}-A\sup\sum\varepsilon_i].$$

En prenant comme dans (*a*), α assez petit, on en déduit que u_n et donc $\nabla \mathscr{U}$ est dans $L_a^p(\mathscr{S})$.

3° $\overline{\mathscr{S}}(\zeta)$ étant un voisinage de ζ dans $\overline{\Omega}$ pour tout ζ de $\partial\Omega$, il existe donc un nombre fini de lunules d'union V tel que $\Omega\setminus V$ soit compact. En appliquant ce qui précède à chacune de ces lunules, on déduit que U est dans $L_{a-p}^p(V)$ si $a>p-1$ et ∇U est dans $L_a^p(V)$ si $a>-1$ ces fonctions étant bornées sur $\Omega\setminus V$. Le théorème est démontré.

4. Compléments

(A) Fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$

On obtient comme corollaire du théorème 1 le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit $f=u+iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ à frontière C^1. Soit $p>0$ et $a>-1$:*

1° *si $f'\in L_{a+p}^p(\Omega)$, f est dans $L_a^p(\Omega)$;*

2° *si u est dans $L_a^p(\Omega)$, f est dans $L_a^p(\Omega)$.*

En effet, dans ce cas $|f'|=|\nabla f|=|\nabla u|=|\nabla v|$.

Si f' est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$, $\partial f/\partial L$ est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$ pour tout champ de vecteur vérifiant les hypothèses du théorème 1 et donc f est dans $L_a^p(\Omega)$.

Si u est dans $L_a^p(\Omega)$, $|\nabla f|=|\nabla u|$ est dans $L_{a+p}^p(\Omega)$ d'après le lemme 1 donc f est dans $L_a^p(\Omega)$ d'après le théorème 1.

(B) CAS D'OUVERTS NON BORNÉS

On note Γ le demi-plan $\Gamma = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0\}$.

On considère des systèmes de fonctions conjuguées $F = (u_0, \ldots, u_n)$ tels que les fonctions u_i sont harmoniques dans Γ et vérifient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{avec } x_0 = y).$$

Pour $p > 0$ on note B^p l'ensemble de ces systèmes tels que :

$$\int_\Gamma |F|^p \, d\lambda < \infty$$

et b^p l'ensemble des fonctions harmoniques u telles que :

$$\int_\Gamma |u|^p \, d\lambda < \infty.$$

De façon parallèle aux espaces $H^p(\Gamma)$ avec $p > 1$ [9], on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *L'application de B^p sur b^p qui à $F = u_0 \ldots u_n$ associe u_0 est un isomorphisme pour tout $p > 0$.*

1° Remarquons que toute fonction u de b^p vérifie $(\star)$, donc :

$$|u|^p(x, y) < \frac{C}{y^p} \int_\Gamma |u|^p;$$

u est borné dans tout demi-plan Γy_1 où $\Gamma y_1 = \{(x, y),\ y \geq y_1\}$ pour tout y_1 et u est dans $L^{p'}(\Gamma y_1)$ avec $p' > p$ on en déduit [9] :

(*a*) u est égal à l'intégrale de Poisson :

$$u(x, y_1 + y) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} u(t, y_1) \frac{y}{(|x-t|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \, dt;$$

(*b*) si on prend $p' > \sup(p, 1)$ on a :

$$\sup_{y \geq y_1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p \, dx < \infty.$$

2° (*a*) si F est dans B^p alors :

$$u_i(x, y_1+y)=C_n\int_{\mathbb{R}_n}\frac{x_i-t_i}{[|x-t|^2+y^2]^{(n+1)/2}}u_0(t, y_1)\,dt, \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

et F est déterminé de façon unique par u_0;

(*b*) réciproquement, si u_0 est dans b^p, on définit $u_1, \ldots, u_n$ par les formules ci-dessus.

Alors $F=(u_0, \ldots, u_n)$ est indépendant du choix de y_1 et appartient à $H^{p'}(\Gamma y_1)$ si $p'>\sup(p, 1)$ pour tout y_1.

En particulier, $u_i(x, y)\to_{y\to\infty}0$ et donc :

$$|u_i(x, y)|\leqslant\int_y^\infty\left|\frac{\partial u_i}{\partial\rho}(x, \rho)\right|d\rho\leqslant\int_y^\infty|\nabla u_0(x, \rho)\,d\rho.$$

Il s'agit de montrer que u_i est dans $L^p(\Gamma)$. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1. Indiquons simplement que pour $p<1$ on établit en posant $y_k=2^k y$ $(k\geqslant 0)$ que :

$$|u_i(x, y)|^p\leqslant C\int_y^\infty \rho^{p-1}\sup_{\rho/2<t<2\rho}|\nabla u_0(x, t)|^p\,d\rho.$$

Comme on a :

$$\sup_{\rho/2<t<2\rho}|\nabla u_0(\alpha, t)|^p \leqslant\frac{C}{\rho^{n+p}}\int_{|x-\alpha|<\rho/4,\ \rho/4<t<2\rho+(\rho/4)}|u(x, t)|^p\,d\lambda(x, t).$$

Le théorème de Fubini permet à nouveau de conclure.

(C) Frontière non régulière

La condition C^1 sur $\partial\Omega$ n'est pas nécessaire; le théorème 1 reste valable par exemple si Ω est un cube de $\mathbb{R}^n$. Si $\partial\Omega$ est C^1 par morceaux, on peut ne pas obtenir les conclusions du théorème, par exemple dans le cas où $\partial\Omega$ a des points de rebroussement extérieurs, comme l'indique l'exemple suivant [5].

Dans $\mathbb{C}$, considérons l'ouvert :

$$\Omega=\left\{(r, \theta);\ -\frac{r}{2}<\theta<\frac{r}{2};\ 0<r<\frac{\pi}{2}=R\right\}.$$

Si le théorème 2 était valable, il existerait une constante Γ telle que pour toute fonction holomorphe $f=u+iv$ sur Ω avec $\int_\Omega v\,d\lambda=0$ on ait :

$$(\star\star\star) \qquad \int_\Omega v^2\,d\lambda\leqslant\Gamma\int_\Omega u^2\,d\lambda.$$

Posons alors :

$$f_n(z)=u_n(z)+iv_n(z)=i\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} z^{(1/n)-3/2},$$

$$\int_\Omega u_n^2\,d\lambda+\int_\Omega v_n^2\,d\lambda=\int_\Omega |f_n(z)^2\,r\,dr\,d\theta=\frac{2}{n}\int_0^R r^{(2/n)-1}\,dr\rightarrow_{n\to\infty}1,$$

$$\int_\Omega u_n^2\,d\lambda-\int_\Omega v_n^2\,d\lambda=\mathrm{Re}\int_\Omega f_n^2(z)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=-\frac{2}{n}\int_0^R r^{(2/n)-1}\,\frac{2\sin((2/n)-3)(r/2)\,dr}{(2/n)-3}\,dr\rightarrow -1$$

et de même $\int_\Omega f_n(z)\,r\,dr\,d\theta\rightarrow 0.$

On en déduit que :

$$\frac{\int_\Omega v_n^2}{\int_\Omega u_n^2}\rightarrow\infty \quad \text{et} \quad \frac{\int(v_n-v_n\,d\lambda)^2\,d\lambda}{\int u_n^2\,d\lambda}\rightarrow\infty.$$

D'où la contradiction avec l'inégalité (★★★) ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DUREN. — *Theory of H^p-spaces*, Academic Press, 1970.

[2] FABES, JODEIT and RIVIÈRE. — Potential techniques for boundary value problems on C^1 domains, *Acta Math.*, t. 141, 1978, p. 165-186.

[3] FEFFERMAN and STEIN. — H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, t. 129, 1972, p. 137-193.

[4] FORELLI and RUDIN. — Projections on spaces of holomorphic fonctions in balls, *Indiana Univ. J.*, t. 24, n° 6, 1974, p. 593-602.

[5] FRIEDICHS. — On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables, *T.A.M.S.*, t. 41, 1937, p. 321-364.

[6] HARDY and LITTLEWOOD. — Some properties of conjugate functions, *J. Reine Angew Math.*, t. 167, 1931, p. 405-423.

[7] HARDY, LITTLEWOOD et POLYA. — *Inequalities*, Cambridge, 1967.

[8] KORANYI and VAGI. — Singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, t. XXV, 1971, p. 575-648.

[9] STEIN. — *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, 1970.