BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Série de Poincaré et systèmes de paramètres pour les invariants des formes binaires de degré 7

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 303-318

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__303_0>

Bull. soc. Math. France,
110, 1982, p. 303-318.

SÉRIE DE POINCARÉ ET SYSTÈMES DE PARAMÈTRES POUR LES INVARIANTS DES FORMES BINAIRES DE DEGRÉ 7

PAR
J. DIXMIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit A_d l'algèbre des invariants des formes binaires de degré d à coefficients complexes. Soit $F_d(z)$ la série de Poincaré de A_d. On sait que $F_d(z)$ peut s'écrire $N_d(z)/(1-z^{\delta_1})(1-z^{\delta_2})\dots(1-z^{\delta_{d-2}})$ *où* $N_d(z)$ est un polynôme à coefficients entiers $\geqslant 0$ et où $\delta_1, \delta_2, \dots$ sont des entiers $\geqslant 2$. Une telle écriture de $F_d(z)$ n'est pas unique; disons qu'elle est minimale si $\delta_1 . \delta_2 \dots \delta_{d-2}$ est minimal. Pour $1 \leqslant d \leqslant 6$ et $d=8$, on connait l'unique écriture minimale de $F_d(z)$, et l'on sait qu'elle provient d'un système de paramètres homogènes de A_d. Dans cet article, on montre qu'il existe deux écritures minimales de $F_7(z)$, et qu'elles proviennent toutes deux de systèmes de paramètres homogènes de A_7. La situation pour $d \geqslant 9$ est obscure.

ABSTRACT. — Let A_d be the algebra of invariants of binary forms of degree d with complex coefficients. Let $F_d(z)$ be the Poincaré series of A_d. One knows that $F_d(z)$ can be written as $N_d(z)/(1-z^{\delta_1})(1-z^{\delta_2})\dots(1-z^{\delta_{d-2}})$ where $N_d(z)$ is a polynomial with positive integers as coefficients, and where $\delta_1, \delta_2, \dots$ are integers $\geqslant 2$. Such an expression of $F_d(2)$ is not unique; let us call it minimal if $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{d-2}$ is minimal. For $1 \leqslant d \leqslant 6$ and $d=8$, one knows the unique minimal expression of $F_d(z)$ and one knows that it comes from a homogeneous system of parameters of A_d. In this paper, one shows that there exist two minimal expressions of $F_7(z)$ and that they both come from homogeneous systems of parameters of A_7. The situation for $d \geqslant 9$ is obscure.

1. Introduction

1.1. Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie, G un groupe réductif complexe opérant dans V par une représentation linéaire, $\mathbf{C}[V]$ l'algèbre des fonctions complexes polynomiales sur V, $\mathbf{C}[V]^G$ la sous-algèbre de $\mathbf{C}[V]$ formée des éléments de $\mathbf{C}[V]$ invariants par G, $\mathbf{C}[V]_n^G$

(*) Texte reçu le 21 septembre 1981.

J. DIXMIER, Université Pierre-et-Marie-Curie, Laboratoire de mathématiques fondamentales, U.E.R. 48, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/303/$ 5.00

l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}[V]^G$ homogènes de degré n. La série de Poincaré de $\mathbf{C}[V]^G$ est par définition la série :

$$F(z)=\sum_{n\geq 0}(\dim \mathbf{C}[V]_n^G)\,z^n. \tag{1}$$

(Nous prendrons par exemple pour z une variable complexe).

Rappelons qu'on appelle système de paramètres de $\mathbf{C}[V]^G$ une suite $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ d'éléments homogènes algébriquement indépendants de $\mathbf{C}[V]^G$ tels que $\mathbf{C}[V]^G$ soit entier sur $\mathbf{C}[p_1, \ldots, p_r]$. Soient $d_1, \ldots, d_r$ les degrés de $p_1, \ldots, p_r$. Comme $\mathbf{C}[V]^G$ est une algèbre de Cohen-Macaulay [5], on sait que le $\mathbf{C}[p_1, \ldots, p_r]$-module $\mathbf{C}[V]^G$ admet une *base* $(p'_1, \ldots, p'_s)$ formée d'éléments homogènes de degrés $e_1, \ldots, e_s$, avec par exemple $p'_1=1$ donc $e_1=0$. Alors :

$$F(z)=\frac{1+z^{e_2}+\ldots+z^{e_s}}{(1-z^{d_1})(1-z^{d_2})\ldots(1-z^{d_r})}. \tag{2}$$

Quand $(p_1, \ldots, p_r)$ est choisi, les entiers $e_1, \ldots, e_s$ sont uniquement déterminés à l'ordre près. Mais, dès que $\mathbf{C}[V]^G\neq\mathbf{C}$, il y a une infinité de systèmes de paramètres; par exemple, on peut remplacer p_i par p_i^k; dans l'expression (2) de $F(z)$, cela multiplie le numérateur et le dénominateur par $1+z^{d_i}+z^{2d_i}+\ldots+z^{(k-1)d_i}$. L'écriture (2) de $F(z)$ n'est donc pas unique. Toutefois, certaines quantités sont indépendantes du choix de $(p_1, \ldots, p_r)$. Par exemple, r est le degré de transcendance de $\mathbf{C}[V]^G$, et aussi l'ordre de 1 comme pôle de $F(z)$. De même, le nombre $s(d_1 d_2\ldots d_r)^{-1}$ est égal à $\lim_{z\to 1}(1-z)^r F(z)$.

Le minimum de s pour tous les choix possibles de $(p_1, \ldots, p_r)$ peut être appelé la *complexité* de $\mathbf{C}[V]^G$; ce nombre mesure la distance de $\mathbf{C}[V]^G$ à une algèbre de polynômes.

1.2. Les considérations qui précèdent conduisent aux problèmes préliminaires suivants. On considère une fraction rationnelle $G(z)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{z^{e_1}+z^{e_2}+\ldots+z^{e_s}}{(1-z^{d_1})(1-z^{d_2})\ldots(1-z^{d_r})}, \tag{3}$$

où $e_2, e_3, \ldots, e_s, d_1, d_2, \ldots, d_r$ sont des entiers >0 et $e_1=0$. Appelons *écriture minimale* de $G(z)$ une écriture de $G(z)$ sous la forme (3) pour laquelle s (ou

$d_1 d_2 \ldots d_r$) est minimal. Il est facile de donner des cas où l'écriture minimale n'est pas unique. Par exemple :

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{(1-z^2)(1-z^3)}, \qquad \frac{1+z^2+z^3+z^4+z^6}{(1-z)(1-z^6)}$$

sont deux écritures minimales de la même fraction rationnelle.

PROBLÈME 1. — Ce phénomène de non-unicité peut-il se produire dans le contexte de 1.1, c'est-à-dire pour la série de Poincaré de $\mathbf{C}[V]^G$?

Nous verrons au paragraphe 2 que la réponse est positive.

PROBLÈME 2. — Avec les notations de 1.1, considérons une écriture minimale de $F(z)$; cette écriture provient-elle comme en 1.1 d'un système de paramètres de $\mathbf{C}[V]^G$?

Ce problème a été résolu négativement en [9], ex. 3.8, avec G fini.

Depuis la présentation de cet article, j'ai obtenu aussi une réponse négative pour $G = SL(2, \mathbf{C})$ et pour une représentation réductible de G. Le problème reste ouvert pour $G = SL(2, \mathbf{C})$ et une représentation irréductible. On va tout de même régler un cas particulier.

1.3. Désormais on prend pour G le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ et pour V l'espace V_d des formes binaires de degré d à coefficients complexes, dans lequel $SL(2, \mathbf{C})$ opère canoniquement. Comment se présentent nos problèmes dans ce cas ?

La série de Poincaré $F(z) = F_d(z)$ a été calculée dans [8]. On trouve dans [1], pour $2 \leqslant d \leqslant 16$, une expression de $F_d(z)$ sous la forme (3). (Pour $d \leqslant 10$, *cf.* aussi [4] et [10]). En particulier :

$$F_2(z) = \frac{1}{1-z^2}, \qquad F_3(z) = \frac{1}{1-z^4}, \qquad F_4(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)},$$

$$F_5(z) = \frac{1+z^{18}}{(1-z^4)(1-z^8)(1-z^{12})}, \qquad F_6(z) = \frac{1+z^{15}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^{10})}$$

$$F_8(z) = \frac{1+z^8+z^9+z^{10}+z^{18}}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)(1-z^7)},$$

$$F_7(z) = \frac{A(z)}{(1-z^4)(1-z^8)(1-z^{12})^2(1-z^{20})}, \tag{4}$$

avec :

$$A(z) = 1 + 2z^8 + 4z^{12} + 4z^{14} + 5z^{16} + 9z^{18} + 6z^{20} + 9z^{22} + 8z^{24} + 9z^{26} + 6z^{28} + 9z^{30} + 5z^{32} + 4z^{34} + 4z^{36} + 2z^{40} + z^{48}. \tag{5}$$

Les écritures indiquées de $F_d(z)$ pour $2 \leqslant d \leqslant 6$ et $d=8$ sont *les uniques écritures minimales de* $F_d(z)$. Nous ne détaillons pas la démonstration, qui est facile, car nous considérons un cas plus compliqué dans la suite. D'autre part, pour $2 \leqslant d \leqslant 6$ et $d=8$, ces écritures minimales proviennent de systèmes de paramètres. (Pour $2 \leqslant d \leqslant 6$, *cf.* par exemple [2] et [3]; pour $d=8$, *cf.* [7]). La complexité de $\mathbf{C}[V_d]^G$ pour $d=2, 3, 4, 5, 6, 8$ prend donc les valeurs 1, 1, 1, 2, 2, 5.

Pour $d=7$, nos deux problèmes semblent ouverts. La suite du mémoire est consacrée à ce cas. Nous utiliserons [11], qui fournit un système générateur de l'algèbre $\mathbf{C}[V_7]^G$ formé de 33 éléments homogènes (on ignore si c'est un système générateur minimal). Nous aurons aussi besoin d'une remarque de [4].

2. Écritures minimales de $F_7(z)$

2.1. Pour trouver les écritures minimales de $F_7(z)$, on peut appliquer la méthode de [6]; cette méthode nécessite dans notre cas, il me semble, un grand nombre de vérifications. Nous allons procéder autrement. On a :

$$F_7(z)=1+z^4+4z^8+10z^{12}+\ldots \tag{6}$$

Considérons une écriture minimale de $F_7(z)$:

$$\frac{B(z)}{(1-z^{d_1})(1-z^{d_2})(1-z^{d_3})(1-z^{d_4})(1-z^{d_5})} \tag{7}$$

avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant d_4 \leqslant d_5$. Alors :

$$F_7(z)=B(z)(1+z^{d_1}+z^{2d_1}+\ldots)\ (1+z^{d_2}+z^{2d_2}+\ldots)\ldots(1+z^{d_5}+z^{2d_5}+\ldots).$$

Comme les coefficients de $B(z)$ sont $\geqslant 0$, on voit que le coefficient de z^{d_i} dans la série $F_7(z)$ est $\geqslant 1$. Compte tenu de (6), on a :

$$d_i \neq 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11 \qquad \text{pour} \quad i=1, \ldots, 5. \tag{8}$$

On notera a (resp. b) le nombre d'indices i tels que $d_i=4$ (resp. 8). Le coefficient de z^4 dans la série $F_7(z)$ est $\geqslant a$. Compte tenu de (6), on a $a=0$ ou 1. D'après (4) et (5), $e^{2i\pi/6}$ est pôle double de $F_7(z)$, donc est racine d'au moins deux des polynômes $1-z^{d_1}, 1-z^{d_2}, \ldots, 1-z^{d_5}$. Donc 6 divise au moins deux des nombres $d_1, \ldots, d_5$, disons d_{i_0} et d_{i_1} avec $i_0 \neq i_1$. Cela prouve que $a+b \leqslant 3$. Compte tenu de (8), on a $d_{i_0} \geqslant 12$, $d_{i_1} \geqslant 12$. De même, $e^{2i\pi/10}$ est pôle de $F_7(z)$, donc 10 divise l'un des nombres $d_1, \ldots, d_5$, disons d_{i_2}. (On peut avoir $i_2=i_0$ ou $i_2=i_1$, auquel cas 30 divise d_{i_2}). Compte tenu de (8), on a $d_5 \geqslant 20$.

Si $a=0$, on a d_1, d_2, $d_3 \geqslant 8$, $d_4 \geqslant 12$, $d_5 \geqslant 20$, donc $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \geqslant 8^3.12.20=2^{13}.3.5$. Or, dans l'écriture (4) de $F_7(z)$, le dénominateur fournit le produit $4.8.12^2.20=2^{11}.3^2.5<2^{13}.3.5$, ce qui est absurde.

Si $a=1$ et $b=0$, on a $d_1=4$, $d_2 \geqslant 12$, $d_5 \geqslant 20$, donc $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \geqslant 4.12^3.20=2^{10}.3^3.5>2^{11}.3^2.5$, ce qui est absurde.

Si $a=1$ et $b=1$, on a $d_1=4$, $d_2=8$, $d_3 \geqslant 12$, $d_5 \geqslant 20$, donc $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \geqslant 4.8.12^2.20=2^{11}.3^2.5$. Cette inégalité doit être une égalité, donc $d_3=d_4=12$, $d_5=20$, et l'on obtient l'écriture (4) de $F_7(z)$.

Reste à examiner le cas où $a=1$ et $b=2$. Alors $d_1=4$, $d_2=d_3=8$. On a nécessairement $i_2=i_0$ ou $i_2=i_1$. Ainsi, d_4 et d_5 sont des multiples de 6, sont $\geqslant 12$, et l'un d'eux est un multiple de 30. On doit avoir $4.8^2.d_4 d_5 \leqslant 2^{11}.3^2.5$, d'où $d_4 d_5 \leqslant 2^3.3^2.5$. Mais $12.30=2^3.3^2.5$, donc $d_4=12$ et $d_5=30$. Le dénominateur est alors :

$$(1-z^4)(1-z^8)^2(1-z^{12})(1-z^{30}). \tag{9}$$

Or, ce cas est effectivement possible. En effet, une autre forme de $F_7(z)$ (en fait la forme irréductible) est (*cf.* [1] ou [10]) :

$$\frac{C(z)}{(1-z^4)(1-z^6)(1-z^8)(1-z^{10})(1-z^{12})}, \tag{10}$$

avec :

$$\begin{aligned} C(z)={}&1-z^6+2z^8-z^{10}+5z^{12}+2z^{14}+6z^{16} \\ &+2z^{18}+5z^{20}-z^{22}+2z^{24}-z^{26}+z^{32}. \end{aligned} \tag{11}$$

Le quotient de (9) par le dénominateur de (10) est :

$$\begin{aligned} \frac{(1-z^8)(1-z^{30})}{(1-z^6)(1-z^{10})} &= \frac{(1-z^8)(1+z^{10}+z^{20})}{1-z^6} \\ &= z^{22}+z^{16}-z^{14}+z^{12}+z^{10}-z^8+z^6+1 \end{aligned}$$

et si l'on multiplie $C(z)$ par ce dernier polynôme, il se trouve qu'on obtient le polynôme *à coefficients tous* $\geqslant 0$ que voici :

$$\begin{aligned} B(z)={}&1+z^8+5z^{12}+4z^{14}+3z^{16}+9z^{18} \\ &+4z^{20}+5z^{22}+8z^{24}+4z^{26}+4z^{28}+8z^{30} \\ &+5z^{32}+4z^{34}+9z^{36}+3z^{38}+4z^{40}+5z^{42}+z^{46}+z^{54}. \end{aligned} \tag{12}$$

2.2. En résumé, nous avons obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME. — *La série de Poincaré $F_7(z)$ admet exactement deux écritures minimales :*

$$\frac{A(z)}{(1-z^4)(1-z^8)(1-z^{12})^2(1-z^{20})}, \qquad \frac{B(z)}{(1-z^4)(1-z^8)^2(1-z^{12})(1-z^{30})}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont fournis par (5) *et* (12).

Alors que la première écriture de $F_7(z)$ est connue depuis le XIX^e siècle, je n'ai vu nulle part mention de la seconde.

Au paragraphe 3, on va voir que les deux écritures minimales de $F_7(z)$ proviennent de systèmes de paramètres de $\mathbf{C}[V_7]^G$.

2.3. Des calculs analogues prouvent que $F_9(z)$ admet sept écritures minimales. J'ignore si elles proviennent de systèmes de paramètres pour $\mathbf{C}[V_9]^G$.

3. Systèmes de paramètres pour $\mathbf{C}[V_7]^G$.

3.1. Soit $\varphi \in V_7$. On pose :

$$\varphi = ax^7 + 7bx^6y + 21cx^5y^2 + 35dx^4y^3 + 35ex^3y^4 + 21fx^2y^5 + 7gxy^6 + hy^7.$$

On note $(\alpha, \beta)_n$ le n-ième transvectant de deux formes binaires α, β. On introduit les transvectants suivants, qui sont des covariants de φ :

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi)_6 \in V_{2,2},$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi)_4 \in V_{6,2},$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi)_2 \in V_{10,2},$$

$$\psi_4 = (\varphi, \psi_2)_5 \in V_{3,3},$$

$$\psi_5 = \frac{1}{2}(\psi_4, \psi_4)_2 \in V_{2,6},$$

$$\psi_6 = \frac{1}{2}(\psi_2, \psi_2)_4 \in V_{4,4},$$

$$\psi_7 = (\psi_4, \psi_6)_3 \in V_{1,7},$$

$$\psi_8 = (\psi_4, \psi_5)_1 \in V_{3,9}.$$

La relation $\psi_5 \in V_{2,6}$ par exemple signifie que ψ_5 est de degré 2 en (x, y), et de degré 6 par rapport aux coefficients $a, b, \ldots, h$ de φ. (Dans [11], ces covariants — à des facteurs constants près — sont notés $l, \varkappa, \mathrm{H}, r, \tau, p, \alpha, \mathrm{Q}$).

Alors, $(\psi_1, \psi_1)_2$ est un scalaire qui dépend de φ, disons $p_4(\varphi)$, où p_4 est une fonction polynomiale homogène de degré 4 de $a, b, \ldots, h$. On a

$$p_4 \in \mathbf{C}[V_7]_4^G.$$

Définissons de même $p_8, q_8, p_{12}, q_{12}, p_{20}, p_{30}$, éléments de $\mathbf{C}[V_7]_8^G$, $\mathbf{C}[V_7]_8^G$, $\mathbf{C}[V_7]_{12}^G$, $\mathbf{C}[V_7]_{12}^G$, $\mathbf{C}[V_7]_{20}^G$, $\mathbf{C}[V_7]_{30}^G$ par :

$$p_8(\varphi)=(\psi_2, \psi_1^3)_6, \qquad q_8(\varphi)=(\psi_6, \psi_1^2)_4, \qquad p_{12}(\varphi)=(\psi_3, \psi_1^5)_{10},$$

$$q_{12}(\varphi)=\frac{1}{2}(\psi_5, \psi_5)_2, \qquad p_{20}(\varphi)=(\psi_5, \psi_7^2)_2, \qquad p_{30}(\varphi)=(\psi_8, \psi_7^3)_3.$$

(Dans [11], les invariants q_{12}, p_{20}, p_{30} — à des facteurs constants près — sont notés R, A, B).

3.2. On a, après quelques calculs :

$$\psi_1=(ag-6bf+15ce-10d^2)x^2 + (ah-5bg+9cf-5de)xy+(bh-6cg+15df-10e^2)y^2, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\psi_2=&(ae-4bd+3c^2)x^6\\ &+3(af-3be+2cd)x^5y+3(ag-bf-5ce+5d^2)x^4y^2\\ &+(ah+5bg-21cf+15de)x^3y^3+3(bh-cg-5df+5e^2)x^2y^4\\ &+3(ch-3dg+2ef)xy^5+(dh-4eg+3f^2)y^6\end{aligned} \tag{14}$$

$$\psi_3=(ac-b^2)x^{10}+\ldots+(fh-g^2)y^{10}, \tag{15}$$

$$\psi_4=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3, \tag{16}$$

avec :

$$2A=2ach-7adg+5aef-2b^2h+7bcg +22bdf-25be^2-27c^2f+45cde-20d^3,$$

$$6B=3adh-18aeg+15af^2-3bch+30bdg -27bef-12c^2g-3cdf+30ce^2-15d^2e,$$

$$6C=-3aeh+3afg+18bdh-30beg+12bf^2 -15c^2h+27cdg+3cef-30d^2f+15de^2,$$

$$2D=-2afh+2ag^2+7beh-7bfg-5cdh -22ceg+27cf^2+25d^2g-45def+20e^3,$$

$$\psi_6=A'x^4+4B'x^3y+6C'x^2y^2+4D'xy^3+E'y^4 \tag{17}$$

avec :

$$50A' = 10(ae-4bd+3c^2)(bh-cg-5df+5e^2)$$
$$-5(af-3be+2cd)(ah+5bg-21cf+15de)+6(ag-bf-5ce+5d^2)^2$$
$$200B' = 50(ae-4bd+3c^2)(ch-3dg+2ef)$$
$$-30(af-3be+2cd)(bh-cg-5df+5e^2)$$
$$+2(ag-bf-5ce+5d^2)(ah+5bg-21cf+15de)$$
$$300C' = 50(ae-4bd+3c^2)(dh-4eg+3f^2)$$
$$-18(ag-bf-5ce+5d^2)(bh-cg-5df+5e^2)+(ah+5bg-21cf+15de)^2$$
$$200D' = 50(af-3be+2cd)(dh-4eg+3f^2)$$
$$-30(ag-bf-5ce+5d^2)(ch-3dg+2ef)$$
$$+2(ah+5bg-21cf+15de)(bh-cg-5df+5e^2)$$
$$50E' = 10(ag-bf-5ce+5d^2)(dh-4eg+3f^2)$$
$$-5(ah+5bg-21cf+15de)(ch-3dg+2ef)+6(bh-cg-5df+5e^2)^2.$$

3.3. LEMME. — *Si* $\psi_1 = q_{12}(\varphi) = p_{20}(\psi) = 0$, φ *est une forme instable.*

(Cela veut dire que tous les éléments de $\mathbf{C}[V_7]^G$ homogènes de degré >0 s'annulent pour φ; ou encore que φ admet une racine d'ordre $\geqslant 4$ en x/y).

Considérons dans [11] la liste des 33 générateurs de l'algèbre $\mathbf{C}[V_7]^G$. Parmi eux, 30 sont de degré $\leqslant 26$ et s'obtiennent comme transvectants d'un covariant de φ et d'une puissance de ψ_1. Ils sont donc nuls pour φ.

Deux autres sont q_{12} et p_{20}. Ils sont nuls pour φ par hypothèse. Le dernier est p_{30}.

Soit $\mathscr{A}$ la sous-algèbre de $\mathbf{C}[V_7]^G$ engendrée par les invariants homogènes de degré <30. Tout élément de $\mathscr{A}$ homogène de degré >0 s'annule pour φ.

Une forme binaire de degré 6 admet 5 invariants homogènes fondamentaux de degrés 2, 4, 6, 10, 15, dont le dernier est entier sur l'algèbre engendrée par les 4 premiers (*cf.* par exemple [2], p. 291). En considérant les valeurs de ces invariants pour ψ_2, on obtient des invariants r_4, r_8, r_{12}, r_{20}, r_{30} de φ, homogènes de degrés 4, 8, 12, 20, 30, et r_{30} est entier sur $\mathbf{C}[r_4, r_8, r_{12}, r_{20}] \subset \mathscr{A}$. On a donc $r_{30}(\varphi) = 0$.

D'après [11], tout élément de $\mathbf{C}[V_7]^G_{30}$ est de la forme $\lambda p_{30} + s_{30}$, où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $s_{30} \in \mathscr{A}$. D'après [4], $r_{30} \notin \mathscr{A}$. Donc $r_{30} = \lambda p_{30} + s_{30}$ avec $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ et $s_{30} \in \mathscr{A}$. Alors $\lambda p_{30}(\varphi) = r_{30}(\varphi) = 0$, donc $p_{30}(\varphi) = 0$.

3.4. LEMME. — *On suppose que*

$$p_4(\varphi)=p_8(\varphi)=p_{12}(\varphi)=q_{12}(\varphi)=p_{20}(\varphi)=0.$$

Alors φ *est instable.*

Si $\psi_1=0$, φ est instable (lemme 3.3). On suppose désormais que $\psi_1\neq 0$. Puisque $p_4(\varphi)=0$, ψ_1 admet une racine double en x/y. En transformant φ par un élément de SL(2, C), on peut supposer que cette racine double est 0. Alors :

(18) $$\psi_1=\mu x^2 \qquad \text{où} \quad \mu\in \mathbf{C}-\{0\}.$$

D'après (13), cela entraîne :

(19) $$ah-5bg+9cf-5de=0,$$

(20) $$bh-6cg+15df-10e^2=0.$$

Compte tenu de (14) et (18), l'égalité $(\psi_2, \psi_1^3)_6=0$ entraîne :

(21) $$dh-4eg+3f^2=0.$$

Compte tenu de (15) et (18), l'égalité $(\psi_3, \psi_1^5)_{10}=0$ entraîne :

(22) $$fh-g^2=0.$$

Si $h=0$, les équations (22), (21), (20) entraînent successivement $g=0, f=0$, $e=0$, et φ est instable. Supposons désormais $h\neq 0$. En multipliant φ par une constante, on se ramène au cas où $h=1$.

La transformation $(x, y)\mapsto(x, y-gx)$ de SL(2, C), tout en conservant les hypothèses précédentes, ramène au cas où $g=0$, ce que nous supposons désormais. Les équations (22), (21), (20), (19) donnent successivement :

$$f=0, \qquad d=0, \qquad b=10e^2, \qquad a=0.$$

Donc :

(23) $$\varphi=70e^2x^6y+21cx^5y^2+35ex^3y^4+y^7.$$

Si α et β sont deux formes, écrivons désormais $\alpha\sim\beta$ si $\beta=\nu\alpha$ avec $\nu\in\mathbf{C}-\{0\}$. On trouve alors, en utilisant notamment (14), (16), (17) :

$$\psi_2\sim c^2x^6-30e^3x^5y-5cex^4y^2+15e^2x^2y^4+cxy^5,$$

$$\psi_4 \sim 30\, e^4 x^3 + c^2 x y^2 - 6\, e^3 y^3,$$

$$\psi_5 \sim 90\, c^2 e^4 x^2 - 1620\, e^7 x y - c^4 y^2,$$

$$\psi_6 \sim 4\, c^2 e^2\, x^4 + (90\, e^5 + c^3)\, x^3 y + 9\, c e^3 x^2 y^2 + c^2\, e x y^3 + 9\, e^4 y^4,$$

$$\psi_7 \sim c^2 (216\, e^5 + c^3)\, x + e^3 (1620\, e^5 + 12\, c^3)\, y,$$

$$(\psi_5,\, \psi_5)_2 \sim 9^3 . 10\, e^{14} + c^6 e^4,$$

$$\begin{aligned}(\psi_5,\, \psi_7^2)_2 \sim{} & 90\, c^2 e^4 . e^6 (1620\, e^5 + 12\, c^3)^2 \\ & + 2.810\, e^7 . c^2 (216\, e^5 + c^3)\, e^3 (1620\, e^5 + 12\, c^3) \\ & - c^4 . c^4 (216\, e^5 + c^3)^2.\end{aligned}$$

Écrivons que $(\psi_5, \psi_5)_2 = (\psi_5, \psi_7^2)_2 = 0$. Si $c = 0$, on voit que $e = 0$, et $\varphi = y^7$ est instable. Si $e = 0$, on voit que $c = 0$, et φ est instable. Supposons $c \neq 0$, $e \neq 0$, et aboutissons à une contradiction. On a alors $9^3 . 10\, e^{10} + c^6 = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned}& 90\, e^{10} (1620\, e^5 + 12\, c^3)^2 \\ & \quad + 1620\, e^{10} (216\, e^5 + c^3)(1620\, e^5 + 12\, c^3) - c^6 (216\, e^5 + c^3)^2 = 0.\end{aligned}$$

Compte tenu de $c^6 = -9^3 . 10\, e^{10}$, cela s'écrit :

$$\begin{aligned}& e^{10} (1620\, e^5 + 12\, c^3)^2 + 18\, e^{10} (216\, e^5 + c^3)(1620\, e^5 + 12\, c^3) \\ & \quad + 81\, e^{10} (216\, e^5 + c^3)^2 = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$1620\, e^5 + 12\, c^3 + 9 (216\, e^5 + c^3) = 0,$$

ou $1188\, e^5 + 7\, c^3 = 0$. Cela est incompatible avec $c^6 = -9^3 . 10\, e^{10}$.

3.5. Théorème. — *L'ensemble* $\{p_4, p_8, p_{12}, q_{12}, p_{20}\}$ *défini en* 3.1 *est un système de paramètres pour* $\mathbf{C}[V_7]^G$. *La complexité de* $\mathbf{C}[V_7]^G$ *est* 88.

D'après 3.4 et la théorie de Hilbert, $\mathbf{C}[V_7]^G$ est entier sur $\mathbf{C}[p_4, p_8, p_{12}, q_{12}, p_{20}]$. Comme le degré de transcendance de $\mathbf{C}[V_7]^G$ est 5, les polynômes $p_4, \ldots, p_{20}$ sont algébriquement indépendants, et $\{p_4, p_8, p_{12}, q_{12}, p_{20}\}$ est un système de paramètres. L'écriture correspondante de $F_7(z)$, admettant le même dénominateur que (4), est précisément (4). Or cette écriture de $F_7(z)$ est minimale (2.2). La complexité de $\mathbf{C}[V_7]^G$ est donc la somme des coefficients de $A(z)$, c'est-à-dire 88.

3.6. Lemme. — *Soit* $\lambda \in \mathbf{C}$. *Si* $\psi_1 = (\lambda p_{12} + q_{12})(\varphi) = p_{30}(\varphi) = 0$, φ *est instable.*

Imitons le raisonnement de 3.3. Les 30 premiers générateurs de $\mathbf{C}[V_7]^G$ sont nuls pour φ, et parmi eux p_{12}. D'après les hypothèses du lemme, on a aussi $q_{12}(\varphi)=p_{30}(\varphi)=0$. Il suffit de prouver que $p_{20}(\varphi)=0$.

Soit $\mathscr{B}$ la sous-algèbre de $\mathbf{C}[V_7]^G$ engendrée par les 33 générateurs de [11] à l'exception de p_{20}. Tout élément de $\mathscr{B}$ homogène de degré >0 s'annule pour φ.

La référence [2], p. 291, utilisée dans la démonstration 3.3, prouve aussi que l'invariant fondamental de degré 10 d'une sextique est entier sur l'algèbre engendrée par les invariants fondamentaux de degrés 2, 4, 6, 15. Donc, avec les notations de 3.3, r_{20} est entier sur $\mathbf{C}[r_4, r_8, r_{12}, r_{30}]$.

On a $r_4(\varphi)=r_{12}(\varphi)=0$.

Soit $q_{20}\in\mathbf{C}[V_7]^G_{20}$, défini par $q_{20}(\varphi)=(\varphi.(\varphi, \psi_2)_2, \psi_1^8)_{16}$. D'après [11], on a $r_{20}=\lambda_1 p_{20}+\lambda_2 q_{20}+s_{20}$, où λ_1, $\lambda_2\in\mathbf{C}$, et où s_{20} appartient à l'algèbre engendrée par les éléments de $\mathbf{C}[V_7]^G$ homogènes de degré <20, donc à $\mathscr{B}$. D'autre part, pour la forme $\varphi'=x^7+x^2y^5$, on a, d'après [4], $s_{20}(\varphi')=0$ et $r_{20}(\varphi')\neq 0$; comme le covariant $(\varphi', \varphi')_6$ est nul, on a $q_{20}(\varphi')=0$. On voit donc que $\lambda_1\neq 0$. Revenant à φ, on a $s_{20}(\varphi)=0$, et $q_{20}(\varphi)=0$ puisque $\psi_1=0$. Donc :

$$(24)\qquad r_{20}(\varphi)=\lambda_1 p_{20}(\varphi)\qquad\text{avec}\quad \lambda_1\in\mathbf{C}-\{0\}.$$

Toujours d'après [11], on a $r_{30}=\lambda_3 p_{30}+t_{30}$, où $\lambda_3\in\mathbf{C}$, et où t_{30} s'exprime comme polynôme par rapport aux 32 générateurs de $\mathbf{C}[V_7]^G$ de degrés <30; en fait, p_{20} ne figure pas dans cette expression parce que $\mathbf{C}[V_7]^G_{10}=0$ (*cf.* (6)). Donc $t_{30}(\varphi)=0$. Comme $p_{30}(\varphi)=0$, on a $r_{30}(\varphi)=0$. Comme r_{20} est entier sur $\mathbf{C}[r_4, r_8, r_{12}, r_{30}]$, on a $r_{20}(\varphi)=0$. Alors (24) prouve que $p_{20}(\varphi)=0$.

3.7. THÉORÈME. — *Il existe une partie finie Φ de $\mathbf{C}$ telle que, pour tout $\lambda\in\mathbf{C}-\Phi$, l'ensemble $\{p_4, p_8, q_8, \lambda p_{12}+q_{12}, p_{30}\}$ défini en* 3.1 *soit un système de paramètres pour* $\mathbf{C}[V_7]^G$.

(A) On pose $\varphi=ax^7+7bx^6y+\ldots+hy^7$ comme en 3.1. On suppose que :

$$p_4(\varphi)=p_8(\varphi)=q_8(\varphi)=\lambda p_{12}(\varphi)+q_{12}(\varphi)=p_{30}(\varphi)=0,$$

et l'on va voir que, pourvu que λ ne prenne pas un nombre fini de valeurs, φ est instable. Cela établira le théorème.

Si $\psi_1=0$, φ est instable (3.6). On suppose désormais que $\psi_1\neq 0$.

On a $p_4(\varphi)=0$. Raisonnant comme en 3.3, on peut donc supposer qu'on a (18), d'où (19) et (20). Comme $p_8(\varphi)=0$, on a encore (21).

Comme $q_8(\varphi)=0$, (18) et (17) entraînent, compte tenu de (21) :

$$(25)\quad -5(ah+5bg-21cf+15de)(ch-3dg+2ef) \\ +6(bh-cg-5df+5e^2)^2=0.$$

(B) Supposons $h\neq 0$. Raisonnant comme en 3.4, on se ramène au cas où $h=1$ et $g=0$. Les équations (19), (20), (21), (25) deviennent alors :

$$a+9cf-5de=0, \qquad b+15df-10e^2=0, \qquad d+3f^2=0,$$
$$-5(a-21cf+15de)(c+2ef)+6(b-5df+5e^2)^2=0.$$

Les trois premières équations précédentes donnent :

$$(26)\qquad d=-3f^2,$$

$$(27)\qquad b=10e^2-15df=10e^2+45f^3,$$

$$(28)\qquad a=5de-9cf=-15ef^2-9cf$$

et, en portant dans la quatrième, il vient :

$$-5(-15ef^2-9cf-21cf-45ef^2)(c+2ef) \\ +6(10e^2+45f^3+15f^3+5e^2)^2=0$$

ou, après simplifications :

$$(29)\qquad f(c+2ef)^2+9(e^2+4f^3)^2=0.$$

Soient k, $l\in\mathbf{C}$ tels que :

$$(30)\qquad f=-k^2, \qquad e=lk^3$$

(k et l existent car, si $f=0$, (29) entraîne $e=0$). Alors (29) devient :

$$(31)\qquad -k^2(c-2lk^5)^2+9(l^2-4)^2k^{12}=0.$$

Si $k=0$, on a $f=e=0$, et alors $a=b=d=0$, d'où $\psi_1=0$ ce qui est absurde. Donc $k\neq 0$. Alors (31) devient :

$$(c-2lk^5)^2=9(l^2-4)^2k^{10},$$

donc $c=(2l+3\varepsilon(l^2-4))k^5$, où $\varepsilon=\pm 1$. Utilisant cette dernière égalité et (26), (27), (28), (30), on a :

$$a=-15\,l k^7+9(2\,l+3\,\varepsilon(l^2-4))k^7=(3\,l+27\,\varepsilon(l^2-4))k^7$$
$$b=10\,l^2k^6-45\,k^6=(10\,l^2-45)k^6,$$
$$c=(2\,l+\varepsilon(l^2-4))k^5,$$
$$d=-3\,k^4, \qquad e=l k^3, \qquad f=-k^2, \qquad g=0, \qquad h=1,$$

donc :

$$\begin{aligned}\varphi=(3\,l+27\,\varepsilon(l^2-4))k^7x^7+7(10\,l^2-45)k^6x^6y\\ +21(2\,l+3\,\varepsilon(l^2-4))k^5x^5y^2-105\,k^4x^4y^3\\ +35\,l k^3x^3y^4-21\,k^2x^2y^5+y^7.\end{aligned}$$

La transformation $(x, y)\to(k^{-1}x, y)$ de $GL(2, \mathbf{C})$, qui ne change ni les hypothèses précédentes ni la conclusion à établir, ramène au cas où $k=1$, d'où

$$\begin{aligned}\varphi=(3\,l+27\,\varepsilon(l^2-4))\,x^7+7(10\,l^2-45)x^6y\\ +21(2\,l+3\,\varepsilon(l^2-4))x^5y^2-105\,x^4y^3+35\,l x^3y^4-21\,x^2y^5+y^7\end{aligned}$$

Faisons la transformation $(x, y)\to(-x, y)$ et en même temps changeons l en $-l$. Alors φ devient :

$$\begin{aligned}(3\,l-27\,\varepsilon(l^2-4))x^7+7(10\,l^2-45))x^6y\\ +21(2\,l-3\,\varepsilon(l^2-4))x^5y^2-105\,x^4y^3+35\,l x^3y^4-21\,x^2y^5+y^7.\end{aligned}$$

On voit donc qu'il suffit de prouver que φ est instable sous l'hypothèse $\varepsilon=1$. Alors :

$$a=3(9\,l^2+l-36), \qquad b=10\,l^2-45, \qquad c=3\,l^2+2\,l-12,$$
$$d=-3, \qquad e=1, \qquad f=-1, \qquad g=0, \qquad h=1.$$

En portant dans les formules (16), on trouve, après calculs :

$$\psi_4=-\frac{45}{2}(l-2)^2(l+2)^2(l x^3-6\,x^2y+3\,l xy^2-2\,y^3).$$

Alors :

$$\psi_5=\left(\frac{45}{2}\right)^2 (l-2)^2 (l+2)^4 ((lx-2y)(lx-2y)-(-2x+ly)^2)$$

$$=\frac{1}{4}(45)^2 (l-2)^3 (l+2)^5 (x^2-y^2),$$

$$q_{12}(\varphi)=-\frac{1}{16}(45)^4 (l-2)^6 (l+2)^{10}.$$

D'après (15), le terme en y^{10} de ψ_3 a pour coefficient -1. Par ailleurs, d'après (13) et (18) :

$$\psi_1=(6(10\,l^2-45)+15\,l(3\,l^2+2\,l-12)-90)\,x^2=45(l-2)\,(l+2)^2\,x^2$$

donc :

$$p_{12}(\varphi)=-(45)^5 (l-2)^5 (l+2)^{10},$$

$$(\lambda p_{12}+q_{12})\,(\varphi)=-(45)^4 (l-2)^5 (l+2)^{10}\left(45\,\lambda+\frac{1}{16}(l-2)\right).$$

Si $l=2$, on a :

$$\varphi=6\,x^7-35\,x^6 y+84\,x^5 y^2-105\,x^4 y^3+70\,x^3 y^4-21\,x^2 y^5+y^7$$

$$=(x-y)^6 (6\,x+y)$$

et φ est instable. Si $l=-2$, on a :

$$\varphi=-6\,x^7-35\,x^6 y-84\,x^5 y^2-105\,x^4 y^3-70\,x^3 y^4-21\,x^2 y^5+y^7$$

$$=(x+y)^6 (-6\,x+y)$$

et φ est instable. Supposons désormais $l\neq 2$, $l=-2$. Alors $l=2-720\,\lambda$.

L'expression $p_{30}(\varphi)$ est un polynôme en l à coefficients dans $\mathbf{C}$, disons $P(l)$. Montrons que P n'est pas identiquement nul. Prenons $l=0$. Alors :

$$a=-108,\qquad b=-45,\qquad c=-12,\qquad d=-3,$$

$$e=0,\qquad f=-1,\qquad g=0,\qquad h=1,$$

$$\psi_2\sim 3\,x^6-15\,x^5 y+10\,x^3 y^3+5\,x^2 y^4+xy^5,$$

$$\psi_4\sim 3\,x^2 y+y^3,$$

$$\psi_5\sim x^2-y^2,$$

$$\psi_6 \sim 9x^4 + 9x^3y + 3x^2y^2 + xy^3,$$
$$\psi_7 \sim 7x + 2y,$$
$$\psi_8 \sim x^3 + 3xy^2$$

d'où $(\psi_8, \psi_7^3)_3 \neq 0$. Cela prouve bien que P n'est pas identiquement nul. Cela posé, si l'on prend λ distinct des racines de $P(2-720\lambda)=0$, on a une contradiction et la démonstration est achevée dans le cas **B**.

(C) Supposons $h=0$. Si $g=0$, (21) donne $f=0$, (20) donne $e=0$, et φ est instable. Supposons désormais $g\neq 0$. On se ramène au cas où $g=1$, puis une opération de $SL(2, \mathbf{C})$ ramène au cas où $f=0$. Alors (21) donne $e=0$, (20) donne $c=0$, (19) donne $b=0$. Donc :

$$\varphi = ax^7 + 35dx^4y^3 + 7xy^6,$$
$$\psi_1 = (a-10d^2)x^2,$$
$$\psi_2 = 3((a+5d^2)x^4y^2 - 3dxy^5),$$
$$\psi_3 = (ax^5 + 10dx^2y^3)(5dx^4y + 5xy^4) - (10dx^3y^2 + y^5)^2,$$
$$\psi_4 = \frac{1}{2}(-d(7a+20d^2)x^3 + (2a+25d^2)y^3),$$
$$\psi_5 = -\frac{1}{4}d(7a+20d^2)(2a+25d^2)xy,$$
$$\psi_6 = \frac{3}{25}(a+5d^2)((a+5d^2)x^4 + 15dxy^3),$$
$$\psi_7 = -\frac{3}{200}(a+5d^2)(8a^2+245ad^2+800d^4)x,$$
$$\psi_8 = \frac{1}{16}d(7a+20d^2)(2a+25d^2)(d(7a+20d^2)x^3 + (2a+25d^2)y^3),$$
$$p_{12}(\varphi) = -(a-10d^2)^5,$$
$$q_{12}(\varphi) = -\frac{1}{64}d^2(7a+20d^2)^2(2a+25d^2)^2,$$
$$p_{30}(\varphi) \sim d(7a+20d^2)(2a+25d^2)^2 \ (a+5d^2)^3(8a^2+245ad^2+800d^4)^3.$$

On a donc :

$$64\lambda(a-10d^2)^5 + d^2(7a+20d^2)^2(2a+25d^2)^2 = 0 \tag{32}$$

$$d(7a+20d^2)(2a+25d^2)\ (a+5d^2)(8a^2+245ad^2+800d^4) = 0. \tag{33}$$

Nous imposons désormais $\lambda\neq 0$. Si $d=0$, (32) donne $a=0$, et φ est instable. Supposons désormais $d\neq 0$.

Si $a=-(20/7)d^2$ ou $a=-(25/2)d^2$, (32) donne $a=10d^2$, d'où contradiction. Si $a+5d^2=0$ ou $8a^2+245ad^2+800d^4=0$, on obtient 3 valeurs numériques de ad^{-2}, distinctes de 10, et (32) fournit 3 valeurs numériques de λ. Si l'on prend λ distinct de ces 3 valeurs, on a une contradiction et la démonstration est achevée dans le cas C.

3.8. REMARQUE. — Un peu plus de courage fournirait une valeur explicite de λ convenant dans le théorème 3.7. Notons que $\lambda=0$ ne convient pas; car la forme $\varphi=x^7+7xy^6$ est stable, mais les calculs de 3.7 (C) montrent que p_4, p_8, q_8, q_{12}, p_{30} s'annulent pour cette forme. On peut montrer aussi que $\{p_4, p_8, q_8, p_{12}, p_{30}\}$ n'est pas un système de paramètres.

3.9. REMARQUE. — Considérons les invariants r_4, r_8, r_{12}, r_{20}, r_{30} introduits dans la démonstration 3.3. Il est tentant d'essayer de compléter, soit $\{r_4, r_8, r_{12}, r_{20}\}$ avec un invariant de degré 12, soit $\{r_4, r_8, r_{12}, r_{30}\}$ avec un invariant de degré 8, pour obtenir des systèmes de paramètres de $\mathbf{C}[V_7]^G$. En fait, on peut montrer que si l'on choisit 4 invariants homogènes de ψ_2 et qu'on les considère comme des invariants de φ de degrés doubles, ces 4 invariants de φ ne font *jamais* partie d'un système de paramètres de $\mathbf{C}[V_7]^G$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROUWER (A. E.) and COHEN (A. M.). — *The Poincaré series of the polynomials invariant under* SU_2 *in its irreducible representation of degree* $\leqslant 17$, preprint of the Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[2] GORDAN (P.), *Vorlesungen über Invariantentheorie*, bd. II, Leipzig, Teubner, 1887.

[3] GRACE (J. H.) and YOUNG (A.). — *The Algebra of Invariants*, Cambridge Univ. Press, 1903.

[4] HAMMOND (J.). — A simple proof of the existence of irreducible invariants of degrees 20 and 30 for the binary seventhic, *Math. Ann.*, t. 36, 1980, p. 255-261.

[5] HOCHSTER (M.) and ROBERTS (J. L.). — Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, *Advances in Math.*, t. 13, 1974, p. 115-175.

[6] HUFFMAN (W. C.) and SLOANE (N. J. A.). — Most primitive groups have messy invariants, *Advances in Math.*, t. 32, 1979, p. 118-127.

[7] SHIODA (T.). — On the graded ring of invariants of binary octavics, *Amer. J. Math.*, t. 89, 1967, p. 1022-1046.

[8] SPRINGER (T. A.). — On the invariant theory of SU_2, *Indagationes Math.*, t. 42, 1980, p. 339-345.

[9] STANLEY (R. P.). — Hilbert functions of graded algebras, *Advances in Math.*, t. 28, 1978, p. 57-83.

[10] SYLVESTER (J. J.) and FRANKLIN (F.). — Tables of generating functions and grundforms for the binary quantics of the first ten orders, *Amer. J. Math.*, t. 2, 1879, p. 223-251.

[11] VON GALL (F.). — Das vollständige Formensystem der binären Form 7ter Ordnung, *Math. Ann.*, t. 31, 1888, p. 318-336.