BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Les automorphismes analytiques isométriques d'une variété complexe normée

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 49-73
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__49_0>

Bull. soc. math. France.
110, 1982, p. 49-73

LES AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES ISOMÉTRIQUES D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE NORMÉE

PAR

JEAN-PIERRE VIGUÉ (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, je généralise un certain nombre de propriétés du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné au groupe $G(X)$ des automorphismes analytiques isométriques d'une variété complexe normée X. Je montre en particulier un théorème d'unicité, et je donne une caractérisation très simple de la topologie de $G(X)$. J'étudie ensuite l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de X. La fin de cet article est consacrée à l'étude des variétés normées symétriques.

ABSTRACT. — In this paper, I generalize some properties of the group of analytic automorphisms of a bounded domain to the group of analytic isometric automorphims of a complex normed manifold X. In particular, I prove an uniqueness Theorem and I give a very simple characterization of the topology of $G(X)$. I study also the Lie algebra of infinitesimal transformations of X. The end of this paper is devoted to the study of normed symmetric manifolds.

Introduction

L'étude du groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ a été faite par H. CARTAN ([4] et [5]) qui a montré que le groupe $G(D)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est un groupe topologique, et que $G(D)$ peut être muni, de façon naturelle, d'une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie. En particulier, ces résultats ont permis à E. CARTAN [3] de donner une classification complète des domaines bornés symétriques de $\mathbb{C}^n$.

W. KAUP [8] a montré que, si X est une variété analytique complexe de dimension finie, munie d'une norme ν sur le fibré tangent vérifiant certaines propriétés, la plupart des résultats démontrés par H. CARTAN pour les

(*) Texte reçu le 18 décembre 1980, révisé le 27 avril 1981.

Jean-Pierre VIGUÉ, Université Pierre-et-Marie-Curie, U.E.R. de Mathématiques, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

automorphismes des domaines bornés s'étendent au groupe $G(X)$ des automorphismes analytiques isométriques de X. [Le cas où D est un domaine borné apparaît alors comme un cas particulier, à condition de munir le fibré tangent $T(D)$ à D d'une norme invariante par les automorphismes analytiques de D : il suffit par exemple de prendre la métrique infinitésimale de Carathéodory.]

Dans [14] et [15], j'ai étudié le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E. J'ai muni $G(D)$ de la topologie de la convergence uniforme locale, qui en fait un groupe topologique complet; j'ai montré que $G(D)$ a aussi une structure de groupe de Lie réel, et que, en général, la topologie sous-jacente est plus fine que la topologie de la convergence uniforme locale. Une partie de ces résultats furent établis, de manière indépendante, par H. UPMEIER [13] dans le cas plus général d'une variété banachique complexe X munie d'une norme v sur le fibré tangent et du groupe $G(X)$ des automorphismes analytiques isométriques de X. On a obtenu ainsi un bon nombre de résultats sur les groupes considérés, et on a étudié les domaines bornés et les variétés normées symétriques (*voir* [6], [7], [9] à [12], [15] et [16]).

En ce qui concerne les variétés normées symétriques, W. KAUP, dans son article [10] est obligé de supposer de plus que la variété X est homogène. Pour se débarrasser de cette hypothèse technique, il est nécessaire de généraliser au cas des variétés normées un certain nombre de résultats de mon article [15]. Ces résultats permettent, dans un sens extrêmement précis, de caractériser les automorphismes analytiques isométriques de X par leur valeur en un point, et par l'application linéaire tangente en ce point. De même, je donnerai une caractérisation similaire pour l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de X. Ces résultats qui sont nouveaux, même en dimension finie, sont un outil important pour l'étude des variétés normées symétriques. Comme application de ces résultats, je montrerai que toute variété normée symétrique est homogène.

Les démonstrations s'inspirent dans une certaine mesure de celles de mon article [15]. Cependant, il faut prendre quelques précautions supplémentaires dans les calculs, et je pense qu'il sera agréable, pour ceux qui s'intéressent à ces questions, d'avoir des énoncés précis valables dans le cadre plus général des variétés normées.

[M. Wilhem KAUP m'a convaincu de la nécessité de ce travail, et je le remercie de l'intérêt qu'il m'a manifesté.]

1. Définitions et rappels (*voir* [10] et [13]).

Soit X une variété analytique banachique complexe que je supposerai toujours connexe. Soit $\pi : T(X) \to X$ le fibré tangent à X.

DÉFINITION 1.1. — On dit qu'une application :

$$\nu : \quad T(X) \to \mathbb{R},$$

est une norme sur $T(X)$ si ν vérifie les propriétés suivantes :

(i) ν est une fonction semi-continue inférieurement;

(ii) pour tout $x \in X$, $\nu|_{T_x(X)}$ est une norme sur $T_x(X)$;

(iii) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans X, un isomorphisme analytique u de U sur un ouvert D d'un espace de Banach complexe E, et des constantes c et C strictement positives telles que, quitte à identifier $T(U)$ à $D \times E$ à l'aide de la carte u, on ait, pour tout $y \in D$, et pour tout $v \in E$:

$$c \| v \| \leqslant \nu(y, v) \leqslant C \| v \|.$$

Si X est une variété munie d'une norme ν, on dit que (X, ν) est une variété normée.

Soient (X_1, ν_1) et (X_2, ν_2) deux variétés normées. On dit qu'une application holomorphe $f : X_1 \to X_2$ est contractante si, pour tout $x \in X_1$, pour tout $v \in T_x(X_1)$, on a :

$$\nu_2(T_x(f).v) \leqslant \nu_1(v).$$

Je noterai $\mathscr{H}_c(X_1, X_2)$ l'ensemble des applications holomorphes contractantes de X_1 dans X_2. Soit $\mathrm{Isom}(X_1, X_2)$ le sous-ensemble des isomorphismes analytiques de X_1 sur X_2 qui sont des isométries pour les normes ν_1 et ν_2. Enfin, je noterai $G(X)$ l'ensemble $\mathrm{Isom}(X, X)$. Il est clair que $G(X)$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes analytiques de X, et on dira que $G(X)$ est le groupe des automorphismes analytiques isométriques de X.

Remarque 1.2. — Si (X, ν) est une variété normée, on peut définir la longueur d'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ de classe C^1 par morceaux par la formule :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \nu(T(\gamma(t)))\, dt.$$

La distance $d(x,y)$ de deux points x et y de X est défini comme la borne inférieure des longueurs des chemins de classe C^1 par morceaux d'origine x et d'extrémité y. Bien sûr, d est une distance sur X, appelée distance intégrée de la norme ν. De plus, si ν est continue, pour qu'une application $f : X \to X$ soit une contraction, il faut et il suffit que, $\forall x \in X$, $\forall y \in X$, on ait :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y).$$

Exemple 1.3. — Si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, on peut définir sur $T(D)$ identifié à $D \times E$ une norme par la formule :

$$\alpha(x, v) = \sup_{f \in \mathscr{H}(D, \Delta)} |f'(x).v|.$$

[$\mathscr{H}(D, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans le disque-unité $\Delta \subset \mathbb{C}$]. L'application α est une norme sur $T(D) = D \times E$ au sens de la définition 1.1 et je dirai que α est la norme de Carathéodory. Pour cette norme, toutes les applications holomorphes de D dans D sont contractantes, et tous les automorphismes de D sont des isométries.

2. La convergence uniforme locale

DÉFINITION 2.1. — Soit (X, ν) une variété normée. Une carte u d'un ouvert connexe U de X sur un ouvert d'un espace de Banach complexe E est dite adaptée si et seulement si :

(i) $u(U)$ est un domaine borné D de E;

(ii) u vérifie la condition (iii) de la définition 1.1.

On dit alors qu'une boule :

$$B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leqslant r\},$$

pour la distance intégrée d, contenue dans l'ouvert de définition U d'une carte adaptée (U, u), est une boule adaptée s'il existe une boule B_1 (pour la norme) de centre $u(a)$ dans $u(U)$, et un réel $r_1 > r$ tel que la boule $B(a, r_1)$ (pour la distance d) soit contenue dans U et que l'on ait :

$$u(B(a,r)) \subset\subset B_1 \subset\subset u(B(a,r_1)) \subset\subset u(U).$$

Rappelons qu'une partie A d'un domaine borné D est dite complètement intérieure à D, et on note $A \subset\subset D$, si la distance de A au bord de D est strictement positive.

Si f et $g \in \mathscr{H}_c(X, X)$, et si B est une boule adaptée de X, je noterai :

$$d_B(f, g) = \sup_{x \in B} d(f(x), g(x)).$$

Si (U, u) est une carte locale adaptée d'une variété normée (X, ν) sur un domaine borné D, et si $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$ est suffisamment proche de la transformation identique, $u \circ f \circ u^{-1}$ est une application holomorphe définie sur une partie de D à valeurs dans D, et, par abus de langage, je la noterai encore f.

UPMEIER [13] a montré, à l'aide du théorème des trois cercles d'Hadamard et d'un raisonnement de connexité le :

THÉORÈME 2.2. — *Soit* (X, ν) *une variété normée, et soient* B_1 *et* B_2 *deux boules adaptées de* X. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$, *on ait :*

$$d_{B_1}(f, \mathrm{id}) < \eta \quad \Rightarrow \quad d_{B_2}(f, \mathrm{id}) < \varepsilon$$

[id *désigne la transformation identique de* X.]

On peut alors définir une structure de groupe topologique sur $G(X)$, pour laquelle une base de voisinages de la transformation identique est formée par les :

$$U_\varepsilon = \{ f \in G(X) \mid d_B(f, \mathrm{id}) < \varepsilon \}, \qquad \varepsilon > 0.$$

J'appelerai cette topologie topologie de la convergence uniforme locale, et UPMEIER [13] montre que $G(X)$, muni de la structure uniforme gauche, est complet.

THÉORÈME (d'unicité de H. Cartan) 2.3. — *Soit* (X, ν) *une variété normée. Soit* a *un point de* D, *et soit* $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$ *telle que* $f(a) = a$, *et que l'application linéaire tangente* $T_a(f)$ *au point* a *soit l'identité. Alors* f *est la transformation identique.*

Démonstration. — Soit (U, u) une carte locale adaptée telle que $a \in U$. On peut trouver un nombre $\rho > 0$ tel que la boule $B(a, \rho)$ de centre a et de rayon ρ (pour la distance intégrée d) soit contenue dans U. Comme $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$ et que $f(a) = a$, il est clair que $f(B(a, \rho)) \subset B(a, \rho)$. Quitte à transporter f par la carte locale u, f est une application holomorphe du domaine borné $u(B(a, \rho))$ dans lui-même, telle que $f(u(a))=u(a)$, $f'(u(a))=\mathrm{id}$. D'après le théorème d'unicité de H. Cartan pour un domaine borné (*voir* [15], proposition 1.2.1), $f|_{B(a,\rho)}$ est la transformation identique. Le résultat se déduit du théorème de prolongement analytique.

Nous allons montrer maintenant une version topologique du théorème 2.3. Soit (X, ν) une variété normée, et soit (U, u) une carte adaptée de U sur un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D. Si $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$ est telle que $f(u^{-1}(a))$ appartient encore à U, je noterai encore f l'application $u \circ f \circ u^{-1}$ qui est définie sur un voisinage du point a dans D à valeurs dans D. On définit alors $f(a) \in D$, et $f'(a) \in \mathscr{L}(E, E)$.

THÉORÈME 2.4. — *Si une suite f_n de fonctions de $\mathscr{H}_c(X, X)$ est telle que $f_n(a) \to a$, et que $f'_n(a) \to \mathrm{id}$, alors $f_n \to \mathrm{id}$ pour la topologie de la convergence uniforme locale.*

Démonstration. — Montrons d'abord par récurrence sur q que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n^q(a) = \lim_{n\to\infty} f_n \circ \ldots \circ f_n(a) = a.$$

Le résultat est vrai pour $q=1$. Supposons-le démontré à l'ordre $(q-1)$, et montrons-le à l'ordre q. On a :

$$d(f_n^q(a), a) \leqslant d(f_n^q(a), f_n^{q-1}(a)) + d(f_n^{q-1}(a), a).$$

Comme f_n^{q-1} est contractante, on a :

$$d(f_n^q(a), a) \leqslant d(f_n(a), a) + d(f_n^{q-1}(a), a).$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, cette quantité tend vers zéro.

Soit maintenant $B(a, r)$ une boule pour la norme $\subset \subset D$, et supposons que $B(a, r)$ est contenu dans l'image par u d'une boule adaptée B_1 de X. Du fait que les f_n sont contractantes, on peut trouver, pour tout entier q, un entier $n(q)$, tel que pour tout $n \geqslant n(q)$, l'application f_n^q soit définie sur $B(a, r)$ à valeurs dans D.

Soit $r_0 < r$. Pour montrer que $f_n \to \mathrm{id}$ pour la topologie de la convergence uniforme locale, il suffit d'après le théorème 2.2 de montrer que $f_n \to \mathrm{id}$ uniformément sur $B(a, r_0)$. Compte tenu des inégalités de Cauchy, il suffit en fait de montrer que la dérivée p-ième $f_n^{(q)}(a) \to 0$, pour tout $p \geqslant 2$.

Comme dans [15], p. 215, on fait la démonstration par récurrence sur $p \geqslant 2$. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(p-1)$. Montrons-le à l'ordre p.

Pour cela, montrons par récurrence sur $q \geqslant 1$, que, pour tout $q \geqslant 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$|(f_n^q)^{(p)}(a) - qf_n^{(p)}(a)| < \varepsilon.$$

Le résultat est vrai pour $q=1$. Supposons-le démontré à l'ordre $(q-1)$.

Montrons-le à l'ordre q. On a :

$$f_n^q = f_n \circ f_n^{q-1}.$$

Dans le calcul de la dérivée p-ième de f_n^q, tous les termes tendent vers zéro quand $n \to +\infty$, sauf peut-être deux. On a :

$$\| (f_n^q)^{(p)}(a) - f_n^{(p)}(f_n^{q-1}(a)) \circ [(f_n^{q-1})'(a), \ldots, (f_n^{q-1})'(a)] \\ - f_n'(f_n^{q-1}(a)) \circ (f_n^{q-1})^{(p)}(a) \| \to 0.$$

Comme $f_n^{q-1}(a) \to a$, et à l'aide des inégalités de Cauchy, on termine facilement la récurrence sur q.

Appliquons ce résultat avec, par exemple $\varepsilon = 1$. Pour $n \geqslant n_0$, on a :

$$\| (f_n^q)^{(p)}(a) - qf_n^{(p)}(a) \| < 1.$$

D'après les inégalités de Cauchy, il existe une constante M telle que $\| (f_n^q)^{(p)}(a) \| \leqslant M$. On trouve donc :

$$\| f_n^{(p)}(a) \| \leqslant \frac{M+1}{q},$$

ce qui prouve que $f_n^{(p)}(a)$ converge vers 0.

Nous avons les lemmes suivants :

LEMME 2.5. — *Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soient $B_1 \subset B_1' \subset B_2$ trois boules concentriques complètement intérieures à D de rayons respectifs r_1, r_1', r_2 avec $0 < r_1 < r_1' < r_2$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathscr{H}(B_2, D)$ tels que :*

(i) $f(B_1) \subset B_1'$;

(ii) *pour tout $i \leqslant q-1$, l'application f^i qui est définie par la relation de récurrence $f^i = f^{i-1} \circ f$ se prolonge en une application holomorphe de B_2 dans D.*

Alors, il existe une constante K qui ne dépend que de r_1, r'_1, r_2 telle que, pour tout $x \in B_1$, on a :

$$\|(f^q(x)-x)-q(f(x)-x)\| \leqslant K\, q \sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2} \|f(x)-x\|.$$

Démonstration. — Soit h une fonction holomorphe sur B_2. D'après les inégalités de Cauchy, $(h-\mathrm{id})$ est $(\|h-\mathrm{id}\|_{B_2})/(r_2-r'_1)$-lipschitzien sur B'_1. Soit maintenant $f \in \mathscr{H}(B_2, D)$, et soit :

$$h=\frac{1}{q}(\mathrm{id}+f+f^2+\ldots+f^{q-1}).$$

On a alors :

$$\|h-\mathrm{id}\|_{B_2} \leqslant \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2} \leqslant \sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}.$$

Soit $x \in B_1$. Comme $f(x) \in B'_1$, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $(h-\mathrm{id})$ aux points x et $y=f(x)$ donne :

$$\|(h(f(x))-f(x))-(h(x)-x)\| \leqslant \frac{1}{r_2-r'_1}(\sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}) \|f(x)-x\|.$$

Or on a : $h(f(x))-h(x)=1/q(f^q(x)-x)$.

On trouve finalement :

$$\|(f^q(x)-x)-q(f(x)-x)\| \leqslant \frac{q}{r_2-r'_1}(\sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}) \|f(x)-x\|.$$

LEMME 2.6. — *Soit (X, ν) une variété normée. Soit (U, u) une carte adaptée de X sur un domaine borné D. Soient B_1 et B_2 deux boules concentriques complètement intérieures à D, de rayons respectifs r_1 et r_2, avec $0<r_1<r_2$. Soient a et b deux nombres réels tels que $0<a<1<b$. Alors, il existe un nombre réel $\alpha>0$ qui jouit de la propriété suivante : si $f \in \mathscr{H}_c(X, X)$ et $q \in \mathbb{N}$ sont tels que, pour tout $i \leqslant q-1$, les applications f^i sont définies sur B_2, à valeurs dans D et que, pour tout $i \leqslant q-1$, on ait :*

$$\|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}<\alpha,$$

alors, pour tout $x \in B_1$, on a :

$$a\|f^q(x)-x\| \leqslant q\|f(x)-x\| \leqslant b\|f^q(x)-x\|.$$

Démonstration. — Soit r'_1 tel que $0<r_1<r'_1<r_2$.

Choisissons $\alpha>0$ tel que $\alpha<r'_1-r_1$, et que :

$$K\,\alpha<\inf\left(1-\frac{1}{b},\frac{1}{a}-1\right).$$

Soit B'_1 la boule concentrique à B_1 et B_2, de rayon r'_1. Il est clair que $f(B_1)\subset B'_1$. Le lemme se déduit immédiatement du lemme 2.5.

On en déduit immédiatement le :

LEMME 2.7. — *Soit (X,ν) une variété normée. Soit (U,u) une carte adaptée sur un domaine borné D, et soit B une boule complétement intérieure à D. Alors, il existe un nombre réel $\beta>0$ qui jouit de la propriété suivante : si $f\in\mathscr{H}_c(X,X)$ est telle que, avec les identifications habituelles, pour tout $q\in\mathbb{N}$, f^q est une application holomorphe de B dans D, et est telle que $\|f^q-\mathrm{id}\|_B<\beta$, alors $f=\mathrm{id}$.*

De façon précise, si on choisit une boule B_1 concentrique à B, de rayon r_1 strictement inférieur au rayon r de B, et deux nombres réels a et b tels que $0<a<1<b$, on peut prendre $\beta=\alpha$, où α est le nombre réel strictement positif dont l'existence est assurée par le lemme 2.6.

Le théorème 2.4 admet le raffinement suivant :

THÉORÈME 2.8. — *Soit (X,ν) une variété normée. Soit (U,u) une carte adaptée sur un domaine borné D. Soit $a\in D$, et soit $B(u^{-1}(a),r)$ une boule adaptée de centre $u^{-1}(a)$, contenue dans U. Alors, il existe un voisinage V de a dans D, et une constante $K>0$ tels que, pour tout $f\in\mathscr{H}_c(X,X)$, tel que $f(a)\in V$, on ait :*

$$d_{B(u^{-1}(a),r)}(f,\mathrm{id})\leqslant K\sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-\mathrm{id}\|).$$

Démonstration. — Soit B_1 la boule de centre a complètement intérieure à D telle que $u(B(u^{-1}(a),r))\subset B_1$. Comme on sait que la norme sur X est équivalente (à une constante multiplicative près) sur l'ouvert de la carte à la norme de E, il suffit en fait de montrer (en identifiant f à $u\circ f\circ u^{-1}$) que :

$$\|f-\mathrm{id}\|_{B_1}\leqslant K\sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-\mathrm{id}\|).$$

Comme B_1 est contenue dans l'image par u d'une boule $B(u^{-1}(a),r_1)$, on peut choisir un voisinage V de a dans D et une partie $A\subset\subset D$, de façon à ce que, pour tout $f\in\mathscr{H}_c(X,X)$ tel que $f(a)\in V$, $f(B_1)$ soit contenu dans A.

Faisons la démonstration par l'absurde. Pour chaque entier n, on choisit $f_n \in \mathscr{H}_c(X,X)$ tel que $f_n(a) \in V$ et que :

$$\|f_n - \mathrm{id}\|_{B_1} > n \sup(\|f_n(a) - a\|, \|f'_n(a) - \mathrm{id}\|).$$

Comme $f_n(B_1) \subset A$, il est clair qu'il existe une constante M telle que $\|f_n - \mathrm{id}\|_{B_1} \leqslant M$. Par suite :

$$\sup(\|f_n(a) - a\|, \|f'_n(a) - \mathrm{id}\|) \to 0,$$

ce qui d'après le théorème 2.4, prouve que f_n converge vers l'identité.

Choisissons maintenant une boule B_2 complètement intérieure à D, concentrique à B_1, de rayon r_2 strictement supérieur à r_1 de B_1.

Choisissons aussi deux nombres réels a_0 et b_0, tels que $0 < a_0 < 1 < b_0$, comme dans le lemme 2.6. Soit α le nombre réel strictement positif dont l'existence est assurée par le lemme 2.6. Comme, pour tout entier n, f_n est différent de la transformation identique, il existe, d'après le lemme 2.7 un plus petit entier q_n tel que :

$$\|f_n^{q_n} - \mathrm{id}\|_{B_2} > \alpha.$$

Soit $g_n = f_n^{q_n}$. Du fait que $\|g_n - \mathrm{id}\|_{B_2} > \alpha > 0$, on déduit que la suite g_n ne converge pas vers la transformation identique.

Montrons maintenant que $g_n(a) = f_n^{q_n}(a)$ converge vers a quand $n \to +\infty$. D'après le lemme 2.6, on a :

$$a_0 \|f_n^{q_n} - \mathrm{id}\|_{B_1} \leqslant q_n \|f_n - \mathrm{id}\|_{B_1} \leqslant b_0 \|f_n^{q_n} - \mathrm{id}\|_{B_1}.$$

On en tire :

$$q_n \leqslant b_0 \frac{\|f_n^{q_n} - \mathrm{id}\|_{B_1}}{\|f_n - \mathrm{id}\|_{B_1}} \leqslant \frac{b_0 M_1}{\|f_n - \mathrm{id}\|_{B_1}},$$

où M_1 est une constante.

En appliquant une deuxième fois le lemme 2.6, on trouve :

$$\|f_n^{q_n}(a) - a\| \leqslant \frac{q_n}{a_0} \|f_n(a) - a\|,$$

et en reportant la majoration de q_n, on obtient :

$$\|f_n^{q_n}(a)-a\| \leqslant \frac{b_0 M_1}{a_0} \frac{\|f_n(a)-a\|}{\|f_n-\mathrm{id}\|_{B_1}}.$$

Or, $\|f_n(a)-a\| \leqslant 1/n \|f_n-\mathrm{id}\|_{B_1}$.

On trouve finalement :

$$\|f_n^{q_n}(a)-a\| \leqslant \frac{b_0 M_1}{a_0} \frac{1}{n},$$

ce qui prouve que $g_n(a)=f_n^{q_n}(a)$ converge vers a.

Montrons maintenant que $\|g'_n(a)-\mathrm{id}\|$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. On a :

$$g'_n(a)=(f_n^{q_n})'(a)=f'_n(f_n^{q_n-1}(a))\circ \ldots \circ f'_n(a).$$

Soit B' une boule de centre a, de rayon $r'<r_1$. On déduit des inégalités de Cauchy, qu'il existe une constante H telle que, pour tout $x \in B'$, on ait :

$$\|f'_n(x)-f'_n(a)\| = \|(f'_n(x)-\mathrm{id})-(f'_n(a)-\mathrm{id})\| \leqslant H \|f_n-\mathrm{id}\|_{B_1} \|x-a\|.$$

D'après ce que nous avons déjà démontré, on sait que, pour tout n assez grand, $f_n(a), f_n^2(a), \ldots, f_n^{q_n-1}(a)$ appartiennent à B'. On en déduit que, pour tout $r \leqslant q_n-1$, on a :

$$\|f'_n(f_n^r(a))-\mathrm{id}\| \leqslant \|f_n-\mathrm{id}\|_{B_1}\left(\frac{H b_0 M_1}{a_0}+1\right)\frac{1}{n}.$$

On déduit alors du lemme 1.3.5 de [15] que :

$$\|g'_n(a)-\mathrm{id}\| \leqq \left[1+\|f_n-\mathrm{id}\|_{B_1}\left(\frac{H b_0 M_1}{a_0}+1\right)\frac{1}{n}\right]^{q_n}-1.$$

En reportant dans cette inégalité la majoration de q_n, on trouve que :

$$\|g'_n(a)-\mathrm{id}\| \to 0.$$

D'après le théorème 2.4, ceci entraîne que $g_n \to \mathrm{id}$ quand $n \to +\infty$. Nous avons trouvé une contradiction, et le théorème est démontré.

Remarque 2.9. — Quitte à augmenter un peu la constante $K>0$, la conclusion du théorème reste vraie en remplaçant le point a par un point b appartenant à un voisinage W de a suffisamment petit.

Enfin, nous avons le :

THÉORÈME 2.10. — *Soit (X, ν) une variété normée. Soit (U, u) une carte adaptée sur un domaine borné D. Soit $a \in D$, et soit $B(u^{-1}(a), r)$ une boule adaptée de centre $u^{-1}(a)$ contenue dans U. Alors, il existe un voisinage V de a dans D, et une constante $K>0$ tels que, pour tout $f \in G(X)$, pour tout $g \in G(X)$ tels que $f(a)$ et $g(a)$ appartient à V, on ait :*

$$d_{B(u^{-1}(a), r)}(f, g) \leqslant K \sup(\|f(a)-g(a)\|, \|f'(a)-g'(a)\|).$$

Démonstration. — Soit B_1 la boule de centre a complètement intérieure à D, telle que $u(B(u^{-1}(a), r)) \subset B_1$. Il suffit en fait de montrer que :

$$\|f-g\|_{B_1} \leqslant K \sup(\|f(a)-g(a)\|, \|f'(a)-g'(a)\|).$$

On peut choisir deux sous-ensembles $A_1 \subset\subset A_2 \subset\subset D$ et un voisinage V de a dans D tels que :

1° pour tout $f \in G(X)$, tel que $f(a) \in V$, f est définie sur A_2 à valeurs dans D;

2° pour tout f et $g \in G(X)$ et tels que $f(a)$ et $g(a)$ appartiennent à V, $g^{-1} \circ f(B_1)$ est contenu dans A_1.

Quitte à diminuer encore un peu V, on peut appliquer le théorème 2.8 à $g^{-1} \circ f$. Il existe donc une constante K_1 telle que, pour tout f et $g \in G(X)$, tels que $f(a)$ et $g(a) \in V$, on ait :

$$\|g^{-1} \circ f - \mathrm{id}\|_{B_1} \leqslant K_1 \sup(\|g^{-1} \circ f(a) - a\|, \|(g^{-1} \circ f)'(a) - \mathrm{id}\|).$$

Comme $(g^{-1} \circ f)(B_1) \subset A_1$ et qu'il existe une constante K_2 telle que g soit K_2-lipschitzien sur A_1, on a :

$$\|g-f\|_{B_1} \leqslant K_2 \|g^{-1} \circ f - \mathrm{id}\|_{B_1}$$
$$\leqslant K_2 K_1 \sup(\|g^{-1} \circ f(a) - a\|, \|(g^{-1} \circ f)'(a) - \mathrm{id}\|).$$

Il nous reste seulement à comparer :

$$\sup(\|g^{-1} \circ f(a) - a\|, \|(g^{-1} \circ f)'(a) - \mathrm{id}\|)$$

et :

$$\sup(\|f(a)-g(a)\|, \|f'(a)-g'(a)\|).$$

Il est clair que :

$$\|g^{-1}\circ f(a)-a\|\leqslant K_2\|f(a)-g(a)\|.$$

Étudions :

$$\begin{aligned}\|(g^{-1}\circ f)'(a)-\mathrm{id}\| &= \|(g^{-1})'(f(a))\circ f'(a)-\mathrm{id}\|\\ &\leqslant \|(g^{-1})'(f(a))\circ f'(a)-(g^{-1})'(g(a))\circ f'(a)\|\\ &\quad+\|(g^{-1})'(g(a))\circ f'(a)-\mathrm{id}\|\\ &\leqslant \|(g^{-1})'(f(a))-(g^{-1})'(g(a))\|\ f'(a)\|\\ &\quad+\|(g^{-1})'(g(a))\circ f'(a)-(g^{-1})'(g(a))\circ g'(a)\|\\ &\leqslant \|(g^{-1})'(f(a))-(g^{-1})'(g(a))\|\ f'(a)\|\\ &\quad+\|(g^{-1})'(g(a))\|.\|f'(a)-g'(a)\|.\end{aligned}$$

Des inégalités de Cauchy, on déduit qu'il existe une constante K_3 telle que $\|f'(a)\|\leqslant K_3$ et que $\|(g^{-1})'(g(a))\|\leqslant K_3$. De même, il existe une constante K_4 telle que $(g^{-1})'$ soit K_4-lipschitzien sur V. On a donc montré que :

$$\|(g^{-1}\circ f)'(a)-\mathrm{id}\|\leqslant K_3K_4\|f(a)-g(a)\|+K_3\|f'(a)-g'(a)\|.$$

Finalement, on a montré que :

$$\|f-g\|_{B_1}\leqslant K_1K_2\sup(K_2,K_3(K_4+1))\times\sup(\|f(a)-g(a)\|,\ \|f'(a)-g'(a)\|)$$

et le théorème est démontré.

3. Algèbre de Lie des transformations infinitésimales d'une variété normée (X,ν)

A chaque groupe à un paramètre réel d'automorphismes analytiques isométriques d'une variété normée (X,ν) :

$$\mathbb{R}\times X\to X,$$

$$(t,x)\mapsto f(t,x),$$

est associé une transformation infinitésimale ψ :

$$X \to T(X),$$
$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(0, x),$$

qui est une section du fibré tangent. Soit $\mathfrak{g}(X)$ l'ensemble des transformations infinitésimales associées à tous les groupes à un paramètre réel d'automorphismes analytiques isométriques de X. H. UPMEIER [13] a montré que $\mathfrak{g}(X)$ a une structure d'algèbre de Lie réelle normale complète. Une norme sur $\mathfrak{g}(X)$ peut être construite de la façon suivante : soit B une boule adaptée de X, contenue dans l'ouvert de définition U d'une carte (U, u). Par la carte u, $T(U)$ s'identifie à $u(U) \times E$, et la restriction à $u(U)$ des transformations infinitésimales peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes sur $u(U)$ à valeurs dans E. On définit alors :

$$\|\psi\|_B = \sup_{x \in B} \|\psi(x)\|.$$

H. UPMEIER montre que, pour un autre choix de la boule adaptée B, on obtient une norme sur $\mathfrak{g}(X)$ équivalente à la précédente.

La démonstration de ces résultats repose essentiellement sur la proposition suivante, qui permet de trouver des transformations infinitésimales de X à partir d'automorphismes analytiques isométriques de X.

PROPOSITION 3.1 [13]. — *Soit $f_n \in G(X)$ une suite d'éléments de $G(X)$ convergeant vers l'identité. Soit k_n une suite d'entiers convergeant vers l'infini. Soit (U, u) une carte adaptée sur un ouvert borné D. Supposons qu'avec les identifications précédemment définies, il existe une boule adaptée B contenue dans U telle que, la suite :*

$$\psi_n = k_n(f_n - \mathrm{id}),$$

converge vers une fonction analytique ψ_0 uniformément sur $u(B)$.

Alors il existe une section $\psi \in \Gamma(X, T(X))$ du fibré tangent à X qui induit ψ_0 sur B, et telle que $\psi \in \mathfrak{g}(X)$. De plus, ψ_n converge vers ψ uniformément sur l'image de toute boule adaptée contenue dans U.

A cette structure d'algèbre de Lie réelle sur $\mathfrak{g}(X)$, correspond une structure de groupe de Lie réel $G_{\mathrm{an}}(X)$ sur $G(X)$, et l'application :

$$G_{\mathrm{an}}(X) \times X \to X,$$
$$(g, x) \mapsto g.x.$$

est analytique par rapport à l'ensemble des variables. Cependant, la topologie sous-jacente est, en général, plus fine que la topologie de la convergence uniforme locale (*voir* [14], [15], [13] et [16]).

La structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}(X)$ est précisée par les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.2. — *Soit* (X, ν) *une variété normée, et soit* (U, u) *une carte adaptée sur un ouvert borné* D *d'un espace de Banach* E. *Soit* a *un point de* D. *L'application* Θ_a :

$$\mathfrak{g}(X) \to E \times \mathscr{L}(E,E);$$
$$\psi \mapsto (\psi(a), \psi'(a))$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach réels de $\mathfrak{g}(X)$ *sur son image.*

Démonstration. — Choisissons une boule adaptée B de centre $u^{-1}(a)$, contenue dans U. Pour tout $\psi \in \mathfrak{g}(X)$, on peut trouver une suite d'automorphismes isométriques $f_n \in G(X)$, et une suite d'entiers k_n tels que :

$$k_n(f_n - \mathrm{id}) \to \psi,$$

uniformément sur $u(B)$. [Il suffit de prendre $f_n = f_\psi(1/n, \,.\,)$, où $(t,x) \mapsto f_\psi(t,x)$ désigne le groupe à un paramètre associé à la transformation infinitésimale $\psi \in \mathfrak{g}(X)$ et $k_n = n$]. D'après le théorème 2.8, il existe une constante K telle que, pour tout entier n assez grand, on ait :

$$\|f_n - \mathrm{id}\|_{u(B)} \leqslant K \sup(\|f_n(a) - a\|, \|f'_n(a) - \mathrm{id}\|).$$

On a de même :

$$\|k_n(f_n - \mathrm{id})\|_{u(B)} \leqslant K \sup(\|k_n(f_n(a) - a)\|, \|k_n(f'_n(a) - \mathrm{id})\|)$$

et quand $n \to \infty$, par passage à la limite, on trouve :

$$\|\psi\|_{u(B)} \leqslant K \sup(\|\psi(a)\|, \|\psi'(a)\|). \tag{1}$$

L'application $\Theta_a : \mathfrak{g}(X) \to E \times \mathscr{L}(E,E)$ est, de toute évidence, continue. La formule (1) montre que, si $\psi(a) = 0$ et si $\psi'(a) = 0$, alors $\|\psi\|_{u(B)} = 0$, et d'après le théorème de prolongement analytique, $\psi \equiv 0$. Ainsi, Θ_a est injective. L'application réciproque est aussi continue, comme le montre la formule (1). Le théorème est démontré.

Le théorème 3.1 admet le raffinement suivant :

THÉORÈME 3.3. — *Soit (X, v) une variété normée. Soit (U, u) une carte adaptée sur un domaine borné D d'un espace de Banach complexe, et soit a un point de D. Soit f_k une suite d'éléments de $G(X)$ convergeant vers la transformation identique. Soit ψ_k la fonction définie (avec les identifications habituelles) par la formule :*

$$\psi_k = 2^k (f_k - \mathrm{id}).$$

Supposons que :

$$\psi_k(a) \to b \in E;$$
$$\psi'_k(a) \to g \in \mathscr{L}(E, E).$$

Alors il existe $\psi \in \mathfrak{g}(X)$ tel que $\psi(a) = b$, $\psi'(a) = g$, et ψ_k converge vers ψ uniformément sur l'image de toute boule adaptée $\subset U$.

Démonstration. — Soient $B(a, r) \subset \subset B_1(a, r_1) \subset \subset B_2(a, r_2) \subset \subset D$ trois boules concentriques de centre a complètement intérieures à D. Compte tenu de la proposition 3.1, il suffit en fait de montrer que les $\psi_{k|B}$ forment une suite de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme sur B. Soit $\varepsilon_k = \sup_{m \geqslant k} \| \psi_m - \psi_k \|_{B'}$ et il nous faut montrer que $\varepsilon_k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Pour $m \geqslant k$, on a :

$$\psi_m - \psi_k = 2^m (f_m - \mathrm{id}) - 2^k (f_m^{2^{m-k}} - \mathrm{id}) + 2^k (f_m^{2^{m-k}} - f_k). \tag{2}$$

Remarquons d'abord que, pour m et k assez grand $(m \geqslant k)$, $f_m^{2^{m-k}}$ envoie B_1 dans B_2. En effet, on déduit facilement du théorème 2.8 et du fait que les suites $\| 2^m (f_m(a) - a \|$ et $\| 2^m (f'_m(a) - \mathrm{id}) \|$ sont bornés, qu'il existe une constante M_1 telle que, pour m assez grand, on ait :

$$\| f_m - \mathrm{id} \|_{B_2} \leqslant \frac{M_1}{2^m}.$$

Ceci prouve en particulier que, pour tout $\rho \leqslant r_2$:

$$f_m(B(a, \rho)) \subset B\left(a, \rho + \frac{M_1}{2^m}\right).$$

Par un raisonnement de récurrence, on en déduit facilement que, pour m et k assez grand, $f_m^{2^{m-k}}(B_1) \subset B_2$.

On peut donc écrire l'inégalité :

$$\| \psi_m - \psi_k \|_B \leqslant 2^k \| 2^{m-k} (f_m - \mathrm{id}) - (f_m^{2^{m-k}} - \mathrm{id}) \|_B + 2^k \| f_m^{2^{m-k}} - f_k \|_B. \tag{3}$$

(a) Étudions d'abord le premier terme du second membre. Choisissons deux boules B'_1 et B''_1 concentriques à B telles que $B \subset\subset B'_1 \subset\subset B''_1 \subset\subset B_1$. D'après le lemme 2.5 appliqué aux boules $B \subset\subset B'_1 \subset B''_1 \subset\subset D$, il existe une constante K_1 telle que :

$$(4)\quad \| 2^{m-k}(f_m - \mathrm{id}) - (f_m^{2^{m-k}} - \mathrm{id}) \|_B \leqslant K_1\, 2^{m-k} \times (\sup_{i=1,\ldots,2^{m-k}-1} \| f_m^i - \mathrm{id} \|_{B'_1}) \| f_m - \mathrm{id} \|_B.$$

Étudions $\sup_{i=1,\ldots,2^{m-k}-1} \| f_m^i - \mathrm{id} \|_{B''_1}$. Choisissons une boule B'''_1 telle que $B''_1 \subset\subset B'''_1 \subset\subset B_1$.

En appliquant une nouvelle fois le lemme 2.5 à cette situation, on trouve une constante K_2 telle que :

$$\| (f_m^i - \mathrm{id}) - i(f_m - \mathrm{id}) \|_{B''_1} \leqslant K_2\, i (\sup_{j=1,\ldots,i-1} \| f_m^j - \mathrm{id} \|_{B_1}) \| f_m - \mathrm{id} \|_{B''_1}.$$

Soit $M_2 = \sup_{x \in D,\, y \in D} \| x - y \|$.

On trouve donc :

$$\| f_m^i - \mathrm{id} \|_{B''_1} \leqslant i \| f_m - \mathrm{id} \|_{B''_1} (1 + K_1 M_2) \leqslant i \frac{M_1}{2^m} (1 + K_1 M_2).$$

Par suite :

$$\sup_{i=1,\ldots,2^{m-k}-1} \| f_m^i - \mathrm{id} \|_{B''_1} \leqslant \frac{M_1 (1 + K_1 M_2)}{2^k}.$$

En reportant ces valeurs dans (4), on trouve qu'il existe une constante K_3 telle que :

$$2^k \| 2^{m-k}(f_m - \mathrm{id}) - (f_m^{2^{m-k}} - \mathrm{id}) \|_B \leqslant \frac{K_3}{2^k}.$$

(b) Étudions maintenant le second membre de (3). Pour celà, étudions d'abord :

$$\| f_m^{2^{m-k}}(a) - f_k(a) \| \qquad \text{et} \qquad \| (f_m^{2^{m-k}})'(a) - f'_k(a) \|.$$

On a :

$$\begin{aligned} \| f_m^{2^{m-k}}(a) - f_k(a) \| &= \| (f_m^{2^{m-k}}(a) - a) - (f_k(a) - a) \| \\ &\leqslant \| (f_m^{2^{m-k}}(a) - a) - 2^{m-k}(f_m(a) - a) \| \\ &\qquad + \| 2^{m-k}(f_m(a) - a) - (f_k(a) - a) \|. \end{aligned}$$

De même,

$$\|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-(f_k)'(a)\|=\|((f^{2^{m-k}})'(a)-\mathrm{id})-(f'_k(a)-\mathrm{id})\|$$
$$\leqslant\|((f_m^{2^{m-k}})'(a)-\mathrm{id})-2^{m-k}(f'_m(a)-\mathrm{id})\|$$
$$+\|2^{m-k}(f'_m(a)-\mathrm{id})-(f'_k(a)-\mathrm{id})\|.$$

Du fait que a appartient à $\mathring{B}$, et des inégalités de Cauchy, on déduit qu'il existe une constante K_4 telle que :

$$\sup(\|(f_m^{2^{m-k}}(a)-a)-2^{m-k}(f_m(a)-a)\|,$$
$$\|((f_m^{2^{m-k}})'(a)-\mathrm{id})-2^{m-k}(f'_m(a)-\mathrm{id})\|)$$
$$\leqslant K_4\|(f_m^{2^{m-k}}-\mathrm{id})-2^{m-k}(f_m-\mathrm{id})\|_B$$

et d'après le (a) :

$$\leqslant K_4\frac{K_3}{(2^k)^2}.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse du théorème, il existe une suite de nombres réels $\eta_k \to 0$ tels que, pour $m\geqslant k$:

$$\sup(\|2^{m-k}(f_m(a)-a)-(f_k(a)-a)\|,$$
$$\|2^{m-k}(f'_m(a)-\mathrm{id})-(f'_k(a)-\mathrm{id})\|)\leqslant\frac{\eta_k}{2^k}.$$

En regroupant ces résultats, on trouve que :

$$\sup(\|f_m^{2^{m-k}}(a)-f_k(a)\|,\|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-f'_k(a)\|)\leqslant\frac{1}{2^k}\left(\frac{K_3K_4}{2^k}+\eta_k\right).$$

Il est clair que f_k et $f_m^{2^{m-k}}$ convergent vers l'identité quand m et $k\to+\infty$.

D'après le théorème 2.10, quitte à réduire un peu B, il existe donc une constante K_5 telle que, pour m et k assez grands, on ait :

$$\|f_m^{2^{m-k}}-f_k\|_B\leqslant K_5\sup(\|f^{2^{m-k}}(a)-f_k(a)\|,$$
$$\|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-f'_k(a)\|)\leqslant\frac{K_5}{2^k}\left(\frac{K_3K_4}{2^k}+\eta_k\right).$$

En regroupant (a) et (b), on trouve que :

$$\varepsilon_k = \sup_{m\geqslant k} \| \psi_m - \psi_k \|_B \leqslant \frac{1}{2^k}(K_3 + K_3 K_4 K_5) + K_5 \eta_k.$$

$\varepsilon_k \to 0$, et le théorème est démontré.

4. Les variétés normées symétriques

DÉFINITION ET PROPOSITION 4.1. — *Soit* (X, ν) *une variété normée. Soit* a *un point de* X, *et soit* $s \in G(X)$. *On dit que* s *est une symétrie par rapport au point* a *si* s *vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(i) $s^2 = \mathrm{id}$, *et* a *est un point invariant isolé de* s;

(ii) $s(a) = a$, *et* $T_a(s) = -\mathrm{id}$;

(iii) *il existe une carte locale* (U, u) *définie au voisinage du point* a, *telle que* $u(a) = 0$, *et que, dans cette carte,* s *soit égale à* $(-\mathrm{id})$.

De plus, un tel $s \in G(X)$, *s'il existe, est unique. On l'appelle la symétrie par rapport au point* a, *et on le note* s_a. *On dit alors que* X *est symétrique par rapport au point* a.

Démonstration. — D'après le théorème 2.3, un automorphisme vérifiant (ii) est unique. Il est clair aussi que (iii) entraîne (i) et (ii). La réciproque se démontre facilement en construisant une carte locale au voisinage du point a, dans laquelle s est linéaire (*voir* [15], p. 250).

DÉFINITION 4.2. — On dit qu'une variété normée (X, ν) est symétrique si elle est symétrique par rapport à tout point a de X.

DÉFINITION 4.3. — On dit qu'une variété normée (X, ν) est homogène si, pour tout couple de points (a, b) de X, il existe $f \in G(X)$ tel que $f(a) = b$.

Il est clair que si (X, ν) est une variété normée homogène, et si X est symétrique par rapport à un point a, X est symétrique. Nous allons montrer maintenant que toute variété normée symétrique est homogène dans un sens très fort. Montrons d'abord le :

THÉORÈME 4.4. — *Soit* (X, ν) *une variété normée symétrique. Soit* (U, u) *une carte adaptée sur un domaine borné* D. *Soit* a *un point de* D, *et soit* B *une boule adaptée de centre* $u^{-1}(a)$ *contenue dans* U. *Alors, il existe un voisinage* W *du point* a *et une constante* K *tels que, pour tout* $b \in W$:

$$\| s_b - s_a \|_{u(B)} \leqslant K \| b - a \|.$$

(*Je note* s_b *l'automorphisme* $s_{u^{-1}(b)}$.) *On en déduit que l'application :*

$$X \to G(X),$$
$$x \mapsto s_x$$

est continue.

Démonstration. — En utilisant le fait que les éléments de $G(X)$ sont des isométries pour la distance intégrée d, et en remarquant que b est un point fixe pour s_b, on peut trouver une boule $B_1 \subset\subset D$, de centre a, et un voisinage U_1 du point a tel que, avec les identifications habituelles, pour tout $b \in U_1$, $s_b(B_1)$ soit contenu dans D. Soit B_2 une boule concentrique $\subset\subset B_1$. Les inégalités de Cauchy montrent qu'il existe une constante K_1, telle que, pour tout $b \in U_1$, s_b soit K_1-lipschitzien sur B_2. De même, il existe une constante K_2, telle que, pour tout $b \in U_1$, s'_b soit K_2-lipschitzien sur B_1.

Soit $b \in U_1 \cap B_2$. Étudions :

$$\| s_b(a) - s_a(a) \| \leqslant \| s_b(a) - s_b(b) \| + \| s_b(b) - s_a(a) \|$$
$$\leqslant K_1 \| a - b \| + \| b - a \| \leqslant (K_1 + 1) \| b - a \|.$$

Étudions de même :

$$\| s'_b(a) - s'_a(a) \| = \| s'_b(a) - s'_b(b) \|,$$

car on sait que $s'_a(a) = -\mathrm{id} = s'_b(b)$. Par suite, $\| s'_b(a) - s'_a(a) \| \leqslant K_2 \| b - a \|$.

On est dans les conditions d'application du théorème 2.10, et le théorème est démontré.

PROPOSITION 4.5. — *Soit* (X, ν) *une variété normée symétrique, et soit* a *un point de* X. *Alors l'application* φ_a :

$$X \to X,$$
$$x \mapsto s_x(a)$$

est différentiable au point a et admet pour application linéaire tangente 2 id.

Démonstration. — On peut faire le calcul dans une carte adaptée (U, u) sur un domaine borné D. Supposons que $u(a) = 0$, et (en identifiant x et $u(x)$), il nous faut montrer que :

$$\frac{\| s_x(0) - s_0(0) - 2x \|}{\| x \|} = \frac{\| s_x(0) - 2x \|}{\| x \|},$$

tend vers zéro quand $x \to 0$, $x \neq 0$.

On peut trouver une boule $B(0, r) \subset \subset D$, et un voisinage V de 0, tel que, pour tout $x \in V$, s_x soit définie sur $B(0, r)$ à valeurs dans D. Soit $B_1(0, r_1) \subset \subset B(0, r)$. Soit $x \in B_1 \cap V$. Appliquons la formule de Taylor à s_x au point x. On a :

$$\| s_x(0) - s_x(x) - (-\mathrm{id})(-x) \| \leqslant \| s_x^{(2)} \|_{B_1} \| x \|^2.$$

On déduit des inégalités de Cauchy qu'il existe une constante M telle que $\| s_x^{(2)} \|_{B_1} \leqslant M$, pour tout $x \in B_1 \cap V$.

Par suite :

$$\| s_x(0) - 2x \| \leqslant M \| x \|^2,$$

et la proposition est démontrée.

Si $g \in G(X)$, et si $(t, x) \mapsto f_\psi(t, x)$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes analytiques isométriques de X, associé à la transformation infinitésimale ψ :

$$(t, x) \mapsto g[f_\psi(t, g^{-1}(x))]$$

est aussi un groupe à un paramètre d'automorphismes analytiques de X, et je noterai $g.\psi$ la transformation infinitésimale associée. Il est clair que l'application :

$$\mathfrak{g}(X) \to \mathfrak{g}(X),$$
$$\psi \to g.\psi$$

est un automorphisme linéaire de $\mathfrak{g}(X)$.

De ces considérations, on déduit facilement la :

PROPOSITION 4.6. — *Soit (X, v) une variété normée symétrique par rapport à un point a de X.*

La symétrie s_a définit un automorphisme linéaire involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(X)$. On en déduit une décomposition directe :

$$\mathfrak{g}(X) = \mathfrak{g}_a(X)^+ \oplus \mathfrak{g}_a(X)^-,$$

où :

$$\mathfrak{g}_a(X)^+ = \{ \psi \in \mathfrak{g}(X) \mid s_a.\psi = \psi \},$$
$$\mathfrak{g}_a(X)^- = \{ \psi \in \mathfrak{g}(X) \mid s_a.\psi = -\psi \}.$$

Si on considère une carte locale u de X au voisinage du point a telle que $u(a)=0$ *et dans laquelle* s_a *soit linéaire, on a :*

$$\mathfrak{g}_a(X)^+ = \{\psi \in \mathfrak{g}(X) \mid \psi \text{ est une fonction impaire de } x\}$$
$$= \{\psi \in \mathfrak{g}(X) \mid \psi(a)=0\};$$
$$\mathfrak{g}_a(X)^- = \{\psi \in \mathfrak{g}(X) \mid \psi \text{ est une fonction paire de } x\}$$
$$= \{\psi \in \mathfrak{g}(X) \mid \psi'(a)=0\}.$$

De plus, l'application :

$$\mathfrak{g}_a(X)^- \to T_a(X),$$
$$\psi \mapsto \psi(a)$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach réels de $\mathfrak{g}_a(X)^-$ *sur son image.*

PROPOSITION 4.7. — *Soit* (X, ν) *une variété normée symétrique. Soit a un point de X. Alors l'application :*

$$\mathfrak{g}_a(X)^- \to T_a(X),$$
$$\psi \mapsto \psi(a),$$

définie dans la proposition 4.6, *est un isomorphisme d'espaces de Banach réels de* $\mathfrak{g}_a(X)^-$ *sur* $T_a(X)$.

Démonstration. — Soit (U, u) une carte locale adaptée au voisinage du point a, telle que $u(a)=0$, et que, dans cette carte, s_a soit linéaire ($=-\mathrm{id}$). Quitte à identifier, à l'aide de la carte u, les éléments de $\mathfrak{g}_a(X)^-$ à des fonctions holomorphes sur $D=u(U)$ à valeurs dans E, il suffit de montrer que, pour tout $b \in E$, il existe $\psi \in \mathfrak{g}_a(X)^-$ tel que $\psi(a)=b$. Identifions, comme précédemment x et $u(x)$, et considérons :

$$f_k = s_{b/2^k} \circ s_0.$$

Il est clair que $f_k \to \mathrm{id}$ quand $k \to +\infty$. Soit :

$$\psi_k = 2^{k-1}(f_k - \mathrm{id}).$$

On a :

$$\psi_k(0) = 2^{k-1}(s_{b/2^k}(0) - 0) = 2^{k-1}\, s_{b/2^k}(0).$$

On sait d'après la proposition 4.5 que l'application :

$$b \to s_b(0)$$

est dérivable en 0 et a pour dérivée 2 id. Donc $\psi_k(0)$ tend vers b, quand $k \to +\infty$.

Nous allons maintenant montrer que $\psi_k'(0) \to 0$ quand $k \to +\infty$. Soit B une boule de centre $0 \subset\subset D$, contenue dans l'image par u d'une boule adaptée de centre $u^{-1}(0)$.

La formule de Taylor appliquée à $(\partial/\partial x)\, s_{b/2^k}$ au point 0 donne :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} s_{b/2^k}\left(\frac{b}{2^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x} s_{b/2^k}(0) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_{b/2^k}(0)\right]\left(\frac{b}{2^k}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3} s_{b/2^k}\right\|_B \left\|\frac{b}{2^k}\right\|^2.$$

Des inégalités de Cauchy, on déduit l'existence d'une constante K telle que, pour tout k assez grand :

$$\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3} s_{b/2^k}\right\|_B \leqslant K.$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial x} s_{b/2^k}\left(\frac{b}{2^k}\right) = -\mathrm{id}$$

et :

$$-\frac{\partial}{\partial x} s_{b/2^k}(0) = \frac{\partial}{\partial x}(s_{b/2^k} \circ s_0)(0) = \frac{\partial}{\partial x} f_k(0).$$

D'où, en multipliant par 2^k, on trouve :

$$\left\| 2\psi_k'(0) - \frac{\partial}{\partial x^2} s_{b/2^k}(0).(b)\right\| \leqslant \frac{K}{2}\,\frac{\|b\|^2}{2^k}.$$

A l'aide des inégalités de Cauchy, on déduit facilement du théorème 4.4 que $(\partial/\partial x^2)\, s_{b/2^k}(0)$ converge vers $(\partial/\partial x^2)\, s_0(0)$ qui est égal à 0. Ainsi donc, $\psi_k'(0) \to 0$.

D'après le théorème 3.3, il existe donc $\psi \in \mathfrak{g}_a(X)^-$ tel que $\psi(a)=b$. La proposition est démontrée.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4.8. — *Soit (X, ν) une variété normée symétrique. Soit a un point de X, et soit $G_{an}(X)$ le groupe des automorphismes analytiques isométriques de X, muni de sa structure de groupe de Lie réel. Alors, l'application orbitale :*

$$G_{an}(X) \xrightarrow{\rho(a)} X,$$

$$g \mapsto g.a$$

est, au voisinage de l'identité, une submersion directe.

Démonstration. — L'application linéaire tangente à $\rho(a)$ au point $\{ \mathrm{id} \}$ est :

$$\mathfrak{g}(D) \to T_a(X),$$

$$\psi \mapsto \psi(a).$$

D'après les résultats que nous avons démontrés, cette application est un épimorphisme direct. On en déduit que $\rho(a)$ est, au voisinage de l'identité, une submersion directe.

On déduit du théorème 4.8 les résultats suivants :

PROPOSITION 4.9. — *Soit (X, ν) une variété normée symétrique, et soit a un point de X. Alors il existe un voisinage U du point a et une application analytique réelle $F : U \to G_{an}(X)$ telle que :*

(i) $F(a) = \mathrm{id}$;

(ii) *pour tout $x \in U$, $F(x).a = x$.*

Ceci entraîne en particulier que X est homogène sous l'action de $G(X)$.

THÉORÈME 4.10. — *Soit (X, ν) une variété normée symétrique. L'application :*

$$X \to G_{an}(X),$$

$$a \mapsto s_a$$

est analytique réelle. De même, l'application :

$$X \times X \to X,$$

$$(a, x) \mapsto s_a(x)$$

est analytique réelle.

Ainsi, l'hypothèse (iv) de [10], p. 44, introduite par W. KRAUP est inutile et peut-être omise. Le lecteur intéressé trouvera dans [10], [11] et [12] de nombreuses propriétés des variétés normées symétriques. En particulier, W. KAUP donne dans [12] une classification complète des variétés normées symétriques simplement connexes modelées sur un espace de Hilbert, ou plus généralement sur un espace de Banach réflexif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1972.

[2] BRAUN (R.), KAUP (W.) et UPMEIER (H.). — A holomorphic characterization of Jordan C*-algebras, *Math. Z.*, vol. 161, 1978, p. 277-290.

[3] CARTAN (E.). — Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de *n* variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 11, 1936, p. 116-162.

[4] CARTAN (H.). — Les fonctions de deux variables complexes, et le problème de la représentation analytique, *J. Math. pures et appl.*, 9ᵉ série, vol. 10, 1931, p. 1-114.

[5] CARTAN (H.). — *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935.

[6] HARRIS (L.). — Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional space, *Lecture Notes in Math.*, n° 364, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974.

[7] HARRIS (L.). — Operator Siegel domains, *Proceedings of the royal society of Edinburgh*, vol. 79 A, 1977, p. 137-156.

[8] KAUP (W.). — Reelle transformations gruppen und invariante Metriken auf komplexen Raümen, *Inventiones Math.*, vol. 3, 1967, p. 43-70.

[9] KAUP (W.). — On the automorphisms of certain symmetric complex manifolds of infinite dimensions, *An. Acad. Brasil. Ci*, vol. 48, 1976, p. 153-163.

[10] KAUP (W.). — Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, *Math. Ann.*, vol. 228, 1977, p. 39-64.

[11] KAUP (W.) et UPMEIER (H.). — Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces, *Math. Z*, vol. 157, 1977, p. 179-200.

[12] KAUP (W.). — *Über die Klassifikation der symmetrischen Hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher dimension* (à paraître).

[13] UPMEIER (H.) — Über die Automorphismengruppen von Banach – Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik. *Math. Ann.*, vol. 223, 1976, p. 279-288.

[14] VIGUÉ (J.-P.). — Sur le groupe des automorphismes analytiques d'un ouvert borné d'un espace de Banach complexe, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 278, série A, 1974, p. 617-620.

[15] VIGUÉ (J.-P.). — Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, t. 9, 1976, p. 203-282.

[16] VIGUÉ (J.-P.). — Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, t. 11, 1978, p. 229-246.