BULLETIN DE LA S. M. F.

C. SUNYACH

Capacité et théorie du renouvellement. I

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 283-296
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__283_0>

Bull. Soc. math. France
109, 1981, p. 283-296.

CAPACITÉ ET THÉORIE DU RENOUVELLEMENT. I

PAR

C. SUNYACH (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de décrire explicitement les marches aléatoires transientes sur un groupe localement compact non commutatif dont le noyau potentiel n'est pas nul à l'infini; c'est le problème du renouvellement. Pour ce faire nous montrons qu'il y a avantage à étudier les capacités relatives aux mesures invariantes qui adhèrent au filtre $(\varepsilon_n\, G)_{x\to\infty}$, où G est le noyau potentiel.

ABSTRACT. — In this article our goal is to describe explicitely a transient random walk the kernel of which is non zero at infinity, on a non commutative locally compact group. It is the renewal problem. To do that, we show that it is useful to work with the capacities relative to the invariant measures which are cluster points of the net $(\varepsilon_x\, G)_{x\to\infty}$, where G is the potential kernel.

Soit E, un espace localement compact; P, un noyau positif sur E tel que tout compact soit de potentiel borné et $G=\sum_{n=0}^{\infty} P^n$.

Du point de vue analytique la théorie du renouvellement est l'étude du comportement à l'infini des potentiels des compacts, c'est-à-dire de l'adhérence vague de l'ensemble $\{\varepsilon_x\, G;\ x\in E\}=\mathscr{G}$ dans le cône des mesures P-excessives. Plus précisément nous nous intéressons ici aux deux problèmes suivants :

1. Détermination de $\overline{\mathscr{G}}\setminus\mathscr{G}$;

2. Étant donné $\lambda\in\overline{\mathscr{G}}\setminus\mathscr{G}$, déterminer les suites $(x_n)\subset E$ telles que $(\varepsilon_{x_n}\, G)$ converge vaguement vers λ.

(*) Texte reçu le 17 mars 1980, révisé le 12 janvier 1981.

C. SUNYACH, Université de Paris-VI, U.E.R. n° 48, Laboratoire de Calcul des Probabilités, 4, place Jussieu, Tour n° 56, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/283/$ 5.00

Plus généralement, si s est une fonction P-surharmonique ne s'annulant pas sur le complémentaire d'un compact, on peut étudier la structure à l'infini de G/s. Lorsque s est un potentiel, il s'agit alors de la théorie de la frontière de Martin (relative à $r=(I-P)\,s$). Nous n'aborderons pas ici ce problème plus général.

Nous nous intéressons particulièrement au cas des marches aléatoires sur un groupe localement compact. Le fait qu'il existe sur un groupe une marche aléatoire dont le noyau potentiel n'est pas nul à l'infini (i. e. $\overline{\mathscr{G}} \neq \mathscr{G} \cup \{0\}$) est une condition très restrictive et nous élucidons dans cet article la structure de ces groupes.

Elle était connue pour les groupes commutatifs ([9], chap. 5), pour les groupes de Lie connexe unimodulaire ([2] et [6]) et enfin pour les groupes localement compacts à base dénombrable $\mathbb{G}$ tels que $\mathbb{G}/\mathbb{G}_0$ soit compact, $\mathbb{G}_0$ étant la composante connexe de l'élément neutre (Laure Élie [3], [4] et [5]).

Nous présentons ici le cas général (notamment le cas des groupes totalement discontinus n'avait pas été traité jusqu'ici) en nous appuyant sur l'étude des capacités relatives aux valeurs d'adhérence à l'infini du potentiel.

Dans le premier chapitre nous avons développé les résultats généraux — valables pour toute chaîne de Markov — qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre nous traitons le cas des marches aléatoires sur un groupe localement compact *unimodulaire* [i. e. ce groupe opère transitivement sur E et G commute avec l'action du groupe]. Le résultat — conjecturé par Brunel et Revuz dans [2] — est que si $\mathscr{G}$ possède une valeur d'adhérence non nulle alors le groupe est une extension de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ par un groupe compact.

Ces résultats ont été annoncés dans [10].

Dans le troisième chapitre — qui sera la deuxième partie de cet article — nous traiterons le cas des marches aléatoires sur un groupe localement compact *non-unimodulaire*.

Les résultats et les techniques de démonstration justifient le traitement disjoint du cas unimodulaire et du cas non-unimodulaire. Précisons enfin que nous ne traiterons ici que le cas des marches aléatoires étalées.

Je tiens à remercier pour leurs remarques durant l'élaboration de ces travaux, Ph. Bougerol, A. Brunel, L. Élie et surtout D. Revuz qui en a décripté plusieurs versions antérieures.

Chapitre I
Mesures excessives de capacité finie et théorie du renouvellement

Nous désignerons par E, un espace localement compact dénombrable à l'infini; $\mathscr{A}$, la tribu engendrée par les fonctions continues, $\mathscr{K}(E)$, l'ensemble des fonctions réelles continues nulles hors d'un compact ($\mathscr{K}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) et $b(E)$ l'ensemble des fonctions réelles boréliennes bornées sur E.

Sauf mention du contraire, une mesure sur E est toujours une mesure de Radon et la convergence des mesures est la convergence vague.

Soit P un noyau mesurable sous-markovien sur $(E, \mathscr{A})$ tel que Gf soit continu et borné pour tout $f \in \mathscr{K}_+$. Ces hypothèses ne seront pas rappelées dans la suite (nous ne supposons pas que Pf est continue si $f \in \mathscr{K}$).

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des mesures $\varepsilon_x G$ $(x \in E)$. Si $\lambda \in \mathscr{G}$, on a $|\lambda(f)| \leqslant \|Gf\|$ pour tout $f \in \mathscr{K}$. Nous sommes amenés à étudier la quantité $\sup\{|\lambda(f)|/\|Gf\| : f \in \mathscr{K}, f \neq 0\}$ que nous désignerons par $c(\lambda; P)$, ou $c(\lambda)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, et que nous appellerons la capacité de la mesure λ (relativement au noyau P). Le théorème qui va suivre motivera notre terminologie.

LEMME 0. — *Soient C, un cône convexe; K, un espace compact et ξ (resp. U), une application linéaire de C dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$) tels que :*

$$\forall f \in C, \quad \xi(f) \leqslant \sup_K U(f).$$

Alors il existe une probabilité α sur K telle que :

$$\forall f \in C, \quad \xi(f) \leqslant \int U(f)\, d\alpha.$$

Preuve. — Dans $\mathscr{C}(K)$ le cône convexe $\{U(f) - \xi(f) : f \in C\}$ est disjoint du cône convexe ouvert $\{g \in \mathscr{C}(K) : \sup g < 0\}$. Donc il existe une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(K)$, soit $\mu \neq 0$, telle que si $g \in \mathscr{C}(K)$ et $\sup g < 0$, alors $\mu(g) \leqslant 0$, et que $\mu(U(f) - \xi(f)) \geqslant 0$ pour tout $f \in C$. D'où $\xi(f) \leqslant \int Uf\, d\alpha$ où $\alpha = \mu/\mu(1)$ est une probabilité de Radon sur K (il est clair que $\mu(1) \neq 0$ car $\mu \geqslant 0$ et $\mu \neq 0$).

Rappelons que si m est une mesure P-excessive et $A \in \mathscr{A}$ une partie P-transiente on appelle capacité de A relativement à m la borne supérieure de l'ensemble des réels $m(\varphi)$, φ parcourant l'ensemble des fonctions $\mathscr{A}$-mesurables positives, nulles sur A^c et telles que $G\varphi \leqslant 1$. On la désignera par $c_m(A)$ [$c_m(A; P)$ en cas d'ambiguïté] (*voir* [9], chap. 2, ex. 3.15 et le lemme 1 ci-dessous).

THÉORÈME 1. — 1° *Pour toute mesure P-excessive m, $c(m)$ est la borne supérieure des capacités des ensembles $\mathscr{A}$-mesurables de potentiel borné. En particulier l'application $\lambda \to c(\lambda)$ est linéaire.*

2° *L'enveloppe convexe vaguement fermée de $0 \cup \mathscr{G}$ est l'ensemble des mesures P-excessives de capacité inférieure ou égale à* 1.

Preuve. — 1° Soit U un ouvert relativement compact non vide. Pour tout $f \in \mathscr{K}$ à support dans U, on a :

$$m(f) \leqslant c(m) \| Gf \| = c(m) \sup_U Gf.$$

D'après le lemme 0, il existe une probabilité θ sur $\overline{U}$ telle que :

$$m \leqslant c(m)\,\theta G \quad \text{sur } U, \qquad \text{d'où} \quad c_m(U) \leqslant c(m).$$

LEMME 1. — *Soit φ une fonction $\mathscr{A}$-mesurable positive, nulle sur le complémentaire d'un ensemble $A \in \mathscr{A}$ de potentiel borné et telle que $G|\varphi|$ soit fini, et m une mesure excessive telle que $m(A) < +\infty$. Alors :*

$$m(\varphi) \leqslant c_m(A) \sup (G\varphi)^+.$$

Preuve. — On peut supposer $A = E$, en considérant la chaîne de Markov des passages successifs dans A. Dans ce cas on aura :

$$m(\varphi) = m(I-P)\,G\varphi \leqslant m(1-P\,1) \sup (G\varphi)^+,$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

Si U est un ouvert relativement compact et si $f \in \mathscr{K}$ a son support dans U on a, d'après le lemme 1, $m(f) < c(U) \| Gf \|$, d'où :

$$c(m) \leqslant \sup_U c_m(U).$$

2° Soit $\mathscr{F}$ l'enveloppe convexe vaguement fermée de $0 \cup \mathscr{G}$. Si notre deuxième assertion était inexacte, il existerait une mesure excessive de capacité inférieure ou égale à 1, soit m, qui ne serait pas dans $\mathscr{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach il existerait $f \in \mathscr{K}$ tel que $m(f) = 1$ et que $\mu Gf \leqslant 1/2$ pour toute mesure positive μ à support fini et de masse inférieure ou égale à 1. D'où $m(f) > \sup(Gf)^+$. Or nous avons $m(f)/c(m) \leqslant \sup(Gf)^+$ d'après le lemme précédent, ce qui est contradictoire car la capacité de m est inférieure ou égale à 1.

On désignera par $\mathscr{M}(E)$ l'ensemble des mesures de Radon sur E muni de la topologie vague.

D'autre par $\mathscr{E}(P)$ (resp. $\mathscr{E}_c(P)$, $\mathscr{E}_{c \leqslant 1}(P)$) désigne l'ensemble des mesures excessives (resp. excessives et de capacité finie, excessives et de capacité $\leqslant 1$), $\mathscr{I}(P)$ désigne l'ensemble des mesures invariantes :

$$\mathscr{I}_c(P) = \mathscr{I}(P) \cap \mathscr{E}_c(P), \qquad \mathscr{I}_{c \leqslant 1}(P) = \mathscr{I}(P) \cap \mathscr{E}_{c \leqslant 1}(P)$$

et $\mathscr{I}_e(P)$ désigne l'ensemble des points extrémaux invariants non nuls de $\mathscr{E}_{c \leqslant 1}(P)$ (il s'agira toujours des mesures invariantes positives).

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous remplacerons $\mathscr{E}(P)$ par $\mathscr{E}$, etc.

THÉORÈME 1'. — *On a* $\mathscr{I}_e \subset \overline{\mathscr{G}}$.

En effet $\{0\} \cup \overline{\mathscr{G}}$ est un fermé dont l'enveloppe convexe fermée est $\mathscr{E}_{c \leqslant 1}$, donc il contient les points extrémaux de cet ensemble.

PROPOSITION 1. — *Pour que* $\lambda \in \mathscr{I}_e$ *il faut et il suffit qu'elle appartienne à une génératrice extrémale du cône des mesures invariantes* $\mathscr{I}$ *et que sa capacité soit* 1.

En effet les génératrices extrémales de $\mathscr{I}_c$ sont celles de $\mathscr{I}$ qui sont contenues dans $\mathscr{I}_c$ puisque toute mesure invariante majorée par une mesure de capacité finie est elle-même de capacité finie.

Dans les propositions suivantes, nous analysons plus en détail la structure de $\mathscr{I}_e$, en vue du chapitre II.

PROPOSITION 2. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Il existe* $(x_n) \subset E$ *tel que* $(\varepsilon_{x_n} G)$ *ait une valeur d'adhérence invariante non nulle.*

2° *Il existe* $(x_n) \subset E$ *tel que* $(\varepsilon_{x_n} G)$ *ait une valeur d'adhérence* ν *qui n'est pas un potentiel.*

3° $\mathscr{I}_c(P) \neq \{0\}$.

4° $\mathscr{I}_e(P) \neq \emptyset$.

Preuve. — 2° $\Rightarrow$ 3°. Car la partie invariante de ν est un élément non nul de $\mathscr{I}_c(P)$.

$3° \Rightarrow 4°$. Si $\mathscr{I}_e(P)=\emptyset$ alors $\{0\} \cup \mathscr{G}$ est l'ensemble des éléments extrémaux de $\mathscr{E}_{c\leqslant 1}$, donc tout élément de $\mathscr{E}_{c\leqslant 1}$ est un potentiel.

$4° \Rightarrow 1°$. D'après le théorème 1'.

PROPOSITION 3. — *Soient E un espace localement compact à base dénombrable, $\mathscr{E}$ un cône convexe de mesures de Radon positives sur E, dont l'ordre propre sera désigné par $\prec$, et $m \in \mathscr{E}$.*

Soit $C=\{\lambda \in \mathscr{E} : \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda \prec m\}$. L'ensemble D des génératrices extrémales de $\mathscr{E}$ recontrant C est au plus dénombrable.

Preuve. — Soit F une partie finie de D. Pour tout $f \in F$ il existe $\lambda_f \in C \cap f$; or la borne supérieure de $F'=\{\lambda_f : f \in F\}$ est $\sum_{\lambda \in F'} \lambda$, d'où $\sum_{\lambda \in F'} \lambda \prec m$ et *a fortiori* $\sum_{\lambda \in F'} \lambda \leqslant m$.

Soit (V_n) une base dénombrablc d'ouverts relativement compacts de E. On a $\sum_{\lambda \in F'} \lambda(V_n) \leqslant m(V_n)$ pour tout n d'où, en posant :

$$a(\lambda)=\sum_{n \in \mathbb{N} \text{ et } m(V_n)>0} \lambda(V_n)/2^n m(V_n),$$

l'inégalité $\sum_{\lambda \in F'} a(\lambda) \leqslant 2$. Ceci montre que l'ensemble des $\lambda \in \bigcup_{F \subset D} F'$ tels que $a(\lambda)$ soit strictement positif est au plus dénombrable. Mais $a(\lambda)$ est strictement positif pour tout $\lambda \in \mathscr{E}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \leqslant m$, donc D est dénombrable.

PROPOSITION 4. — *On suppose que E possède une base dénombrable d'ouverts. S'il existe une mesure excessive m telle que pour tout $f \in \mathscr{K}_+$ on ait* $\limsup_{x \to \infty} Gf(x) \leqslant m(f)$, *alors $\mathscr{I}_e$ est au plus dénombrable. Si de plus m est de capacité finie alors $\mathscr{I}_e$ est fini et le nombre de ses éléments est inférieur ou égal à la partie entière de $c(m)$.*

Preuve. — Nous supposerons que $\mathscr{I}_e \neq \emptyset$, sinon le corollaire est évident. Soit $\lambda \in \mathscr{I}_e$. D'après le théorème 1' il existe une suite $(x_n) \subset E$ telle que la suite $(\varepsilon_{x_n} G)$ converge vaguement vers λ. D'autre part (x_n) converge vers l'infini car λ est invariante. Donc d'après l'hypothèse, on a $\lambda \leqslant m$.

Il résulte de la proposition précédente que $\mathscr{I}_e$ est au plus dénombrable.

Si m est de capacité finie, soit F une partie finie de $\mathscr{I}_e$. Dans la démonstration de la proposition précédente on a vu que $\sum_{\lambda \in F} \lambda \leqslant m$, donc $N_F \leqslant c(m)$ en désignant par N_F le nombre d'éléments de F.

PROPOSITION 5. — *Pour que* 0 *soit adhérente à $\mathscr{G}$ il faut et il suffit que pour tout $f \in \mathscr{K}_+$ la borne inférieure de Gf soit nulle. Ceci est réalisé lorsque E n'est pas une partie P-transiente, en particulier si P est markovien.*

En effet si 0 n'est pas dans l'adhérence de $\mathscr{G}$, il existe $f \in \mathscr{K}_+$ tel que $\langle \lambda, f \rangle \geqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathscr{G}$, car sur le cône des mesures de Radon positives la base de filtre $\{|\langle \cdot, f \rangle| \leqslant 1\}_{f \in \mathscr{K}_+}$ est une base de voisinages de 0. D'où $Gf \geqslant 1$ ce qui montre que la borne inférieure de Gf n'est pas nulle. La suffisance de la condition est évidente.

Soient $f \in \mathscr{K}_+$ et $a \geqslant 0$ tels que $a \leqslant Gf$. On a donc :

$$\star \qquad a P^n 1 \leqslant P^n Gf,$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Si E n'est pas une partie transiente, il existe x tel que $\inf_n P^n 1(x) > 0$, d'où $a = 0$ d'après $\star$, ce qui signifie que la borne inférieure de Gf est 0.

Conclusion. — Le théorème 1′ répond partiellement à la première question que l'on se posait puisqu'on a identifié une partie de $\overline{\mathscr{G}} \setminus (\mathscr{G} \cup 0)$. Nous verrons que pour les marches aléatoires, on a en fait l'égalité :

$$\overline{\mathscr{G}} = \{0\} \cup \mathscr{G} \cup \mathscr{J}_e.$$

Pour la deuxième question, nous ne développerons pas de théorie générale mais y répondrons pour les marches aléatoires.

Chapitre II
Marches aléatoires à renouvellement non nul sur un groupe unimodulaire

Le but de ce chapitre est de caractériser les groupes unimodulaires sur lesquels existe une marche aléatoire étalée dont le renouvellement n'est pas nul (*voir* le théorème 3 ci-dessous).

On désignera par $\mathbb{G}$ un groupe localement compact à base dénombrable et m une mesure de Haar à droite de $\mathbb{G}$. Si f est une application définie sur $\mathbb{G}$, on désigne par ${}^x f$ [resp. f^x] l'application $y \to f(x.y)$ [resp. $y \to f(y.x)$]. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{G}$. On désigne par $\mathbb{G}/H$ [resp. $\mathbb{G}\setminus H$] l'espace homogène des classes $x.H$ [resp. $H.x$].

Si λ est une mesure et f une fonction sur $\mathbb{G}$ on désigne par $f \star \lambda$ [resp. $\lambda \star f$] la fonction $x \to \int f(x.y)\,\lambda(dy)$ $\left[\text{resp. } x \to \int f(y.x)\,\lambda(dy)\right]$.

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{G}$. On dit qu'une chaîne de Markov sur $\mathbb{G}$ est une marche aléatoire droite de loi μ si elle admet $P(x, .)=\varepsilon_x \star \mu$ pour probabilité de transition. La mesure potentiel est notée $\overline{G}$. On dit qu'une probabilité μ est de type II si elle est transiente et s'il existe $(x_n)\subset \mathbb{G}$ tel que 0 ne soit pas adhérent à $(\varepsilon_{x_n} G)$. Nous dirons que μ est adaptée (à $\mathbb{G}$) si le sous-groupe engendré par le support de μ est dense.

Dans toute la suite nous supposerons (sans le rappeler) que μ est étalée c'est-à-dire qu'il existe une puissance de convolution de μ qui n'est pas étrangère à m. Rappelons que si $\mathbb{G}$ est unimodulaire et si μ est transiente il existe $t\in]1, +\infty[$ et une mesure bornée θ tels que :

$$\overline{G}=\varepsilon_e+\mu+\mu\star\mu+\ldots \leqslant tm+\theta \tag{0}$$

[*voir* [9], chap. 5, th. 5.1].

LEMME 1. — *Soit $f\in b(G)$ telle que $Pf=f$ m-presque partout. Il existe une fonction réelle continue bornée $\overline{f}$ telle que $\overline{f}=f$ m-presque partout et que $P\overline{f}=\overline{f}$.*

En effet on sait qu'il existe $g\in b(G)$ telle que $Pg=g$ et $f=g$ m-presque partout, ceci ayant pour tout noyau markovien P. Mais puisque μ est étalée, g est continue ([9], chap. 5, prop. 1.6).

THÉORÈME 3. — *Pour qu'il existe une probabilité adaptée de type II sur le groupe unimodulaire $\mathbb{G}$ il faut et il suffit que l'ensemble K des éléments compacts de $\mathbb{G}$, soit un sous-groupe distingué compact et que $\mathbb{G}/K$ soit isomorphe à* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

Si $\mathbb{G}/K$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$) alors $\mathbb{G}$ est isomorphe au produit direct (resp. à un produit semi-direct) de K par $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

Nous ne nous occuperons pas ici de la démonstration de la suffisance de la condition ci-dessus car elle est tout à fait analogue à celle qui est connue pour les groupes commutatifs (*voir* [9], chap. 5).

La démonstration de la nécessité repose sur les idées suivantes. Nous commençons par montrer que si $\mathscr{G}$ possède une valeur d'adhérence non nulle alors toute mesure de Haar est de capacité finie (propositions 1, 2 et 3). Ensuite on montre que si une mesure de Haar est de capacité finie alors le groupe est une extension de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ par un groupe compact (propositions 4 à 8).

On remarquera que c'est cette propriété qui distingue, par exemple, les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n (n\geqslant 2)$ pour ce qui nous concerne. Voici rapidement comment on peut le voir.

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ possédant un moment d'ordre 1 et telle que $\int t\,\mu(dt)>0$, et m la mesure de Lebesgue. Le fermé $A=]-\infty,0[$ est transient et on a $c(m;\mu)=c_m(A)$ car P commute avec les translations. L'inégalité :

$$c_m(A)\leqslant\int_A (1-P\,1_A)\,dm=\int_{A^c} t\,\mu(dt),$$

montre que $c(m)$ est fini.

Par contre soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}^n (n\geqslant 2)$ possédant un moment d'ordre 1 et telle que $\int t_1\,\mu(dt)>0$, et m la mesure de Lebesgue. Le fermé $A=\{t_1\leqslant 0\}$ est transient et on a $c(m;\mu)=c_m(A)$ pour la même raison. Mais comme A est invariant par les translations dont la première coordonnée est nulle, la capacité de A est soit nulle soit infinie. Mais $c(m)$ n'est pas nul, donc la capacité de A est infinie et $c(m)=+\infty$.

PROPOSITION 1. — *Soit μ une probabilité transiente sur $\mathbb{G}$. Si m est de capacité finie alors $\mathbb{G}$ est unimodulaire.*

Preuve. — Supposons $c(m)$ fini. On a $|m(f)|\leqslant c(m)\,\|Gf\|$ pour tout $f\in K$. Si Δ désigne la fonction modulaire de G, pour tout $x\in G$ nous aurons :

$$|\Delta(x)\,m(f)|=|\varepsilon_x\star m(f)=|m({}^x f)|\leqslant c(m)\,\|G({}^x f)\|=c(m)\,\|Gf\|,$$

ce qui montre que Δ est bornée. Donc G est unimodulaire.

PROPOSITION 2. — *Soit μ une probabilité sur un groupe G, adaptée. Toute mesure de Radon λ appartenant à une génératrice extrémale de $\mathscr{I}$ et majorée par m est proportionnelle à m.*

Preuve. — Supposons $\lambda\neq 0$. Quitte à la multiplier par une constante strictement positive, on peut supposer que λ est un point extrémal du convexe des mesures invariantes majorées par m. Pour tout $x\in\mathbb{G}$ posons $\lambda_x=1/\Delta(x)\,\varepsilon_x\star\lambda$. On a $\lambda_x\leqslant m$, $\lambda_x\in\mathscr{I}$ et λ_x appartient à une génératrice extrémale de $\mathscr{I}$. D'après la proposition 1.3 seule une infinité au plus dénombrable des mesures λ_x sont distinctes. Posons $I=\{x:\lambda_x=\lambda\}$; c'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}/I$ est au plus dénombrable. Soit (x_n) une suite, finie ou non, telle que $\mathbb{G}=\bigcup_n x_n I$ et que les parties $x_n I$ soient à deux disjointes. On a $\sum_n\lambda_{x_n}\leqslant m$ car les mesures λ_{x_n} appartiennent à des génératrices extrémales deux à deux distinctes. La mesure $\Lambda=\sum_n\lambda_{x_n}$ est telle que $1/\Delta(x)\,\varepsilon_x\star\Lambda=\Lambda$ pour tout $x\in\mathbb{G}$, donc il existe $t\in]0,1]$ tel que $\Lambda=tm$.

Étant donné que λ est invariante il existe $\Phi \in b^+(\mathbb{G})$ telle que $\lambda = \Phi m$ et $\hat{P}\Phi = \Phi$ m-presque partout. en désignant par $\hat{P}$ le noyau $\varepsilon_. \star \hat{\mu}$. L'égalité $\sum_n \lambda_{x_n} = tm$ équivaut au fait que $\sum_n {}^{x_n^{-1}}\varphi = t$ m-presque partout. Nous pouvons supposer que Φ est continue car μ est étalée (lemme 1).

Si π désigne l'application canonique de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{G}/I$, il existe une fonction positive φ sur $\mathbb{G}/I$ telle que $\Phi = \varphi \circ \pi$ et que :

$$\sum_{x \in \mathbb{G}/I} \varphi(x) < +\infty.$$

De plus si c désigne la mesure de comptage sur $\mathbb{G}\diagdown I$, la mesure φc est μ-invariante bornée. En particulier la chaîne induite sur $\mathbb{G}\diagdown I$ possède au moins une classe récurrente positive. D'après [7] cette classe est nécessairement $\mathbb{G}\diagdown I$ tout entier. Or c est elle-même μ-invariante, donc φ est constante, et par suite il en est de même de Φ.

LEMME 2. — *Soit $\mathbb{G}$ un groupe unimodulaire et μ une probabilité (étalée). On a $\overline{\mathscr{G}}\diagdown\mathscr{G} \subset \mathscr{I}$.*

En effet soit $\lambda \in \overline{\mathscr{G}}\diagdown\mathscr{G}$. Il existe $(x_n) \subset \mathbb{G}$ telle que $\lambda = \lim \varepsilon_{x_n} G$ et la suite (x_n) converge vers l'infini car $\lambda \in \mathscr{K}$. Soit $f \in \mathscr{K}$. On a :

$$\varepsilon_{x_n} G = \varepsilon_{x_n} + \int \varepsilon_{x_n} \overline{G} \star \varepsilon_y \mu(dy),$$

et la suite $\varepsilon_{x_n} \star \overline{G} \star \varepsilon_y(f)$ est bornée d'après la proposition 2.1 de [2]. D'où $\lambda(f) = \lambda(Pf)$ d'après le théorème de Lebesgue.

PROPOSITION 3. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° $c(m; \mu) < +\infty$ (¹);

2° $c(m; \hat{\mu}) < +\infty$;

3° μ *est de type II et* $\mathbb{G}$ *est unimodulaire.*

S'il en est ainsi, on a $\overline{\mathscr{G}} = \mathscr{G} \cup \{0\} \cup \{m/c(m)\}$ et les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes.

Preuve. — On sait que si A est une partie transiente pour μ et $\hat{\mu}$, on a $c_m(A; \mu) = c_m(A; \hat{\mu})$. Donc $c(m; \mu) = c(m; \hat{\mu})$ ce qui montre que 1° et 2° sont équivalentes. Si μ est de type II il existe $\lambda \in \mathscr{I}_e(\mu)$ (lemme 2 et théorème I.1) et il existe $t > 0$ tel que $\lambda \leqslant tm$ d'après (0). Donc, d'après la proposition 2, m

(¹) On a posé $c(m; P) = c(m; \mu)$.

est proportionnelle à λ, d'où $c(m; \mu) < +\infty$. Réciproquement si $c(m; \mu) < +\infty$, c'est que $\mathcal{J}_c(\mu)$ n'est pas vide, donc μ est de type II d'après la proposition I.2.

Nous venons de montrer que si μ est de type II alors m appartient à une génératrice extrémale. Donc les fonctions $\hat{\mu}$-harmoniques bornées sont constantes d'après le lemme 1. Mais $\hat{\mu}$ est aussi de type II donc les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes. De plus $m/c(m) \in \mathcal{J}_e$, donc $\mathcal{G} \cup \{0\} \cup \{m/c(m)\} \subset \mathcal{G}$ et d'après [2] ces deux ensembles sont en fait égaux.

Dans toute la suite on supposera que le groupe $\mathbb{G}$ est unimodulaire, μ adaptée, étalée et de type II.

Proposition 4. — *Soit (x_n) une suite convergeant vers l'infini et $f \in \mathcal{K}$. Alors les suites $(x \to Gf(x_n.x) - Gf(x_n))$ et $(x \to Gf(x.x_n) - Gf(x_n))$ convergent uniformément sur tout compact vers* 0.

En particulier si (k_n) est une suite relativement compacte on a :

$$\lim_n (Gf(x_n.k_n) - Gf(x_n)) = \lim_n (Gf(k_n.x_n) - Gf(x_n)) = 0.$$

Preuve. — Pour la deuxième suite voir le corollaire 2.3 de [2] ([2]). La suite $({}^{x_n}f)$ est équicontinue sur tout compact car, pour tout compact L, ${}^{x_n}f$ est nulle sur L pour n assez grand, donc ${}^{x_n}(Gf) = G({}^{x_n}f)$ est équicontinue sur tout compact. Or on a :

$$G({}^{x_n}f) = {}^{x_n}f + \int G({}^{x_n}f)(y)\,\mu(dy)$$

et $\| G({}^{x_n}f) \| = \| Gf \|$, donc pour toute sous-suite (y_n) de (x_n) telle que $({}^{y_n}(Gf))$ converge simplement, la limite est une fonction harmonique bornée, donc constante et par suite $(x \to Gf(y_n.x) - G(y_n.x))$ converge simplement vers 0 donc uniformément sur tout compact car $({}^{y_n}(Gf))$ est équicontinue sur tout compact.

Si $x \in G$, on désigne par $H(x)$ le sous-groupe fermé engendré par x. Rappelons que $H(x)$ est soit compact (on dit que x est compact), soit isomorphe à $\mathbb{Z}$ (algébriquement, donc topologiquement car il est fermé).

Proposition 5. — *Tout groupe unimodulaire portant une probabilité de type II possède un élément non compact.*

([2]) On prendra garde au fait que dans [2], P commute avec les translations à droite.

Compte tenu de la proposition précédente et du fait que pour tout f on a $\lim_{x\to\infty} Gf(x)\,Gf(x^{-1})=0$ qui résulte de [1], la démonstration est la même que dans le cas commutatif ([9], chap. 5, prop. 4.3).

PROPOSITION 6. — *Soit a un élément non compact de* $\mathbb{G}$. *Lorsque n converge vers* $+\infty$ *ou bien* $(\varepsilon_{a^n} G)$ *converge vers* 0, *ou bien* $(\varepsilon_{a^n} G)$ *converge vers* $m/c(m)$. *Dans le premier cas* $(\varepsilon_{a^{-n}} G)$ *converge vers* $m/c(m)$ *et dans le deuxième cas vers* 0, *lorsque n converge vers* $+\infty$.

Preuve. — On sait que d'après [2] les seules valeurs d'adhérence possibles de $(\varepsilon_{a^n} G)$ lorsque n converge vers $+\infty$ sont 0 et $m/c(m)$. Supposons que 0 et $m/c(m)$ sont adhérentes. Soient $f\in\mathscr{K}$ et $\varepsilon>0$. Il existe une suite (φ_n) convergeant vers $+\infty$ telle que $Gf(a^{\varphi_n})\leqslant\varepsilon$ et $Gf(a^{\varphi_n+1})\geqslant(m(f)/c(m))-\varepsilon$. Or $(Gf(a^n)-Gf(a^{n+1}))$ converge vers 0, ce qui est contradictoire si $m(f)>0$ et si ε est assez petit.

On sait d'après [2] que $(\varepsilon_x G+\varepsilon_{x^{-1}} G)$ converge vers $m/c(m)$ lorsque x converge vers l'infini. Donc si $\lim_{n\uparrow+\infty}\varepsilon_{a^n} G=0$ alors $\lim_{n\uparrow+\infty}\varepsilon_{a^{-n}} G=m/c(m)$.

PROPOSITION 7. — *Soit* $\mathbb{G}$ *un groupe localement compact unimodulaire portant une probabilité de type II. Alors pour tout élément non compact x, l'espace homogène* $\mathbb{G}\diagdown H(x)$ *est compact.*

Preuve. — D'après la proposition précédente on peut supposer que $\lim_{n\uparrow+\infty}\varepsilon_{x^n} G=0$ et que $\lim_{n\uparrow+\infty}\varepsilon_{x^{-n}} G=m/c(m)$.

Soient $f\in\mathscr{K}_+$ telle que $f\neq 0$ et (z_n) une suite de $\mathbb{G}$. On sait que $\lim_{n\downarrow-\infty}(\varepsilon_{x^n} G-\varepsilon_{x^n z_k} G)=0$ pour tout k, donc pour tout entier $n\geqslant 0$ il existe un entier φ_n tel que $|(m(f)/c(m))-Gf(x^{\varphi_n}.z_n)|\leqslant 1/n$; nous poserons $t_n=x^{\varphi_n}.z_n$.

Il existe une suite $(h_n)\subset\mathbb{Z}$ telle que :

$$(1)\qquad \begin{cases} Gf(x^{h_n-1}.t_n)>\dfrac{1}{2}\,\dfrac{m(f)}{c(m)}, \\[2ex] Gf(x^{h_n}.t_n)\leqslant\dfrac{1}{2}\,\dfrac{m(f)}{c(m)}. \end{cases}$$

pour tout n assez grand. En effet pour tout n il existe un plus petit entier positif h_n tel que :

$$Gf(x^{n'}.t_n)\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{m(f)}{c(m)}\quad\text{pour tout } n'\geqslant h_n,$$

car :

$$\lim_{p\uparrow+\infty} Gf(x^p.t_n)=0\qquad\text{et}\qquad \lim_{p\downarrow-\infty} Gf(x^p.t_n)=\frac{m(f)}{c(m)}.$$

Supposons que $(H(x).z_n)$ ne soit pas relativement compacte dans $\mathbb{G}\setminus H(x)$. La suite $(x^{h_n-1}.t_n)$ contiendrait une sous-suite $(x^{h_{n'}-1}.t_{n'})$ convergeant vers l'infini car $x^{h_n-1}.t_n \in H(x).z_n$. Donc :

$$\lim_{n'}\{Gf(x^{h_{n'}-1}.t_{n'})-Gf(x^{h_{n'}}.t_{n'})\}=0,$$

ce qui contredit (1). Donc $(H(x).z_n)$ est relativement compacte.

Toute suite de $\mathbb{G}\setminus H(x)$ étant relativement compacte, $\mathbb{G}\setminus H(x)$ est compact.

Rappelons le résultat suivant ([8], th. I).

PROPOSITION 8. — *Soit $\mathbb{G}$ un groupe localement compact tel qu'il existe un semi-groupe topologique localement compact S, dont $\mathbb{G}$ est l'ensemble des éléments inversibles muni de la topologie induite, tel que $S\setminus\mathbb{G}$ soit réduit à un seul élément et que $\mathbb{G}$ soit dense dans S.*

Alors l'ensemble des éléments compacts de $\mathbb{G}$, soit K, est un sous-groupe distingué compact et $\mathbb{G}\setminus K$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. Si $\mathbb{G}\setminus K$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$) alors $\mathbb{G}$ est isomorphe au produit direct (resp. à un produit semi-direct) de K par $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{Z}$).

Preuve du théorème 3. — Posons $m'=m/c(m)$. Désignons par S l'ensemble $\mathscr{G}\cup\{m'\}$ muni de la topologie vague; nous munirons $\mathscr{G}$ de la structure de groupe obtenue en transportant celle de $\mathbb{G}$ par l'application $x \to \varepsilon_x G$. Nous poserons $\lambda.m'=m'.\lambda=m'$ pour tout $\lambda\in S$; l'ensemble S est ainsi muni d'une structure de semi-groupe.

L'application $x \to \varepsilon_x\mathbb{G}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{G}$ sur $\mathscr{G}$. Elle est évidemment continue; soit $(x_n)\subset\mathbb{G}$ et $x\in G$ tels que $(\varepsilon_{x_n}G)$ converge vers $\varepsilon_x G$. La suite (x_n) est relativement compacte puisque les seules valeurs d'adhérence à l'infini sont 0 et m'. Si y est adhérente à (x_n) on a $\varepsilon_y G=\varepsilon_x G$, d'où $y=x$ ce qui montre que (x_n) converge vers x. Donc la multiplication sur $S\times S$ est continue en tout point (λ,μ) tel que λ et $\mu\in\mathscr{G}$.

Soient $(x_n)\in\mathbb{G}$ une suite telle que $(\varepsilon_x G)$ converge vers m' et $x\in\mathbb{G}$. On a $\lim_n\varepsilon_{x_n.x}G=\lim_n\varepsilon_{x.x_n}G=m'$ (prop. 4) dont la multiplication sur $S\times S$ est continue en tout point (λ,m') et (m',λ) pourvu que $\lambda\in\mathscr{G}$.

Il reste à voir que si (x_n) (resp. (x'_n)) est une suite de $\mathbb{G}$ telle que $(\varepsilon_{x_n}G)$ (resp. $(\varepsilon_{x'_n}G)$) converge vers m', alors $(x_n.x'_n)$ a la même propriété.

Soit a un élément non compact de $\mathbb{G}$. D'après les propositions 7 et 18, chapitre 9, paragraphe 2 de [1], il existe un compact L de $\mathbb{G}$ tel que $\mathbb{G}=L.H(a)$. Il existe donc $(k_n)\subset L$ (resp. $(k'_n)\subset L$) et $(\varphi_n)\subset\mathbb{Z}$ (resp. $(\varphi'_n)\subset\mathbb{Z}$)

tels que $(x_n)=(k_n.a^{\varphi_n})$ (resp. $(x'_n)=(k'_n.a^{\varphi'_n})$), et il existe $(k''_n)\subset L$ et $(\varphi''_n)\subset Z$ tels que :

$$(a^{\varphi_n}.k'_n)=(k''_n.a^{\varphi''_n}). \tag{2}$$

Nous pouvons supposer $\lim_{n\uparrow+\infty}\varepsilon_{a^n}G=m'$ (prop. 6); or $(\varepsilon_{a^{\varphi_n}}G)$ et $(\varepsilon_{a^{\varphi'_n}}G)$ convergent vers m' d'après la proposition 4 donc (φ_n) et (φ'_n) convergent vers $+\infty$ (prop. 6). D'après la proposition 4 $(\varepsilon_{a^{\varphi_n}.k'_n}G)$ converge vers m', donc d'après (2) et la proposition 4, $(\varepsilon_{a^{\varphi''_n}}G)$ converge vers m', donc (φ''_n) converge vers $+\infty$. Or $(x_n.x'_n)=(k_n.k''_n.a^{\varphi_n+\varphi''_n})$, $(\varphi_n+\varphi''_n)$ converge vers $+\infty$ $(k_n.k''_n)$ est relativement compacte, donc $(\varepsilon_{x_n.x'_n}G)$ converge vers m'.

Conclusion. — Considérons maintenant un groupe unimodulaire sur lequel existe une probabilité étalée adaptée et de type II. D'après les propositions 3 à 7 il vérifie les hypothèses de la proposition 8. Donc il a la structure décrite dans la conclusion de cette proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki (N.). — *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1958.

[2] Brunel (A.) et Revuz (D.). — Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens, *Israël J. Mat.*, t. 20, 1975, p. 46-56.

[3] Elie (L.). — Etude du renouvellement pour certains groupes résolubles, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 280, série A, 1975, p. 1149-1152.

[4] Elie (L.). — Renouvellement sur les groupes moyennables, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 284, série A, 1977, p. 555-558.

[5] Elie (L.). — *Théorie du renouvellement pour les groupes tels que G/G_0 soit compact* (à paraître).

[6] Guivarc'h (Y.), Keane (M.) et Roynette (B.). — Marches aléatoires sur les groupes de Lie, *Lecture Notes in Mat.*, t. 624, Springer, 1977, Berlin.

[7] Hennion (M.) et Roynette (B.). — Un théorème de dichotomie pour les marches aléatoires sur les espaces homogènes. *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285, série A, 1977, p. 399-401.

[8] Hofmann (K. H.). — Locally compact topological semi-groups in which a subgroup with compact complement is dense. *Trans. Amer. Mat. Soc*, t. 106, 1963, p. 19-51.

[9] Revuz (D.). — *Markov chains*, North Holland, Amsterdam, Oxford, 1975.

[10] Sunyach (C.). — Sur la théorie du renouvellement pour les groupes unimodulaires, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 284, série A, 1977, p. 547-549.