

# BULLETIN DE LA S. M. F.

CHRISTIAN KASSEL

## La K-théorie stable

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 110 (1982), p. 381-416

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1982\\_\\_110\\_\\_381\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__381_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LA $K$ -THÉORIE STABLE

PAR

CHRISTIAN KASSEL (\*)

RÉSUMÉ. — Pour tout anneau  $A$ , on définit des groupes  $K_n^s(A)$  de  $K$ -théorie stable, obtenus par un procédé topologique de stabilisation à partir de la  $K$ -théorie algébrique. Une suite spectrale lie les groupes de  $K$ -théorie stable à l'homologie du groupe linéaire général  $GL_n(A)$  opérant par conjugaison sur les matrices de trace nulle.

ABSTRACT. — Given a ring  $A$ , we define abelian groups  $K_n^s(A)$  constructed by stabilization from the algebraic  $K$ -groups of  $A$ . There is a spectral sequence relating the stable  $K$ -groups to the homology of the full linear group  $GL_n(A)$  acting by conjugation on matrices of trace zero.

### Introduction

Pour tout anneau unitaire  $A$  et tout  $A$ -bimodule  $P$ , nous définissons une suite de groupes abéliens  $K_n^s(A, P)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), appelés *groupes de  $K$ -théorie stable* de l'anneau  $A$ . Ces groupes sont étroitement liés à certains groupes d'homologie du groupe linéaire général.

Le groupe  $GL_n(A)$  des matrices inversibles d'ordre  $n$  sur  $A$  opère par conjugaison sur le groupe  $M_n(P)$  de toutes les matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $P$ . Posons  $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$  et  $M(P) = \varinjlim_n M_n(P)$ . Les groupes de  $K$ -théorie stable apparaissent alors dans une suite spectrale

$$E_{pq}^2 = H_p(GL(A), K_q^s(A, P)) \Rightarrow H_{p+q}(GL(A), M(P))$$

qui converge vers les groupes d'homologie de  $GL(A)$  opérant par conjugaison sur  $M(P)$ . L'action de  $GL(A)$  sur  $K_q^s(A, P)$  est triviale.

---

(\*) Texte reçu le 20 novembre 1981, révisé le 24 mai 1982.

C. KASSEL, Université Louis Pasteur, Département de Mathématiques, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

Désignons par  $Tr$  l'homomorphisme composé

$$M(P) \xrightarrow{\text{trace}} P \rightarrow H_0(A, P) = P/[A, P]$$

$([A, P])$  est le sous-groupe de  $P$  engendré par les éléments  $ap - pa$ ,  $a \in A$  et  $p \in P$ ) et par

$$Tr_i : H_i(GL(A), M(P)) \rightarrow H_i(GL(A), H_0(A, P))$$

les homomorphismes induits par  $Tr$  en homologie. Alors  $Tr_i$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 0$  si et seulement si  $K_i^s(A, P) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . La  $K$ -théorie stable apparaît ainsi comme l'obstruction pour que la trace induise des isomorphismes en homologie.

La  $K$ -théorie stable a été définie pour la première fois par F. WALDHAUSEN au moyen d'un procédé de stabilisation nécessaire à l'étude de certains problèmes de topologie géométrique [23]. Continuant dans cette voie, nous avons déterminé certains groupes de  $K$ -théorie stable de  $\mathbb{Z}$  en montrant qu'ils sont en relation avec l'homotopie stable des sphères [11]. Dans une autre direction, nous avons utilisé la  $K$ -théorie stable pour calculer des groupes de  $K$ -théorie algébrique d'anneaux du type  $A[\varepsilon]$  ( $\varepsilon^2 = 0$ ) [10] [11].

Détaillons maintenant le contenu de chaque paragraphe.

Le procédé de Waldhausen fait appel à la notion de  $K$ -théorie algébrique d'un anneau simplicial. Le paragraphe 1 en rappelle la définition. Nous montrons sur un exemple élémentaire comment les groupes de  $K$ -théorie stable s'introduisent dans les calculs.

Le paragraphe 2 donne la construction par stabilisation d'un espace de  $K$ -théorie stable  $K^s(A, P)$  dans le cas général d'un anneau simplicial  $A$  et d'un bimodule simplicial  $P$ . On établit l'existence d'une suite spectrale convergeant vers les groupes d'homotopie de  $K^s(A, P)$  (théorème 2.7).

Au paragraphe 3 on explicite les relations de la  $K$ -théorie stable avec l'homologie de  $GL(A)$ . On calcule les premiers groupes  $K_i^s(A, P)$  en termes de l'homologie de divers groupes linéaires et des groupes  $H_i(A, P)$  d'homologie de Hochschild de  $A$  (corollaire 3.2).

Au paragraphe 4 on utilise la stabilisation introduite au paragraphe 2 pour définir une multiplication sur la  $K$ -théorie stable et pour construire des homomorphismes  $K_i(A) \rightarrow K_i^s(A, A) \rightarrow H_i(A, A)$ . On en déduit, lorsque  $A$  est commutatif, une minoration des groupes  $K_i^s(A, A)$  par les modules de différentielles  $\Omega_{A/\mathbb{Z}}^i$ .

Le paragraphe 5 est constitué de lemmes techniques nécessaires à la démonstration des résultats du paragraphe 4. Quant au paragraphe 6, il sert de référence constante pour l'homologie de Hochschild : c'est une liste de propositions connues ou faciles à démontrer.

**1. K-théorie d'un anneau simplicial**

Soit  $R$  un anneau simplicial unitaire. Pour tout entier  $n \geq 0$ , l'ensemble  $R_n$  des  $n$ -simplexes de  $R$  est muni d'une structure d'anneau unitaire; les faces et les dégénérescences sont des homomorphismes d'anneaux. L'ensemble  $\pi_0(R)$  des composantes connexes de  $R$  a aussi une structure d'anneau : c'est un anneau simplicial trivial ou discret (c'est-à-dire toutes les faces et dégénérescences de  $\pi_0(R)$  sont égales à l'identité). L'application canonique  $p : R \rightarrow \pi_0(R)$  est un homomorphisme d'anneaux simpliciaux.

A partir du groupe  $GL_n(\pi_0 R)$  des matrices inversibles et du groupe  $E_n(\pi_0 R)$  des matrices élémentaires, on construit les deux ensembles simpliciaux suivants.

DÉFINITION 1.1. — On définit  $\widehat{GL}_n(R)$  et  $\widehat{E}_n(R)$  au moyen des carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \widehat{GL}_n(R) & \longrightarrow & GL_n(\pi_0(R)) & & \widehat{E}_n(R) & \longrightarrow & E_n(\pi_0(R)) \\ \downarrow & & \downarrow & \text{et} & \downarrow & & \downarrow \\ M_n(R) & \xrightarrow{M_n(p)} & M_n(\pi_0(R)) & & M_n(R) & \xrightarrow{M_n(p)} & M_n(\pi_0(R)) \end{array}$$

On pose  $\widehat{GL}(R) = \varinjlim_n \widehat{GL}_n(R)$  et  $\widehat{E}(R) = \varinjlim_n \widehat{E}_n(R)$ .

Les ensembles simpliciaux  $\widehat{GL}(R)$  et  $\widehat{E}(R)$  sont des monoïdes pour la multiplication des matrices. On peut considérer les classifiants  $B\widehat{GL}(R)$  et  $B\widehat{E}(R)$ . Il est clair que  $\pi_1 B\widehat{GL}(R) = GL(\pi_0 R)$  et  $\pi_1 B\widehat{E}(R) = E(\pi_0 R)$ . Ces groupes fondamentaux contiennent tous deux le groupe parfait  $E(\pi_0 R)$ . La construction + de QUILLEN [14] permet de former les espaces  $B\widehat{GL}(R)^+$  et  $B\widehat{E}(R)^+$ . On peut poser la

DÉFINITION 1.2. (WALDHAUSEN [23]). — L'espace de K-théorie algébrique de l'anneau simplicial  $R$  est

$$K(R) = K_0(\pi_0 R) \times B\widehat{GL}(R)^+.$$

Ses groupes d'homotopie sont notés  $K_i(R)$ .

On observe aussitôt qu'on retrouve la définition de Quillen lorsque  $R$  est discret. En basses dimensions, on a :

$$K_0(R) = K_0(\pi_0 R)$$

$$K_1(R) = \pi_1 B\hat{G}L(R)^+ = \pi_1 B\hat{G}L(R)^{ab} = GL(\pi_0 R)^{ab} = K_1(\pi_0 R).$$

En ce qui concerne  $B\hat{E}(R)^+$ , on a la

PROPOSITION 1.3. — *L'espace  $B\hat{E}(R)^+$  est le revêtement universel de  $B\hat{G}L(R)^+$ .*

*Preuve.* — Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Y \\ u \downarrow & & v \downarrow \\ B\hat{G}L(R) & \rightarrow & B\hat{G}L(R)^+ \end{array}$$

où  $Y$  est le revêtement universel de  $B\hat{G}L(R)^+$ . La fibre de  $v$  s'identifie au groupe discret  $\pi_1 B\hat{G}L(R)^+ = GL(\pi_0 R)^{ab}$ . Comme la fibre de  $u$  a le type d'homotopie de celle de  $v$ ,  $X$  est le revêtement de  $B\hat{G}L(R)$  correspondant au sous-groupe  $E(\pi_0 R)$  de  $\pi_1 B\hat{G}L(R) = GL(\pi_0 R)$ . Par définition même de  $\hat{E}(R)$  (voir le carré cartésien de droite de 1.1),  $X$  a alors le type d'homotopie de  $B\hat{E}(R)$ . Par ailleurs

$$H_*(Y, X) \cong H_*(B\hat{G}L(R)^+, B\hat{G}L(R)) = 0.$$

Comme  $\pi_1(X) = E(\pi_0 R)$ , alors  $\pi_1(X)^{ab} = 0 = \pi_1(Y)$ . Il résulte des propriétés fondamentales de la construction  $+$  de Quillen que  $Y \cong X^+ \cong B\hat{E}(R)^+$ .  $\square$

Introduisons maintenant un autre espace lié à la  $K$ -théorie algébrique de l'anneau simplicial  $R$ .

DÉFINITION ET PROPOSITION 1.4. — *Soit  $F(R)$  la fibre théorique de l'application de  $B\hat{G}L(R)$  dans  $B\hat{G}L(R)^+$ . Elle a le type d'homotopie de la fibre de  $B\hat{E}(R) \rightarrow B\hat{E}(R)^+$ .  $F(R)$  est un espace acyclique dont le groupe fondamental  $\pi_1 F(R)$  est isomorphe au groupe de Steinberg  $St(\pi_0 R)$  de l'anneau  $\pi_0(R)$ .*

*Preuve.* — Ce résultat est bien connu lorsque  $R$  est un anneau discret, c'est-à-dire isomorphe à  $\pi_0(R)$  (voir [14]). Lorsque  $R$  est un anneau simplicial quelconque, la première assertion résulte du fait (démontré en 1.3) que le carré

$$\begin{array}{ccc} B\hat{E}(R) & \rightarrow & B\hat{E}(R)^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\hat{G}L(R) & \rightarrow & B\hat{E}(R)^+ \end{array}$$

est cartésien à homotopie près. La projection  $p : R \rightarrow \pi_0(R)$  induit une application  $F(R) \rightarrow F(\pi_0 R)$  dont nous notons la fibre théorique par  $\Phi(R)$ . Alors l'isomorphisme  $\pi_1 F(R) \cong \pi_1 F(\pi_0 R) = St(\pi_0 R)$  est une conséquence du

LEMME 1.5. —  $\Phi(R)$  est simplement connexe.

*Démonstration du lemme.* — De la suite spectrale associée à la fibration  $\Phi(R) \rightarrow F(R) \rightarrow F(\pi_0 R)$ , on tire la suite exacte

$$H_2(F(\pi_0 R)) \rightarrow H_0(F(\pi_0 R), H_1(\Phi(R))) \rightarrow H_1(F(R)).$$

Or par définition de la construction  $+$ ,  $F(R)$  et  $F(\pi_0 R)$  sont des espaces acycliques. Les groupes de droite et de gauche sont nuls et par conséquent,  $H_0(F(\pi_0 R), H_1(\Phi(R))) = 0$ .

Considérons maintenant le diagramme suivant dont toutes les lignes et les colonnes sont par définition des fibrations

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccc} \Phi(R) & \rightarrow & F(R) & \rightarrow & F(\pi_0 R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \rightarrow & B\hat{E}(R) & \rightarrow & BE(\pi_0 R) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \rightarrow & B\hat{E}(R)^+ & \rightarrow & BE(\pi_0 R)^+ \end{array}$$

Par définition de  $B\hat{E}(R)$ ,  $\mathcal{M}$  est simplement connexe. La fibration verticale de gauche induit donc la surjection  $\pi_2 F \rightarrow \pi_1 \Phi(R)$  de  $\pi_1 F(R)$ -modules. Or  $\pi_1 F(R)$  opère sur la fibre  $F$  via  $\pi_1 B\hat{E}(R)^+$  qui est nul. (Prop. 1.3). Par conséquent  $\pi_1 \Phi(R)$  est un  $\pi_1 F(R)$ -module (abélien) trivial, et on a :

$$\pi_1 \Phi(R) = H_1(\Phi(R)) = H_0(F(\pi_0 R), H_1(\Phi(R))) = 0. \quad \square$$

Soit  $A$  un anneau, considéré comme anneau simplicial discret. L'espace  $F(A)$  nous permet de définir de nouveaux groupes que nous identifierons au paragraphe 2 comme des groupes de  $K$ -théorie stable. Ces groupes nous serviront dans les calculs de  $K$ -théorie algébrique qui suivent.

DÉFINITION 1.7. — Soit  $A$  un anneau (discret) et  $P$  un  $A$ -bimodule (discret). Pour tout entier  $i \geq 0$ , nous posons

$$K_i^s(A, P) = H_i(F(A), M(P)),$$

groupe d'homologie dans lequel le groupe fondamental  $St(A)$  de  $F(A)$  opère par conjugaison sur le groupe des matrices  $M(P) = \varinjlim_n M_n(P)$  à coefficients dans  $P$ . Lorsque  $P = A$ , on pose :  $K_i^s(A) = K_i^s(A, A)$ .

### 1.8. Exemples d'anneaux simpliciaux :

Soit  $C$  un groupe abélien (resp. simplicial) et  $X$  un ensemble simplicial. On note  $C[X]$  le groupe abélien simplicial (resp. bisimplicial) dont les  $n$ -simplexes sont donnés par la somme directe de copies de  $C$  indexées par les  $n$ -simplexes de  $X$ . Si  $X$  a un point-base  $*$ , on pose  $\tilde{C}[X] = C[X]/C[*]$ . On observe facilement [1], paragraphe 1 que le foncteur  $X \mapsto C[X]$  est une théorie d'homologie, c'est-à-dire  $X \mapsto \pi_i C[X]$  vérifie les axiomes d'Eilenberg-Steenrod sauf l'axiome de la dimension. En particulier si  $C$  est discret,  $\pi_i C[X] = H_i(X, C)$ . Par conséquent, si  $S^n$  est une représentation simpliciale de la sphère de dimension  $n$ ,  $\tilde{C}[S^n]$  est une représentation commode pour l'espace d'Eilenberg-Mac Lane  $K(C, n)$ . Dans le cas général d'un groupe abélien simplicial quelconque, les groupes d'homotopie  $\pi_i C[X]$  se calculent au moyen de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch.

En considérant une représentation simpliciale convenable  $I$  pour le segment  $[0, 1]$ , alors on a la suite exacte des groupes abéliens simpliciaux

$$0 \rightarrow C \rightarrow \tilde{C}[I] \rightarrow \tilde{C}[S^1] \rightarrow 0.$$

Cette suite est scindée (sur  $\mathbb{Z}$ ) car elle provient par tensorisation par  $C$  de la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}[I] \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}[S^1] \rightarrow 0$ .  $\tilde{C}[S^1]$  est contractile et  $\tilde{C}[S^1]$  a le type d'homotopie du classifiant  $BC$  de  $C$ .

Avec ces notations, introduisons deux classes fondamentales d'anneaux simpliciaux.

a) A tout ensemble simplicial  $Y$ , KAN [7] a associé un groupe simplicial  $GY$  qui a le type d'homotopie de l'espace des lacets  $\Omega|Y|$  de la réalisation géométrique de  $Y$ . Pour tout anneau  $A$  (simplicial ou non), on obtient un anneau simplicial  $R$  en posant  $R = A[GY]$ .

b) On se donne un anneau  $A$  (éventuellement simplicial) et  $P$  un  $A$ -bimodule simplicial. Alors  $\tilde{P}[S^n]$  a également une structure de  $A$ -bimodule. On met sur le groupe abélien  $A \oplus \tilde{P}[S^n]$  l'unique produit compatible avec la projection sur  $A$  et nul sur le facteur  $\tilde{P}[S^n]$  (cf. [10]). On obtient ainsi un anneau simplicial dont les groupes d'homotopie sont donnés par la formule suivante lorsque  $A$  et  $P$  sont discrets et que  $n \geq 1$ ,

$$\pi_i(A \oplus \tilde{P}[S^n]) = \begin{cases} A & \text{si } i = 0 \\ P & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons sur cet exemple ( $n \geq 1$ ) par quelle méthode on peut effectuer des calculs de  $K$ -théorie algébrique d'anneaux simpliciaux.

Comme  $A \oplus \tilde{P}[S^n] \rightarrow A$  est scindé et que  $\tilde{P}[S^n]$  est connexe et de carré nul, on a la suite exacte de monoïdes  $M(\tilde{P}[S^n]) \rightarrow \hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n]) \rightarrow E(A)$ . En passant aux classifiants, on a la fibration

$$BM(\tilde{P}[S^n]) \rightarrow B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n]) \rightarrow BE(A).$$

Le diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} BM(\tilde{P}[S^n]) & = & BM(\tilde{P}[S^n]) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U_n & \rightarrow & B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n]) \rightarrow BE(A)^+ & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ F(A) & \rightarrow & BE(A) & \rightarrow & BE(A)^+ \end{array}$$

livre une fibration

$$(1.9) \quad BM(\tilde{P}[S^n]) \rightarrow U_n \rightarrow F(A)$$

Il en résulte que  $\pi_1 U_n \cong \pi_1 F(A) \cong St(A)$ .

En appliquant la construction + relativement au groupe parfait  $St(A)$ , on forme  $U_n^+$ . Le groupe fondamental de  $U_n^+$  est nul.

LEMME 1.10. —  $U_n^+$  a le type d'homotopie de la fibre de  $B\hat{E}(A \oplus P[S^n])^+ \rightarrow BE(A)^+$ .

Démonstration du lemme. — On considère le diagramme commutatif entre les deux fibrations

$$\begin{array}{ccccc} U_n & \rightarrow & B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n]) & \rightarrow & BE(A)^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ (\text{fibre}) & \rightarrow & B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n])^+ & \rightarrow & BE(A)^+ \end{array}$$

Dans les deux suites spectrales de Serre associées, le groupe  $\pi_1 BE(A)^+ = 0$  opère trivialement sur l'homologie de la fibre. D'après le théorème de comparaison de Zeeman, les deux applications verticales de droites étant des équivalences d'homologie, il en est de même de  $U_n \rightarrow (\text{fibre})$ . Comme  $\pi_1(\text{fibre}) = \text{Ker}(\pi_1 B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^n])^+ \rightarrow \pi_1 BE(A)^+)$  est nul, l'application précédente se factorise par  $U_n^+$ . L'application  $U_n^+ \rightarrow (\text{fibre})$  est une équivalence d'homologie entre deux espaces simplement connexes : c'est donc une équivalence d'homotopie (faible). □

Considérons maintenant la suite spectrale d'homologie associée à la fibration (1.9). Pour une théorie d'homologie  $h_*$  quelconque, elle s'écrit :

$$E_{pq}^2 = H_p(F(A), h_q(BM(\tilde{P}[S^n]))) \Rightarrow h_{p+q}(U_n) \cong h_{p+q}(U_n^+).$$

Pour  $h_*$  nous prenons l'homotopie stable. Comme la fibre est  $n$ -connexe, le théorème de la suspension de FREUDENTHAL ([25], Thm. VII, 7.13) entraîne que

$$h_q(BM(\tilde{P}[S^n])) = \pi_q BM(\tilde{P}[S^n]) = \begin{cases} M(P) & \text{pour } q = n + 1 \\ 0 & \text{pour } q \neq n + 1 \text{ et } q \leq 2n. \end{cases}$$

Il en résulte que  $h_i(U_n^+) = 0$  pour  $i \leq n$  et que  $h_i(U_n^+) = H_{i-n-1}(F(A), M(P))$  pour  $n + 1 \leq i \leq 2n$ . Comme  $U_n^+$  est aussi simplement connexe, un résultat classique de topologie algébrique montre qu'il est  $n$ -connexe et, en appliquant une seconde fois le théorème de la suspension, on a

$$\begin{aligned} K_i(A \oplus \tilde{P}[S^n])/K_i(A) &= \pi_i(U_n^+) && \text{(lemme 1.10)} \\ &= h_i(U_n^+) && \text{pour } i \leq 2n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } i \leq n \\ H_{i-n-1}(F(A), M(P)) & \text{pour } n + 1 \leq i \leq 2n, \end{cases} \end{aligned}$$

Par définition des groupes introduits en 1.7, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 1.11. — Soit  $n \geq 1$  et  $A$  et  $P$  discrets, alors

$$K_i(A \oplus \tilde{P}[S^n]) = K_i(A) \oplus \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ K_{i-n-1}^?(A, P) & \text{si } n + 1 \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

En exprimant ces isomorphismes en termes de  $K$ -théorie relative, on a de manière équivalente :

$$\begin{aligned} K_i^?(A, P) &= K_{i+n}(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}])/K_{i+n}(A) \\ &= K_{i+n}(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}], P[S^{n-1}]) \text{ quand } n \geq i + 2. \end{aligned}$$

Ainsi le groupe  $K_i^?(A, P)$  apparaît comme un groupe de  $K$ -théorie relative d'un idéal suffisamment connexe (au moins  $i$ -connexe). Au paragraphe 2 on montre par quel procédé il est possible de se débarrasser de l'indice  $n$  dans les formules précédentes.

**2. Stabilisation de la K-théorie algébrique**

Donnons-nous un anneau simplicial  $A$  et un  $A$ -bimodule simplicial  $P$ .  
 Considérons le carré commutatif (dont les morphismes sont évidents)

$$\begin{array}{ccc} A \oplus P & \rightarrow & A \oplus \tilde{P}[I] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & A \oplus \tilde{P}[S^1]. \end{array}$$

Il est cartésien d'après 1.8. Si  $P$  est  $k$ -connexe, les morphismes du carré sont  $(k + 1)$ -connexes. Pour reprendre la terminologie de [23], paragraphe 1, le carré est  $(k + 1, k + 1)$ -connexe et homotopiquement cartésien. La proposition 1.3 de [23] (dans la version corrigée de [18], proposition 9.5) affirme qu'en appliquant le foncteur  $K$  au carré précédent, le carré

$$\begin{array}{ccc} K(A \oplus P) & \rightarrow & K(A \oplus \tilde{P}[I]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(A) & \rightarrow & K(A \oplus \tilde{P}[S^1]) \end{array}$$

est  $(k + 2, k + 2)$ -connexe et  $2(k + 2)$ -homotopiquement cartésien, en d'autres termes, l'application induite entre les fibres des flèches horizontales est  $(2k + 5)$ -connexe (toutes ces dimensions résultent du théorème d'excision en homotopie [25], VII.7). Or  $A \oplus \tilde{P}[I]$  est homotope à  $A$ , car  $\tilde{P}[I]$  est contractile. La fibre de la flèche horizontale du haut a donc le type d'homothétie de la fibre  $K(A \oplus P, P)$  de l'application  $K(A \oplus P) \rightarrow K(A)$ . Quant à la fibre de la flèche horizontale du bas, elle a le type d'homotopie de l'espace des lacets  $\Omega K(A \oplus \tilde{P}[S^1], \tilde{P}[S^1])$ .

En résumé, si  $P$  est  $k$ -connexe, on a construit une application  $(2k + 5)$ -connexe

(2.1) 
$$K(A \oplus P, P) \rightarrow \Omega K(A \oplus \tilde{P}[S^1], \tilde{P}[S^1]).$$

Nous appliquons ce qui précède au cas où le bimodule est de la forme  $\tilde{P}[S^{n-1}]$ . Dans ce cas, il est  $(n - 2)$ -connexe ( $n \geq 2$ ) et  $\tilde{P}[S^{n-1}][S^1] \cong \tilde{P}[S^n]$ .

(2.1) donne une application  $(2n + 1)$ -connexe

$$K(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}], \tilde{P}[S^{n-1}]) \rightarrow \Omega K(A \oplus \tilde{P}[S^n], \tilde{P}[S^n]).$$

Par application itérée du foncteur  $\Omega$ , on a une  $(n + 1)$ -équivalence

(2.2) 
$$\Omega^n K(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}], \tilde{P}[S^{n-1}]) \rightarrow \Omega^{n+1} K(A \oplus \tilde{P}[S^n], \tilde{P}[S^n]) \quad (n \geq 2).$$

En prenant le télescope de ces applications, on a la

DÉFINITION 2.3. — *L'espace de K-théorie stable de A est défini par*

$$K^s(A, P) = \varinjlim_n \Omega^n K(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}], \tilde{P}[S^{n-1}]).$$

Si  $A = P$ , on pose  $K^s(A) = K^s(A, A)$ .

Rappelons que WALDHAUSEN ([24], paragraphe 6) définit  $K^s(A)$  comme la limite  $\varinjlim_n \Omega^n$  fibre  $(K(A[GS^n]) \rightarrow K(A))$ ,  $A[GS^n]$  étant l'exemple (a) de 1.8. Sa définition est équivalente à la nôtre, comme il est démontré p. 388 de [24].

D'après (2.2), l'application

$$\Omega^k K(A \oplus \tilde{P}[S^{k-1}], \tilde{P}[S^{k-1}]) \rightarrow K^s(A, P)$$

est  $(k + 1)$ -connexe, ce que nous exprimons dans la

PROPOSITION 2.4. — *Pour tout anneau simplicial A et tout A-bimodule simplicial P, la stabilisation induit les isomorphismes*

$$\pi_n K^s(A, P) \cong K_{n+k}(A \oplus \tilde{P}[S^{k-1}]) / K_{n+k}(A) \quad \text{pour } n \leq k \geq 2.$$

Cette proposition jointe à la proposition 1.11 donnent le

COROLLAIRE 2.5. — *Lorsque A et P sont discrets, alors*

$$\pi_n K^s(A, P) \cong K_n^s(A, P) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Les notations introduites en 1.7 trouvent leur justification dans ce corollaire. Lorsque  $A$  et  $P$  sont discrets, nous dirons désormais que les groupes  $K_i^s(A, P)$  sont les *groupes de K-théorie stable* de l'anneau  $A$  (à coefficients dans  $P$ ).

L'espace de K-théorie stable a de bonnes propriétés fonctorielles. Un homomorphisme  $P \rightarrow Q$  de  $A$ -bimodules induit une application  $K^s(A, P) \rightarrow K^s(A, Q)$ , définie à homotopie près. L'énoncé suivant indique le comportement de la K-théorie stable lorsqu'on est en présence d'une suite exacte  $O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$  de  $A$ -bimodules.

PROPOSITION 2.6. — *La suite exacte  $O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$  de A-bimodules simpliciaux induit la fibration homotopique*

$$K^s(A, P) \rightarrow K^s(A, Q) \rightarrow K^s(A, R).$$

*Preuve.* — Le carré

$$\begin{array}{ccc} A \oplus \tilde{P}[S^m] & \rightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \oplus \tilde{Q}[S^m] & \rightarrow & A \oplus \tilde{R}[S^m] \end{array}$$

est  $(m, m)$ -connexe et homotopiquement cartésien. En suivant un raisonnement analogue à celui qui a été mené plus haut, on voit que l'application induite

$$\Omega^{m+1}K(A \oplus \tilde{P}[S^m], \tilde{P}[S^m]) \rightarrow \Omega^{m+1} \text{ fibre}(K(A \oplus \tilde{Q}[S^m]) \rightarrow K(A \oplus \tilde{R}[S^m]))$$

est  $(m + 2)$ -connexe ( $m \geq 1$ ). A la limite, l'application

$$K^s(A, P) \rightarrow \text{fibre}(K^s(A, Q) \rightarrow K^s(A, R))$$

est donc une équivalence d'homotopie (faible).  $\square$

Nous abordons maintenant le problème du calcul des groupes d'homotopie de  $K^s(A, P)$ . Nous montrons dans un instant qu'ils forment l'aboutissement d'une suite spectrale.

**THÉORÈME 2.7.** — *Il existe une suite spectrale (du premier quadrant) convergeant vers l'homotopie de  $K^s(A, P)$ . Elle est de la forme*

$$E^2_{pq} = H_p(F(A), M(\pi_q P)) \Rightarrow \pi_* K^s(A, P).$$

Dans le terme  $E^2$ , le groupe  $\pi_1 F(A)$  opère par conjugaison sur les coefficients.

Lorsque  $P$  est discret,  $\pi_i P = 0$  pour  $i \geq 1$ . Les termes  $E^2_{pq}$  de la suite spectrale sont tous nuls, sauf ceux de la ligne du bas. On retrouve ainsi le corollaire 2.5.

On a aussi les isomorphismes :

$$\begin{aligned} K^s_0(A, P) &\cong H_0(F(A), M(\pi_0 P)) \\ &\cong H_0(St(A), M(\pi_0 P)) \\ &\cong K^s_0(\pi_0 A, \pi_0 P). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Reprenons mot pour mot le début de la démonstration de la proposition 1.11. On a le diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} BM(\tilde{P}[S^k]) & = & BM(\tilde{P}[S^k]) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U_k & \rightarrow & B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^k]) & \rightarrow & B\hat{E}(A)^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ F(A) & \rightarrow & B\hat{E}(A) & \rightarrow & B\hat{E}(A)^+. \end{array}$$

Pour les mêmes raisons qu'en 1.10, le groupe  $\pi_1 U_k$  est parfait et  $U_k^+$  a le type d'homotopie de la fibre de  $B\hat{E}(A \oplus \tilde{P}[S^k])^+ \rightarrow B\hat{E}(A)^+$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} \pi_i(U_k^+) &= K_i(A \oplus \tilde{P}[S^k])/K_i(A) \quad \text{pour } i \geq 2 \text{ et } k \geq 1 \\ &= \pi_{i-k-1}K^s(A, P) \quad \text{pour } k+1 \leq i \leq 2k \quad (\text{Prop. 2.4}). \end{aligned}$$

On a également la suite spectrale

$$E_{pq}^2 = H_p(F(A), h_q(BM(\tilde{P}[S^k]))) \Rightarrow h_{p+q}(U_k) \cong h_{p+q}(U_k^+).$$

Toujours en prenant pour  $h_*$  l'homotopie stable, on a en vertu du théorème de Freudenthal :

$$h_q(BM(\tilde{P}[S^k])) = \pi_q BM(\tilde{P}[S^k]) = \begin{cases} 0 & \text{pour } q \leq k \\ M(\pi_{q-k-1}P) & \text{pour } k+1 \leq q \leq 2k. \end{cases}$$

Il en résulte que  $U_k^+$  est  $k$ -connexe et donc que

$$\pi_i(U_k^+) = h_i(U_k^+) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \leq k \\ \pi_{i-k-1}K^s(A, P) & \text{pour } k+1 \leq i \leq 2k. \end{cases}$$

On a ainsi une suite spectrale dont le terme  $E_{pq}^2$  est nul pour  $q \leq k$  et est isomorphe à  $H_p(F(A), M(\pi_{q-k-1}P))$  pour  $k+1 \leq q \leq 2k$ . En prenant l'entier  $k$  assez grand et en réindexant la suite spectrale en posant  $q' = q - k - 1$ , on obtient le résultat désiré.  $\square$

Le théorème précédent peut être précisé lorsque  $A$  est commutatif et que les structures de  $A$ -modules à droite et à gauche sont les mêmes sur  $P$ , plus précisément lorsque  $[A, A] = [A, P] = 0$ , où  $[A, P]$  désigne le sous-groupe simplicial de  $P$  engendré par les éléments de la forme  $ap-pa$  ( $a \in A, p \in P$ ).

PROPOSITION 2.8. — *Supposons que  $[A, A] = [A, P] = 0$ , alors il existe deux applications (naturelles en  $P$ )*

$$|P| \xrightarrow{i} K^s(A, P) \rightarrow |P|$$

dont la composition est, à homotopie faible près, l'identité sur la réalisation géométrique de  $P$ .

Ce résultat est dû à WALDHAUSEN qui l'a démontré ([24], Proposition 6.1) lorsque  $P = A$ . Sa démonstration s'étend sans peine au cas général. Décrivons l'application  $i$ . On remarque (1.8) que

$$|P| \cong \lim_m \Omega^m |\tilde{P}[S^m]| \cong \lim_m \Omega^m |B\tilde{P}[S^{m-1}]|$$

Il suffit donc de décrire l'application  $B\tilde{P}[S^{m-1}] \rightarrow K(A \oplus \tilde{P}[S^{m-1}], \tilde{P}[S^{m-1}])$  qui, à la limite, induit  $i$ . Considérons les 3 fibrations horizontales ( $m \geq 2$ )

$$\left. \begin{array}{ccccc} B\tilde{P}[S^{m-1}] & \rightarrow & B\hat{G}L_1(A \oplus \tilde{P}[S^{m-1}]) & \rightarrow & B\hat{G}L_1(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BM(\tilde{P}[S^{m-1}]) & \rightarrow & B\hat{G}L(A \oplus \tilde{P}[S^{m-1}]) & \rightarrow & B\hat{G}L(A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(A \oplus \tilde{P}[S^{m-1}], \tilde{P}[S^{m-1}]) & \rightarrow & B\hat{G}L(A \oplus \tilde{P}[S^{m-1}])^+ & \rightarrow & B\hat{G}L(A) \end{array} \right\}$$

Les flèches verticales sont induites par l'inclusion de  $\hat{G}L_1$  dans  $\hat{G}L$ . L'application cherchée est la composée des applications verticales de gauche.

En reprenant la démonstration du théorème 2.7 avec le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B\tilde{P}[S^k] & \xrightarrow{\cong} & B\tilde{P}[S^k] & \rightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BM(\tilde{P}[S^k]) & \longrightarrow & U_k & \rightarrow & F(A), \end{array}$$

on obtient une suite spectrale triviale :  $e_{pq}^2 = H_p(*, \pi_q P) \Rightarrow \pi_*(P)$  et un morphisme de suites spectrales entre cette dernière et celle du théorème 2.7.

Par conséquent le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} e_{0n}^2 & \xrightarrow{\cong} & e_{0n}^\infty & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(P) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{0n}^2 & \longrightarrow & E_{0n}^\infty & \longrightarrow & \pi_n K^s(A, P) \end{array}$$

est commutatif. Le morphisme vertical de droite est induit par  $i$ . D'après la proposition 2.8, il est injectif. Le morphisme vertical de gauche  $e_{0n}^2 = \pi_n(P) \rightarrow E_{0n}^2 = H_0(F(A), M(\pi_n P)) = H_0(E(A), M(\pi_n P))$  est induit par l'inclusion  $\pi_n P = M_1(\pi_n P) \longrightarrow M(\pi_n P)$ . Comme  $[A, P] = 0$ , le composé

$$\pi_n P \rightarrow H_0(E(A), M(\pi_n P)) \xrightarrow[\cong]{\text{Tr}} \pi_n P \text{ est l'identité ([9], Proposition 1.3).}$$

$e_{0n}^2 \rightarrow E_{0n}^2$  est donc un isomorphisme. Il en résulte que  $E_{0n}^2 = E_{0n}^\infty$ , ce qui signifie que les différentielles de la suite spectrale  $E_{pq}^2$  sont nulles lorsqu'elles ont pour but les termes  $E_{0n}^2$ . En conséquence, on peut réécrire la suite spectrale de la manière suivante :

COROLLAIRE 2.9. — Lorsque  $[A, A] = [A, P] = 0$ , la suite spectrale du théorème 2.7 est équivalente à la suivante

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(F(A), M(\pi_q P)) & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_* K^s(A, P) / \pi_*(P).$$

### 3. Relation avec l'homologie de $GL(A)$

Nous étudions maintenant le cas particulier important de la  $K$ -théorie stable d'un anneau (au sens algébrique usuel), considéré comme anneau simplicial discret ou trivial. Dans tout le paragraphe, les anneaux et les bimodules sont donc discrets.

Tout d'abord on a le résultat fondamental suivant.

THÉORÈME 3.1. — a) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $P \rightarrow K_n^s(A, P)$  est un foncteur de la catégorie des  $A$ -bimodules dans celle des groupes abéliens. Toute suite exacte  $(E)$  de  $A$ -bimodules  $O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$  induit une longue suite exacte, naturelle en  $(E)$

$$\dots \rightarrow K_n^s(A, P) \rightarrow K_n^s(A, Q) \rightarrow K_n^s(A, R) \rightarrow K_{n-1}^s(A, P) \rightarrow \dots$$

b) Il existe une suite spectrale (du premier quadrant) convergeant vers l'homologie de  $GL(A)$  opérant par conjugaison sur  $M(P)$ . Elle est donnée par

$$E_{pq}^2 = H_p(GL(A), K_q^s(A, P)) \Rightarrow H_{p+q}(GL(A), M(P)).$$

Dans le terme  $E_{pq}^2$ , le groupe  $GL(A)$  opère trivialement sur  $K_q^s(A, P)$ .

Preuve. — La partie (a) du théorème résulte de la proposition 2.6.

Considérons la fibration homotopique  $F(A) \rightarrow BGL(A) \rightarrow BGL(A)^+$ . L'action de conjugaison de  $GL(A)$  sur les matrices définit  $M(P)$  comme système de coefficients locaux sur  $BGL(A)$ . La suite spectrale de Hochschild-Serre associée converge vers  $H_*(BGL(A), M(P))$  qui est canoniquement isomorphe à  $H_*(GL(A), M(P))$ . Le terme  $E_{pq}^2$  est donné par

$$E_{pq}^2 = H_p(BGL(A)^+, H_q(F(A), M(P))) = H_p(BGL(A)^+, K_q^s(A, P)).$$

Le groupe fondamental  $\pi_1 BGL(A)^+ \cong K_1(A)$  opère trivialement sur  $M(P)$  (cf. [9], démonstration du théorème 2.16). Comme  $F(A)$  est aussi la fibre de  $BE(A) \rightarrow BE(A)^+$ , ce dernier espace étant simplement connexe,

$K_1(A) \cong \pi_1 BGL(A)^+$  opère trivialement sur  $K_q^s(A, P)$  dans le terme  $E_{pq}^2$ . Par conséquent

$$E_{pq}^2 \cong H_p(BGL(A), K_q^s(A, P)) \cong H_p(GL(A), K_q^s(A, P)). \quad \square$$

**COROLLAIRE 3.2.** — *Les premiers groupes de K-théorie stable s'expriment en termes de l'homologie des groupes et de l'homologie de Hochschild.*

- a)  $K_0^s(A, P) \cong H_0(GL(A), M(P)) \cong H_0(A, P)$ .
- b)  $K_1^s(A, P) \cong H_1(GL(A), M'(P)) \cong H_1(A, P)$ .
- c)  $K_2^s(A, P) \cong H_2(St(A), M'(P)) \cong H_2(St(A), St(A, P))$ .
- d)  $K_3^s(A, P) \cong H_3(St(A), St(A, P))$ .

*Démonstration.* — Expliquons d'abord les notations du corollaire. Le groupe  $M'(P)$  est le noyau de l'homomorphisme  $Tr$  défini dans l'introduction. On a ainsi la suite exacte de  $GL(A)$ -modules :

$$0 \rightarrow M'(P) \rightarrow M(P) \xrightarrow{Tr} H_0(A, P) \rightarrow 0.$$

Le point (a) du corollaire résulte alors de la suite spectrale 3.1 ainsi que de la nullité de  $H_0(GL(A), M'(P))$  (voir [9], Prop. 1.3).

Quant au  $St(A)$ -module  $St(A, P)$ , c'est une extension de  $M'(P)$  par le module trivial  $H_1(A, P)$  (cf. [9], paragraphes 1 et 2). D'où une seconde suite exacte de  $St(A)$ -modules :

$$0 \rightarrow H_1(A, P) \rightarrow St(A, P) \rightarrow M'(P) \rightarrow 0.$$

Des suites exactes d'homologie associées aux deux suites exactes courtes précédentes, on tire les isomorphismes

$$H_i(F(A), M'(P)) = \begin{cases} K_i^s(A, P) & \text{si } i \geq 1 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

$$H_i(F(A), St(A, P)) = \begin{cases} K_i^s(A, P) & \text{si } i \geq 2 \\ 0 & \text{si } i = 0 \text{ et } 1 \text{ ([9], proposition 1.5).} \end{cases}$$

Nous posons  $G(A)$  pour un des groupes  $GL(A)$ ,  $E(A)$  ou  $St(A)$  et  $S(A)$  pour  $E(A)$  ou  $St(A)$ . En reprenant le raisonnement qui a permis d'établir le théorème 3.1 (b), on montre qu'on a deux suites spectrales

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(G(A), K_q^s(A, P)) & \text{si } q \geq 1 \\ 0 & \text{si } q = 0 \end{cases} \Rightarrow H_{p+q}(G(A), M'(P))$$

$${}''E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(S(A), K_q^s(A, P)) & \text{si } q \geq 2 \\ 0 & \text{si } q = 0 \text{ et } 1 \end{cases} \Rightarrow H_{p+q}(S(A), St(A, P)).$$

Là encore, l'action est triviale dans les termes  $'E^2$  et  ${}''E^2$  et elle se fait par conjugaison dans les aboutissements.

De la première suite spectrale, on tire

$$K_1^s(A, P) = H_0(G(A), K_1^s(A, P)) \cong H_1(G(A), M'(P)),$$

groupe dont on a montré ([9], théorème 2.16) qu'il est isomorphe au groupe  $H_1(A, P)$  de Hochschild.

Pour la deuxième suite spectrale, on prend  $S(A) = St(A)$ . Les groupes  $H_1(St(A))$  et  $H_2(St(A))$  sont nuls, ce qui s'exprime par

$${}''E_{pq}^2 = 0 \text{ pour } q = 0 \text{ et } 1 \text{ et pour } p = 1 \text{ et } 2.$$

Par conséquent,

$$K_2^s(A, P) \cong {}''E_{02}^2 \cong H_2(St(A), St(A, P)) \cong H_2(St(A), M'(P))$$

$$K_3^s(A, P) \cong {}''E_{03}^2 \cong H_3(St(A), St(A, P)). \quad \square$$

L'énoncé qui suit précise également le lien de la  $K$ -théorie stable avec la situation décrite en introduction.

**COROLLAIRE 3.3.** — *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de Serre de groupes abéliens, vérifiant la propriété supplémentaire*

$$B \in \mathcal{C} \Rightarrow B \otimes C \in \mathcal{C} \text{ pour tout groupe abélien } C.$$

Alors  $K_i^s(A, P) \in \mathcal{C}$  pour  $1 \leq i \leq n$  si et seulement si  $H_i(GL(A), M'(P)) \in \mathcal{C}$  pour  $0 \leq i \leq n$  (ou si et seulement si  $H_i(E(A), M'(P)) \in \mathcal{C}$  pour  $0 \leq i \leq n$ ).

En particulier, les groupes de  $K$ -théorie stable  $K_i^s(A, P)$  sont nuls pour tout  $i \geq 1$  si et seulement si  $H_i(GL(A), M'(P)) = 0$  pour tout  $i$ , ce qui est équivalent à dire que les homomorphismes

$$\text{Tr}_i : H_i(GL(A), M(P)) \rightarrow H_i(GL(A), H_0(A, P))$$

induits par  $\text{Tr}$  sont des isomorphismes pour tout  $i$ . En d'autres termes, la  $K$ -théorie stable représente exactement l'obstruction pour que la trace induise des isomorphismes en homologie.

*Démonstration.* — On considère la suite spectrale

$${}'E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(G(A), K_q^s(A, P)) & \text{si } q \geq 1 \\ 0 & \text{si } q = 0 \end{cases} \Rightarrow H_{p+q}(G(A), M'(P))$$

et on procède par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Pour  $n = 1$ ,  $K_1^s(A, P) = {}'E_{01}^2 = H_1(G(A), M'(P))$ .

Supposons l'équivalence du corollaire 3.3 démontrée pour  $1 \leq n \leq k$  et démontrons-le pour  $n = k + 1$ . D'après le théorème des coefficients universels, on a

$${}'E_{pq}^2 = H_p(G(A)) \otimes K_q^s(A, P) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(G(A)), K_q^s(A, P)) \text{ pour } p \geq 1.$$

D'après [20], si  $\mathcal{C}$  vérifie les hypothèses de l'énoncé, alors

$$B \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{Tor}(B, C) \in \mathcal{C} \text{ pour tout groupe abélien } C.$$

Comme  ${}'E_{0q}^2 = K_q^s(A, P)$ , il en résulte que  $K_i^s(A, P) \in \mathcal{C}$  pour  $1 \leq i \leq n$  si et seulement si  ${}'E_{pq}^2 \in \mathcal{C}$  pour  $1 \leq q \leq n$ . Par l'hypothèse de récurrence  ${}'E_{pq}^2 \in \mathcal{C}$  pour  $1 \leq q \leq k$ . Par conséquent  $K_{k+1}^s(A, P)$  est  $\mathcal{C}$ -isomorphe à  $H_{k+1}(G(A), M'(P))$ .  $\square$

Nous transcrivons maintenant en termes de la  $K$ -théorie stable des calculs qui ont été faits ailleurs. Ainsi la conjonction du corollaire 3.2 et de la proposition 6.3 donne la

PROPOSITION 3.4. — Si  $A$  est commutatif et si  $[A, P] = 0$ , alors

$$K_0^s(A, P) \cong P \text{ et } K_1^s(A, P) = \Omega_A \otimes_A P.$$

Pour  $A = \mathbb{Z}$ , on a la

PROPOSITION 3.5. — a) Les groupes de  $K$ -théorie stable de  $\mathbb{Z}$  sont finis pour  $i \geq 1$ .

b)  $K_0^s(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  et  $K_1^s(\mathbb{Z}) = 0$ .

c)  $K_2^s(\mathbb{Z}) \cong H_2(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) \cong H_2(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$  pour  $9 \leq n \leq \infty$ .

*Remarque.* — On a obtenu dans [11], chapitre 13, des résultats plus précis sur  $K_*(\mathbb{Z})$ .

*Démonstration.* — Le point (b) résulte de la proposition précédente.

a)  $K_i^s(\mathbb{Z})$  est de type fini : d'après les résultats de stabilité de DWYER [3],  $H_i(SL(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H_i(SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  et  $H_i(SL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z})) \cong H_i(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$  pour

un entier  $n$  fini assez grand. Or il résulte de [19] que  $H_i(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$  et  $H_i(SL_n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  sont de type fini. Ce qui reste vrai pour  $n = \infty$ . On termine par un raisonnement de récurrence analogue à celui de la démonstration du corollaire 3.3. La classe des groupes abéliens nuls après tensorisation par  $\mathbb{Q}$  est une classe de Serre qui vérifie l'hypothèse supplémentaire du corollaire 3.3. La nullité des  $K_i^s(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$  est donc équivalente à la nullité des groupes  $H_i(SL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Q})) \cong H_i(SL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q}$ , ce qui a été démontré par FARRELL et HSIANG [5].

Le point (c) découle de l'étude de la suite spectrale  $'E_{pq}^2$  et du résultat suivant dérivé de VAN DER KALLEN [8], théorème 5.6

$$H_i(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) \cong H_i(SL_{n+1}(\mathbb{Z}), M'_{n+1}(\mathbb{Z})) \quad \text{pour } n \geq 2i + 5. \quad \square$$

Considérons maintenant le cas des corps finis.

PROPOSITION 3.6. — a) Soit  $k$  un corps fini. Alors  $K_0^s(k) = k$  et  $K_1^s(k) = 0$ .

b)  $K_2^s(k) = k$  si  $k$  est un corps fini de caractéristique 2 ou  $k = \mathbb{Z}/p$  pour  $p \geq 5$ .

Preuve. — Seule la partie (b) nécessite quelques commentaires. En utilisant 3.2, on voit facilement que

$$K_2^s(k) \cong H_2(SL(k), M'(k)).$$

Or ce dernier groupe est isomorphe à  $k$  d'après [4], proposition 3.0 et [21], théorème 9.16.

#### 4. $K$ -théorie et homologie de Hochschild

Nous ne considérons dans ce paragraphe que des anneaux et des bimodules discrets.

Le théorème 3.1 montre que les groupes  $K_n^s(A, P)$  ont des propriétés analogues à celles des groupes  $H_n(A, P)$  d'homologie de Hochschild (voir paragraphe 6). En basses dimensions les deux théories sont isomorphes (corollaire 3.2). En dimensions supérieures, elles sont généralement différentes (ainsi,  $K_2^s(\mathbb{Z}/p) \neq 0$  et  $H_2(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p) = 0$  pour  $p$  premier  $\neq 3$ ). Il existe cependant un homomorphisme fonctoriel entre la  $K$ -théorie stable et l'homologie de Hochschild. Nous le décrivons maintenant.

K. DENNIS a défini un homomorphisme  $D_i$  comme composé des trois applications

$$H_i(GL(A), M(P)) \rightarrow H_i(\mathbb{Z}[GL(A)], M(P)) \rightarrow H_i(M(A), M(P)) \rightarrow H_i(A, P).$$

La première est décrite en 6.11, la seconde est induite par l'inclusion de  $GL(A)$  dans  $M(A)$ , la troisième est l'équivalence de la proposition 6.9 (voir également [6], paragraphe 1 et [9], 2.9).

Il ne reste plus qu'à définir une application

$$u_i : K_i^s(A, P) = H_i(F(A), M(P)) \rightarrow H_i(GL(A), M(P)) = H_i(BGL(A), M(P)).$$

$u_i$  est induite en homologie par l'application composée de  $BSt(A) \rightarrow BGL(A)$  et de l'application (unique à homotopie près) classifiant le revêtement universel de  $F(A) : F(A) \rightarrow B\pi_1 F(A) = BSt(A)$ . Par définition,  $\bar{D}_i$  est la composée  $D_i \circ u_i$ . On a la

PROPOSITION 4.1. — a) Soit  $O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$  une suite exacte courte (scindée sur  $\mathbb{Z}$ ) de  $A$ -bimodules, alors les applications  $\bar{D}_i$  font commuter le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \rightarrow & K_n^s(A, P) & \rightarrow & K_n^s(A, Q) & \rightarrow & K_n^s(A, R) & \rightarrow & K_{n-1}^s(A, P) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & H_n(A, P) & \rightarrow & H_n(A, Q) & \rightarrow & H_n(A, R) & \rightarrow & H_{n-1}(A, P) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

b) Les applications  $\bar{D}_0$  et  $\bar{D}_1$  sont bijectives, tandis que  $\bar{D}_2$  est surjective.

Preuve. — a) Le diagramme commutatif résulte du diagramme pour les  $D_i$  ([9], 2.20) et de la functorialité de l'homologie.

b) Pour  $i = 0$  et  $1$ ,  $H_i(F(A), M(P)) \cong H_i(St(A), M(P))$ . La proposition 2.10 et le théorème 2.16 de [9] montrent que  $\bar{D}_0$  et  $\bar{D}_1$  sont bijectives. La surjectivité de  $\bar{D}_2$  se montre comme celle de  $D_2$  (voir [9], 2.20).  $\square$

Avant d'aller plus loin dans la comparaison avec l'homologie de Hochschild, montrons que, lorsque  $P = A$ , le procédé de stabilisation du paragraphe 2 permet de construire une application  $s : K(A) \rightarrow K^s(A)$ . En effet le premier terme de la limite dans la définition 2.3 est l'espace  $\Omega K(A \oplus A, A)$ . Or  $A \oplus A$  n'est autre que l'anneau  $A[\varepsilon]$  des nombres duaux sur  $A(\varepsilon^2 = 0)$ . L'élément inversible  $1 + \varepsilon$  de  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  définit un unique élément (encore noté  $1 + \varepsilon$ ) dans  $K_1(\mathbb{Z}[\varepsilon], (\varepsilon))$ . Le produit par cet élément définit (à homotopie faible près) une application ([14], II)

$$K(A) \xrightarrow{\times (1 + \varepsilon)} \Omega K(A[\varepsilon], (\varepsilon)).$$

DÉFINITION 4.2. — L'application  $s$  de stabilisation de  $K(A)$  vers  $K^s(A)$  est la composée

$$s : K(A) \xrightarrow{\times(1+\varepsilon)} \Omega K(A[\varepsilon], (\varepsilon)) \rightarrow K^s(A)$$

On note  $s_i : K_i(A) \xrightarrow{\times(1+\varepsilon)} K_{i+1}(A[\varepsilon], (\varepsilon)) \rightarrow K_i^s(A)$  les homomorphismes induits sur les groupes d'homotopie.

DENNIS [2] a également défini une application  $h_i : K_i(A) \rightarrow H_i(A, A)$  vers l'homologie de Hochschild. Elle est décrite explicitement dans [6]. Cette application se factorise par la  $K$ -théorie stable, à savoir

PROPOSITION 4.3. — Il existe des homomorphismes  $h_i^s : K_i^s(A) \rightarrow H_i(A, A)$ , tels que le triangle

$$\begin{array}{ccc} K_i(A) & \xrightarrow{s_i} & K_i^s(A) \\ h_i \searrow & & \swarrow h_i^s \\ & H_i(A, A) & \end{array}$$

soit commutatif, i.e.  $h_i^s \circ s_i = h_i$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus  $h_i^s = -\overline{D}_i$ .

La proposition sera démontrée au paragraphe 5. Comme  $\overline{D}_0$  et  $\overline{D}_1$  sont des isomorphismes (proposition 4.1) et que  $h_i$  est décrit dans [6], 1.a, on peut expliciter  $s_0$  et  $s_1$  en identifiant  $K_i^s(A)$  à  $H_i(A, A)$  au moyen de  $h_i^s$  pour  $i = 0$  et 1.

PROPOSITION 4.4. — a)  $s_0$  est la trace de Stallings ([22], 1.7 et 1.8) : à tout module projectif de type fini défini comme l'image du projecteur  $p$  du module libre  $A^n$ ,  $s_0$  associe sa trace  $\text{Tr}(p)$  dans  $H_0(A, A)$ .

b) à la classe dans  $K_1(A)$  de la matrice inversible  $g$ ,  $s_1$  associe l'élément de  $H_1(A, A)$  représenté par

$$\sum_{i,j} g_{ij} \otimes (g^{-1})_{ji} \in A \otimes_{\mathbb{Z}} A,$$

$((g^{-1})_{ij})$  sont les coefficients de la matrice inverse de  $g$ .

c) Lorsque  $A$  est commutatif et qu'on peut identifier  $H_1(A, A)$  à  $\Omega_A$  (proposition 6.3),  $s_1$  est donné par

$$s_1(g) = \frac{d(\det(g))}{\det(g)}$$

où  $\det(g)$  est le déterminant de  $g$ .

*Preuve.* — (a) et (b) résultent de la proposition 4.3 et de [6], 1.b et 1.f.1.

Pour (c), si  $g \in GL_n(A)$

$$\det(g) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) g_{\sigma(1)1} \cdots g_{\sigma(n)n}$$

Par conséquent,

$$d(\det(g)) = \sum_i \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) g_{\sigma(1)1} \cdots \widehat{g_{\sigma(i)i}} \cdots g_{\sigma(n)n} dg_{\sigma(i)i}$$

Le signe  $\wedge$  signifie qu'on a supprimé le terme au-dessus duquel il se trouve. On a alors :

$$d(\det(g)) = \sum_{i,j} u(i, j) dg_{ji}$$

où on a posé :

$$u(i, j) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n: \sigma(i)=j} \varepsilon(\sigma) g_{\sigma(1)1} \cdots \widehat{g_{\sigma(i)i}} \cdots g_{\sigma(n)n}$$

On observe alors que dans  $u(i, j)$  il n'y a plus aucun coefficient de la ligne  $i$  ou de la colonne  $j$ . En fait  $u(i, j)$  est le cofacteur de  $g_{ji}$  dans la matrice  $g$ . Or on sait que le cofacteur permet de calculer les coefficients de la matrice inverse  $g^{-1}$  ([13], XIII, proposition 8) :

$$(g^{-1})_{ij} = \frac{u(i, j)}{\det(g)}$$

et donc  $\frac{d(\det(g))}{\det(g)} = \sum_{i,j} (g^{-1})_{ij} dg_{ji}$  est l'élément de  $\Omega_A$  qui correspond à l'élément donné dans (b) (cf. proposition 6.3).  $\square$

La stabilisation permet également d'étendre à la  $K$ -théorie stable les structures multiplicatives qui existent en  $K$ -théorie algébrique. Lorsque  $P$  est un  $A$ -bimodule et  $Q$  un  $B$ -bimodule, alors  $P \otimes_Z Q$  a une structure (« diagonale ») de  $A \otimes_Z B$ -bimodule. Au paragraphe suivant nous démontrons le

THÉORÈME 4.5. — *Il existe une application continue*

$$K^s(A, P) \wedge K^s(B, Q) \rightarrow K^s(A \otimes_Z B, A \otimes_Z Q \oplus P \otimes_Z B)$$

*naturelle en  $A, B, P, Q$  et qui induit un produit (avec les propriétés usuelles)*

$$K^s_i(A, P) \otimes K^s_j(B, Q) \rightarrow K^s_{i+j}(A \otimes_Z B, A \otimes_Z Q \oplus P \otimes_Z B).$$

Cette structure multiplicative est compatible avec celles qui existent en  $K$ -théorie algébrique [14] et sur l'homologie de Hochschild [6], 5, c : le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc}
 K_i(A) \otimes K_j(B) & \rightarrow & K_{i+j}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \\
 s_i \otimes s_j \downarrow & & s_{i+j} \downarrow \\
 K_i^s(A) \otimes K_j^s(B) & \rightarrow & K_{i+j}^s(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \\
 h_i^s \otimes h_j^s \downarrow & & h_{i+j}^s \downarrow \\
 H_i(A, A) \otimes H_j(B, B) & \rightarrow & H_{i+j}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, A \otimes_{\mathbb{Z}} B)
 \end{array}$$

est commutatif.

Nous en déduisons une minoration des groupes de  $K$ -théorie stable d'un anneau  $A$  commutatif. Au paragraphe 6 nous définissons un homomorphisme  $\omega_n : H_n(A, A) \rightarrow \Omega_A^n$  vérifiant la formule (6.6). D'après le théorème précédent,  $\omega_n \circ h_n^s = -\omega_n \circ \overline{D}_n$  vérifie la même formule du produit.

**THÉORÈME 4.6.** — *Pour tout anneau commutatif  $A$  et tout entier  $n \geq 2$ ,  $\omega_n \circ \overline{D}_n$  (resp.  $\omega_n \circ D_n$ ) induit une surjection scindée de  $K_n^s(A) \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$  (resp.  $H_n(GL(A), M'(A)) \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$  et de  $H_n(St(A), St(A, A)) \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$ ) sur  $\Omega_A^n \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$ .*

*Preuve.* — Une fois qu'on dispose de la formule du produit, la démonstration se fait comme pour la proposition 6.7 : il suffit de noter que  $\omega_1 \circ \overline{D}_1$  est un isomorphisme et que le produit en  $K$ -théorie stable est commutatif au sens gradué, i.e.  $x \cdot y = (-1)^{i+j} y \cdot x$  si  $x \in K_i^s(A)$  et  $y \in K_j^s(A)$  (comparer avec [14], théorème 2.1.12).

Par ailleurs  $\overline{D}_n$  se factorise par définition à travers les groupes qui se trouvent entre parenthèses.  $\square$

### 5. Constructions simpliciales

Ce paragraphe purement technique a pour but de démontrer la proposition 4.3 et le théorème 4.5

Soit  $G$  un monoïde (avec unité 0) pour une opération  $+$ . Alors si on note  $NG$  le nerf de la catégorie à un seul objet associée à  $G$ ,  $NG$  est un

ensemble simplicial dont les  $n$ -simplexes sont donnés par  $(NG)_n = G^n$  et les faces vérifient les relations

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i + g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

$NG$  est souvent noté  $\overline{WG}$  [17]. Sa réalisation géométrique est le classifiant  $BG$  de  $G$ . On étend le foncteur  $N$  à la catégorie des monoïdes simpliciaux, dans ce cas  $NG$  devient un ensemble bisimplicial.

Lorsque  $C$  est un groupe abélien simplicial,  $NC$  est un groupe abélien bisimplicial qui a le type d'homotopie de  $\tilde{C}[S^1]$  (défini en 1.8). Un moyen commode de s'en rendre compte est d'introduire la suite exacte de groupes abéliens (simpliciaux) :

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow C \rightarrow EC \rightarrow NC \rightarrow 0.$$

$C$  a ici une structure simpliciale triviale (les faces et dégénérescences sont égales à l'identité). Quant à  $EC$ , il est donné par  $(EC)_n = C^{n+1}$  et les faces par

$$d_i(c_0, \dots, c_n) = \begin{cases} (c_0, \dots, c_i + c_{i+1}, \dots, c_n) & \text{si } 0 \leq i \leq n-1 \\ (c_0, \dots, c_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

$EC \rightarrow NC$  et  $C \rightarrow EC$  sont données resp. par

$$(c_0, \dots, c_n) \mapsto (c_1, \dots, c_n) \quad \text{et} \quad c \mapsto (c, 0, \dots, 0).$$

Il est bien connu que  $EC$  est contractile. Il en résulte que  $\pi_{i+1}(NC) \cong \pi_i(C)$  ( $i \geq 0$ ). Nous avons besoin d'une description de cet isomorphisme. Pour cela, nous identifions les groupes d'homotopie d'un groupe abélien simplicial aux groupes d'homologie du complexe de chaînes associé. La fibration (5.1) donne lieu à une suite exacte de complexes et l'isomorphisme  $\pi_{i+1}(NC) \rightarrow \pi_i(C)$  apparaît comme un homomorphisme-bord de la longue suite exacte d'homologie correspondante.

LEMME 5.2. — L'isomorphisme  $\pi_{n+1}(NC) \rightarrow \pi_n(C)$  est induit au niveau des cycles par  $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in (NC)_{n+1} \mapsto c_1 \in C_n$ .

*Preuve.* — Il résulte d'une « chasse » dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & C_{n+1} & \rightarrow & EC_{n+1} & \rightarrow & NC_{n+1} \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 O & \rightarrow & C_n & \rightarrow & EC_n & \rightarrow & NC_n \rightarrow O \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

L'image par l'homomorphisme-bord d'un cycle  $\Sigma(c_1, \dots, c_{n+1}) \in NC_{n+1}$  s'obtient de la manière suivante (cf. [13], chap. IV) : on le relève d'abord en  $\Sigma(O, c_1, \dots, c_n) \in EC_{n+1}$ , on prend sa différentielle

$$\sum \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i(O, c_1, \dots, c_{n+1}) = \Sigma(c_1, O, \dots, O) \in EC_n \quad \square$$

Au paragraphe 6, on introduit le groupe abélien simplicial  $H(A, P)$ . La définition de  $H(A, P)$  s'étend au cas où  $A$  est un anneau simplicial et  $P$  un  $A$ -bimodule simplicial. C'est ainsi que  $NP$  est un  $A$ -bimodule simplicial. On peut diagonaliser le groupe bisimplicial  $H(A, NP)$  pour former le groupe simplicial  $\text{diag } H(A, NP)$ .

LEMME 5.3. —  $H_{i+1}(A, NP) \cong H_i(A, P)$  pour tout  $i \geq 0$ .

*Preuve.* — La suite exacte  $O \rightarrow P \rightarrow (EP)_n \rightarrow (NP)_n \rightarrow O$  est scindée, donc pour tout  $m \geq 0$ , la suite

$$O \rightarrow A^{\otimes m} \otimes_Z P \rightarrow A^{\otimes m} \otimes_Z (EP)_n \rightarrow A^{\otimes m} \otimes_Z (NP)_n \rightarrow O$$

est exacte. En vertu du lemme de réalisation fibrée [15], on voit d'abord que  $H(A, P) \rightarrow H(A, (EP)_n) \rightarrow H(A, (NP)_n)$  est une fibration, puis dans un deuxième temps, que  $H(A, P) \rightarrow H(A, EP) \rightarrow H(A, NP)$  est une fibration de groupes abéliens simpliciaux. L'homotopie qui permet d'établir que  $EP$  est contractile, montre que  $A^{\otimes m} \otimes_Z EP$  l'est aussi pour tout  $m \geq 0$ . Par conséquent  $H(A, EP)$  est contractile, ce qui démontre le lemme. On laisse au lecteur le soin de faire une chasse au diagramme comme en 5.2 et de montrer que l'isomorphisme énoncé en 5.3 est induit par

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 \otimes \dots \otimes a_{i+1} \otimes (p_1, \dots, p_{i+1}) & & \\
 \downarrow & \in & A^{\otimes(i+1)} \otimes_Z p^{i+1} = (\text{diag } H(A, NP))_{i+1} \quad \square \\
 a_2 \otimes \dots \otimes a_{i+1} \otimes p_1 & \in & A^{\otimes i} \otimes_Z P = H(A, P)_i.
 \end{array}$$

5.4. La *bar-construction cyclique* a été introduite par WALDHAUSEN [24] : lorsque  $F$  est un monoïde qui opère de manière compatible à gauche et à droite sur l'ensemble  $X$ , la bar-construction cyclique est l'ensemble simplicial  $N^{cy}(F, X)$  défini par

$$N^{cy}(F, X)_n = F^n \times X \quad \text{et}$$

$$d_i(f_1, \dots, f_n, x) = \begin{cases} (f_2, \dots, f_n, xf_1) & \text{si } i = 0 \\ (f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, x) & \text{si } 1 \leq i \leq n - 1 \\ (f_1, \dots, f_{n-1}, f_n x) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Sans entrer dans les détails (qu'on trouve dans [24], paragraphe 2), rappelons que si le monoïde  $F$  opère des deux côtés sur un groupe abélien (simplicial)  $E$ , alors  $F$  opère aussi sur  $NE$ . De plus, on peut définir un produit semi-direct  $F \ltimes E$ . WALDHAUSEN montre qu'il existe une application simpliciale

$$u : \text{diag } N^{cy}(F, NE) \rightarrow N(F \ltimes E)$$

qui est une équivalence d'homotopie faible lorsque  $\pi_0(F)$  est un groupe ([24], Lemme 2.3.1).

On va maintenant établir un lien entre la bar-construction cyclique et l'homologie de Hochschild. Supposons que  $A$  soit un anneau simplicial et  $P$  un  $A$ -bimodule simplicial. Alors le monoïde  $\hat{G}L_k(A)$  (défini en 1.1) opère par multiplication à droite et à gauche sur  $M_k(P)$ . Par définition de la bar-construction cyclique, l'inclusion de  $\hat{G}L_k(A)$  dans  $M_k(A)$  induit une application simpliciale

$$N^{cy}(\hat{G}L_k(A), M_k(P)) \rightarrow H(M_k(A), M_k(P)).$$

Sur les  $n$ -simplexes, elle est définie par

$$(g_1, \dots, g_n, m) \in \hat{G}L_k(A)^n \times M_k(P) \mapsto g_1 \otimes \dots \otimes g_n \otimes m.$$

Comme  $\pi_0(\hat{G}L_k(A)) = GL_k(\pi_0 A)$  est un groupe, on peut appliquer le lemme 2.3.1 de [24]. Par composition avec  $u^{-1}$ , on a ainsi une application

$$N(\hat{G}L_k(A) \ltimes M_k(P)) \rightarrow H(M_k(A), NM_k(P)) \cong H(M_k(A), M_k(NP)).$$

Nous nous proposons de la décrire lorsque  $\hat{G}L_k(A)$  est un groupe.

LEMME 5.5. — *L'application simpliciale précédente est donnée par*  
 $(g_1, m_1; \dots; g_n, m_n)$

$$\mapsto g_1 \otimes \dots \otimes g_n \otimes (g_n^{-1} \dots g_1^{-1} m_1 g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1} m_n g_n^{-1} \dots g_1^{-1})$$

sur les  $n$ -simplexes.

*Preuve.* — Il suffit de calculer  $u^{-1}$  à partir de la formule donnée dans [24].  $\square$

5.6. On suppose maintenant que  $A$  et  $P$  sont discrets. L'extension donnée

$$O \rightarrow M_k(P) \xrightarrow{i} GL_k(A \oplus P) \rightarrow GL_k(A) \rightarrow 1$$

(l'injection  $i$  étant donnée par  $i(m) = 1 + m$ ) fournit un isomorphisme

$$GL_k(A) \times M_k(P) \cong GL_k(A \oplus P)$$

IGUSA ([6], II) a construit un « edge-homomorphism » de la suite spectrale de Hochschild-Serre de l'extension précédente. Il s'agit de l'homomorphisme  $b_n : H_n(GL_k(A \oplus P))/H_n(GL_k(A)) \rightarrow H_{n-1}(GL_k(A), M_k(P))$ , l'action de  $GL_k(A)$  se faisant par conjugaison dans ce dernier groupe. D'après (6.11), celui-ci est isomorphe au groupe de Hochschild  $H_{n-1}(\mathbb{Z}[GL_k(A)], M_k(P))$  qui, lui-même, s'envoie dans  $H_{n-1}(M_k(A), M_k(P))$ . Nous explicitons l'application composée

$$H_n(GL_k(A) \times M_k(P))/H_n(GL_k(A)) \rightarrow H_{n-1}(M_k(A), M_k(P))$$

dans le cadre simplicial introduit plus haut.

LEMME 5.7. — *L'application précédente est décrite par*

$$(g_1, m_1; \dots; g_n, m_n) \in N(GL_k(A) \times M_k(P))_n$$

$$\mapsto -g_2 \otimes \dots \otimes g_n \otimes g_n^{-1} \dots g_1^{-1} m_1 g_1^{-1} \in H(M_k(A), M_k(P))_{n-1}.$$

*Preuve.* — Il faut d'abord décrire l'isomorphisme de  $GL_k(A) \times M_k(P)$  avec  $GL_k(A \oplus P)$ . Celui que nous choisissons et qui est seul compatible avec la notion de produit semi-direct de [24] est donné par  $(g, m) \mapsto g + m$ . IGUSA, par contre, prend l'isomorphisme  $(g, a) \mapsto (1 + a)g$ . On passe de l'un à l'autre en posant  $m = ag$ . D'après [6], 2c et 1d, l'application  $H_n(GL_k(A \oplus P)) \rightarrow H_{n-1}(GL_k(A), M_k(P))$  s'écrit sous la forme :

$$(g_1, a_1; \dots; g_n, a_n) \mapsto -(g_2, \dots, g_n) \otimes g_1^{-1} a_1$$

$$\mapsto -g_2 \otimes \dots \otimes g_n \otimes g_n^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1} a_1.$$

On termine en remplaçant  $a_1$  par  $m_1 g_1^{-1}$ .  $\square$

Lorsque  $A$  et  $P$  sont discrets, les lemmes 5.5 et 5.7 fournissent respectivement deux applications

$$W_n : H_n(GL_k(A \oplus P)) \rightarrow H_n(M_k(A), NM_k(P))$$

et  $I_n : H_n(GL_k(A \oplus P)) \rightarrow H_{n-1}(M_k(A), M_k(P)).$

La description des homomorphismes  $W_n$  et  $I_n$  et de l'isomorphisme

$$H_n(M_k(A), NM(P)) \cong H_{n-1}(M_k(A), M_k(P))$$

(Lemme 5.3) entraîne le

LEMME 5.8. — *L'homomorphisme composé*

$$H_n(GL_k(A \oplus P)) \xrightarrow{W_n} H_n(M_k(A), NM_k(P)) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(M_k(A), M_k(P))$$

est égal à  $-I_n$ ; en d'autres termes, moyennant des identifications convenables, les homomorphismes  $W_n$  de Waldhausen et  $I_n$  d'Igusa sont les mêmes au signe près.

Ce résultat est crucial pour la suite.

5.9. L'application (due à WALDHAUSEN) de  $N(\hat{G}L_k(A) \times M_k(P))$  dans  $H(M_k(A), M_k(NP))$  (définie plus haut) va nous permettre de construire une application

$$h^s : K^s(A, P) \rightarrow |H(A, P)|$$

vers la réalisation géométrique  $|H(A, P)|$  du groupe abélien simplicial  $H(A, P)$ . En effet, l'équivalence de MORITA (6.8) induit une équivalence d'homotopie  $H(M_k(A), M_k(NP)) \rightarrow H(A, NP)$ . Par composition, on obtient une application simpliciale  $N(\hat{G}L_k(A) \times M_k(P)) \rightarrow H(A, NP)$  dont on s'assure sans problèmes qu'elle se stabilise en  $k$  (cf. [6], Thm. 1.f.2). En passant à la réalisation géométrique, on a une application

$$B(\hat{G}L(A \oplus P)) = B(\hat{G}L(A) \times M(P)) \rightarrow |H(A, NP)|.$$

Comme  $\pi_1(H(A, NP))$  est un groupe abélien et que  $\pi_1 B\hat{G}L(A \oplus P)$  contient le sous-groupe parfait des matrices élémentaires, l'application précédente se factorise de manière unique à homotopie près ([14], Proposition 1.1.2) à travers  $B\hat{G}L(A \oplus P)^+$ . Nous notons par  $h(A, P)$  l'application composée

$$K(A \oplus P) \rightarrow B(\hat{G}L(A \oplus P))^+ \rightarrow |H(A, NP)|.$$

On peut maintenant appliquer la stabilisation introduite au paragraphe 2. Considérons le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A \oplus P & \rightarrow & A \oplus \tilde{P}[I] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & A \oplus \tilde{P}[S^1]. \end{array}$$

Par définition de l'homologie de Hochschild (quitte à reprendre le raisonnement de la démonstration du lemme 5.3), on obtient le carré cartésien (à homotopie près)

$$\begin{array}{ccc} H(A, NP) & \rightarrow & H(A, N\tilde{P}[I]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(A, NO) & \rightarrow & H(A, N\tilde{P}[S^1]). \end{array}$$

Par conséquent, l'application verticale induite entre les fibres est une équivalence d'homotopie. Comme  $H(A, NO)$  et  $H(A, N\tilde{P}[I])$  sont contractiles, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(A \oplus P, P) & \longrightarrow & \Omega K(A \oplus \tilde{P}[S^1], \tilde{P}[S^1]) \\ h(A, P) \downarrow & & h(A, \tilde{P}[S^1]) \downarrow \\ |H(A, NP)| & \xrightarrow{\cong} & \Omega |H(A, N\tilde{P}[S^1])| \end{array}$$

Ceci suffit pour définir par stabilisation l'application cherchée.

DEFINITION 5.10. —  $h^s = \varinjlim_n \Omega^n h(A, \tilde{P}[S^{n-1}])$ .

$h^s$  est à valeurs dans  $\varinjlim_n \Omega^n |H(A, N\tilde{P}[S^{n-1}])| \cong |H(A, P)|$ . On note  $h_n^s$  l'homomorphisme induit  $\pi_n K^s(A, P) \rightarrow H_n(A, P)$ .

Supposons maintenant que  $A$  et  $P$  sont discrets. Alors  $\pi_n K^s(A, P) \cong K_n^s(A, P)$ , d'après le corollaire 2.5. La stabilisation livre le carré commutatif

$$(5.11) \quad \begin{array}{ccc} K_{n+1}(A \oplus P, P) & \longrightarrow & K_n^s(A, P) \\ h_{n+1}(A, P) \downarrow & & h_n^s \downarrow \\ H_{n+1}(A, NP) & \xrightarrow{\cong} & H_n(A, P) \end{array}$$

L'homomorphisme  $h_{n+1}(A, P)$  est le composé

$$K_{n+1}(A \oplus P, P) \rightarrow H_{n+1}(GL(A \oplus P))$$

$$\xrightarrow{w_{n+1}} H_{n+1}(M(A), M(NP)) \xrightarrow{\cong} H_{n+1}(A, NP)$$

de l'équivalence de Morita, de  $W_{n+1}$  (cf. 5.8) et de l'homomorphisme de Hurewicz de  $BGL(A \oplus P)^+$ . Moyennant l'identification du lemme 5.3 et en vertu du lemme 5.8,  $h_{n+1}(A, P) = -g_{n+1}$  où  $g_{n+1}$  est le composé

$$K_{n+1}(A \oplus P, P) \rightarrow H_{n+1}(GL(A \oplus P)) \xrightarrow{I_{n+1}} H_n(M(A), M(P)) \xrightarrow{\cong} H_n(A, P)$$

de l'équivalence de Morita, de  $I_{n+1}$  (cf. 5.8) et de l'homomorphisme de Hurewicz.

Nous supposons de plus que  $P = A$ . Alors IGUSA ([6], Thm. 5.e) a montré que le triangle

$$(5.12) \quad \begin{array}{ccc} K_n(A) & \xrightarrow{\times(1+\varepsilon)} & K_{n+1}(A[\varepsilon], (\varepsilon)) = K_{n+1}(A \oplus A, A) \\ & \searrow h_n & \swarrow -g_{n+1} \\ & & H_n(A, A) \end{array}$$

est commutatif (cf. 4.2 pour les notations). En mettant bout à bout les diagrammes (5.11) et (5.12), on voit qu'on a démontré la première partie de la proposition 4.3.

Pour achever sa démonstration, il ne reste plus qu'à identifier les homomorphismes  $h_n^s$  et  $\bar{D}_n$ . Le résultat suivant répond à une question posée p. 392 dans [24].

LEMME 5.13. — Pour tout  $n \geq 0$ ,  $h_n^s = -\bar{D}_n$  ( $A$  et  $P$  sont discrets).

Preuve. — Nous reprenons les notations de la démonstration de 2.7 avec  $A$  et  $P$  discrets. En écrivant les suites spectrales des deux fibrations (pour  $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccccc} BM(\tilde{P}[S^{n-1}]) & \rightarrow & U_{n-1} & \rightarrow & F(A) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ BM(\tilde{P}[S^{n-1}]) & \rightarrow & B\hat{G}L(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}]) & \rightarrow & BGL(A), \end{array}$$

comme les fibres sont  $(n-1)$ -connexes, on obtient le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_{p+n}K(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}]) & \xrightarrow{h} & H_p(F(A), M(P)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{p+n}(\hat{G}L(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}])) & \xrightarrow{h'} & H_p(GL(A), M(P)) \end{array}$$

Les applications verticales sont à gauche l'homomorphisme de Hurewicz et à droite l'application induite par  $F(A) \rightarrow BSt(A) \rightarrow BGL(A)$  (cf. paragraphe 4);  $b$  et  $b'$  sont des « edge-homomorphisms » des suites spectrales. Lorsque  $n$  est assez grand (devant  $p$ ),  $b$  est un isomorphisme. Après identification de  $H_p(GL(A), M(P))$  avec  $H_{p+n-1}(GL(A), M(\tilde{P}[S^{n-1}]))$ ,  $b'$  apparaît comme « l'edge-homomorphism »  $I_{p+n}$  d'Igusa étendu au cas simplicial. En passant à l'homologie de Hochschild, le lemme 5.8 donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{p+n}K(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}]) & \xrightarrow[\cong]{b} & H_p(F(A), M(P)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{p+n}(\hat{GL}(A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}])) & \xrightarrow{I_{p+n}} & H_p(GL(A), M(P)) \\
 \downarrow -w_{n+p} & & \downarrow \\
 H_{p+n}(M(A), NM(\tilde{P}[S^{n-1}])) & \xrightarrow[\cong]{} & H_p(M(A), M(P))
 \end{array}$$

Après stabilisation, on obtient  $-h_p^s$  à gauche et  $\bar{D}_p$  à droite.  $\square$

5.14. Le produit défini en  $K$ -théorie algébrique s'étend aux anneaux simpliciaux et, par stabilisation, à la  $K$ -théorie stable.

En effet, on observe d'abord que les formules de somme directe et de produit tensoriel des matrices (décrites dans [14], 1.2.2 et 2.1.1) s'étendent au monoïde  $\hat{GL}_k(A)$  pour tout anneau simplicial  $A$ . La première conséquence qui en résulte, est que, comme dans le cas discret,  $B\hat{GL}(A)^+$  est un  $H$ -espace.

En procédant comme Loday, on définit une application (avec les propriétés habituelles)

$$K(A) \wedge K(B) \rightarrow K(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$$

où l'anneau simplicial  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$  est le produit tensoriel degré par degré des anneaux simpliciaux  $A$  et  $B$ .

En passant à la limite sur les anneaux  $A \oplus \tilde{P}[S^{n-1}]$ , on construit une application-produit

$$K^s(A, P) \wedge K^s(B, Q) \rightarrow K^s(A \otimes_{\mathbb{Z}} B, P \otimes_{\mathbb{Z}} B \oplus A \otimes_{\mathbb{Z}} Q)$$

où le bimodule de droite a la structure évidente de  $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ -bimodule simplicial.

Supposons que  $A$  et  $B$  sont des anneaux discrets et qu'on a :  $P = A$  et  $Q = B$ . Alors l'application de stabilisation  $s : K(A) \rightarrow K^s(A)$  commute aux produits. En effet, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 K(A) \wedge K(B) & \rightarrow & \Omega K(A \oplus A, A) \wedge \Omega K(B \oplus B, B) & \rightarrow & K^s(A) \wedge K^s(B) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 K(A \otimes_{\mathbb{Z}} B) & \rightarrow & \Omega K(A \otimes_{\mathbb{Z}} B \oplus A \otimes_{\mathbb{Z}} B, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) & \rightarrow & K^s(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)
 \end{array}$$

Le carré de droite est commutatif par définition du produit sur la K-théorie stable. Celui de gauche l'est aussi car l'application  $K(A) \rightarrow \Omega K(A \oplus A, A)$  est précisément définie avec le produit en K-théorie algébrique (cf. 4.2). A ce sujet, on pourra également se reporter au paragraphe 1.3 de [24].

Quant à la compatibilité des produits en K-théorie stable et sur l'homologie de Hochschild, elle est établie en substance dans [6], chapitre 5 : IGUSA montre qu'en mettant sur la K-théorie algébrique la multiplication définie par LODAY [14] et sur l'homologie de Hochschild le produit décrit en (6.5), l'application  $h_*$  de Dennis (cf. proposition 4.3) commute aux produits ([6], corrolaire 5.c.3). La démonstration d'Igusa s'étend au cas simplicial et comme  $h_*$  définit  $h_*^s$  par stabilisation (propriété 4.3), il résulte de tout ce qui précède que  $h_*^s$  commute également aux produits. Ce qui démontre le théorème 4.5.

**6. Addendum sur l'homologie de Hochschild**

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de l'homologie de Hochschild ainsi que les principales propriétés nécessaires à notre étude.

Soit  $A$  un anneau et  $P$  un bimodule sur  $A$ . Nous notons  $H(A, P)$  le groupe abélien simplicial dont les  $k$ -simplexes sont définis par

$$H(A, P)_k = \underbrace{A \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} P}_{k \text{ fois}}$$

Les opérateurs de face et de dégénérescence sont donnés par

$$\begin{aligned}
 & \partial_i(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k \otimes p) \\
 & = \begin{cases} a_2 \otimes \dots \otimes a_k \otimes pa_1 & \text{si } i = 0 \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes p & \text{si } 0 < i < k \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_{k-1} \otimes a_k p & \text{si } i = k \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$s_i(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_k \otimes p) = \begin{cases} 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes p & \text{si } i = 0 \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes p & \text{si } 0 < i < k \\ a_1 \otimes \dots \otimes a_k \otimes 1 \otimes p & \text{si } i = k \end{cases}$$

DÉFINITION 6.1. — Les groupes d'homologie de Hochschild  $H_n(A, P)$  sont les groupes d'homotopie du groupe simplicial abélien  $H(A, P)$ .

$$H_n(A, P) = \pi_n(H(A, P)) \quad n \geq 0.$$

Puisque  $H(A, P)$  est un groupe abélien simplicial, on sait [17] que ses groupes d'homotopie sont les groupes d'homologie du complexe  $(H(A, P)_k, d_k)$  où on a posé  $d_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i$ .

La proposition qui suit caractérise (à isomorphisme près) les groupes d'homologie de HOCHSCHILD ([16], p. 288-289).

PROPOSITION 6.2. — a) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $H_n(A, P)$  est un foncteur de la catégorie des  $A$ -bimodules dans celle des groupes abéliens. Le groupe  $H_0(A, P)$  est isomorphe à  $P/[A, P]$ .

b) Si  $E : O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow O$  est une suite exacte courte de  $A$ -bimodules, scindée en tant que suite de groupes abéliens, alors il existe pour chaque  $n > 0$  un homomorphisme bord  $E_n : H_n(A, R) \rightarrow H_{n-1}(A, P)$  naturel en  $E$ , tel que la longue suite

$$\dots \rightarrow H_n(A, P) \rightarrow H_n(A, Q) \rightarrow H_n(A, R) \xrightarrow{E_n} H_{n-1}(A, P) \rightarrow \dots$$

soit exacte.

c) Pour tout bimodule  $P$ , il existe une surjection  $N \rightarrow P$ , scindée sur  $\mathbb{Z}$ , telle que  $H_n(A, N) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

Quand  $A$  est commutatif et que les structures de  $A$ -module à gauche et à droite coïncident sur  $P$ , ce qui, avec nos notations, s'écrit  $[A, A] = 0$  et  $[A, P] = 0$ , alors l'homologie de Hochschild est liée aux « différentielles absolues de Kaehler » de  $A$ . Rappelons que le  $A$ -module  $\Omega_A$  des différentielles absolues de l'anneau commutatif  $A$  est le  $A$ -module engendré par les générateurs  $da$  (où  $a$  parcourt  $A$ ) et les relations

$$\begin{aligned} d(a+b) &= da + db \\ d(ab) &= adb + bda \end{aligned} \quad (a, b \in A).$$

Pour  $n = 1$ , on a la

PROPOSITION 6.3. — *Supposons que  $A$  et  $P$  vérifient  $[A, A] = [A, P] = 0$ , alors  $H_1(A, P)$  est isomorphe à  $\Omega_A \otimes_A P$ .*

*Preuve.* —  $[A, P] = 0$ , donc  $H_1(A, P)$  est le conoyau de  $d_2 : A \otimes_Z A \otimes_Z P \rightarrow A \otimes_Z P$  où on a :  $d_2(a \otimes b \otimes p) = b \otimes ap - ab \otimes p + a \otimes bp$ . L'application  $a \otimes p \mapsto da \otimes p$  de  $A \otimes P$  dans  $\Omega_A \otimes_A P$  passe par  $H_1(A, P)$  et définit l'isomorphisme annoncé.  $\square$

En dimensions supérieures, on vérifie facilement que si  $[A, A] = [A, P] = 0$ , alors l'application  $H(A, P)_n \rightarrow \Omega_A^n \otimes_A P$  donnée par la formule

$$(6.4) \quad a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes p \mapsto da_1 \wedge da_2 \wedge \dots \wedge da_n \otimes p$$

définit une application  $\omega_n : H_n(A, P) \rightarrow \Omega_A^n \otimes_A P$ . Nous allons démontrer une formule du produit pour  $\omega_n$ .

Restreignons-nous au cas où  $P = A$  est un anneau commutatif. Alors il existe un produit  $H_n(A, A) \times H_m(A, A) \rightarrow H_{n+m}(A, A)$  ([6], 5.c). Si  $x \in H_n(A, A)$  est représenté par  $a_1 \otimes \dots \otimes a_n \otimes b$  et  $y \in H_m(A, A)$  par  $a_{n+1} \otimes \dots \otimes a_{n+m} \otimes c$ , alors  $xy \in H_{n+m}(A, A)$  est représenté par

$$(6.5) \quad \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(m+n)} \otimes bc$$

où  $\sigma$  parcourt les permutations de  $\{1, \dots, m+n\}$  vérifiant

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(n) \quad \text{et} \quad \sigma(n+1) < \dots < \sigma(m+n).$$

De telles permutations sont au nombre de  $\frac{(n+m)!}{n! m!}$ . Elles sont appelées « shuffles » en anglais.  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de  $\sigma$ .

Quant à  $\Omega_A^*$ , cette algèbre est munie du produit extérieur. On dispose de la formule suivante :

$$(6.6) \quad \omega_{n+m}(x, y) = \frac{(n+m)!}{n! m!} \omega_n(x) \wedge \omega_m(y).$$

La vérification en est immédiate. On en déduit la

PROPOSITION 6.7. — *Pour tout anneau commutatif  $A$  et tout entier  $n \geq 2$ ,  $\omega_n$  induit une surjection scindée de  $H_n(A, A) \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$  sur  $\Omega_A^n \otimes \mathbb{Z}[1/n!]$ .*

*Démonstration.* — Remarquons que  $\omega_1$  est l'isomorphisme décrit dans la proposition 6.3. Si  $a_1, \dots, a_n \in H_1(A, A)$ , alors la formule du produit (6.6) s'écrit

$$\omega_n(a_1, \dots, a_n) = n! \omega(a_1) \wedge \dots \wedge \omega_1(a_n).$$

Si on identifie  $a \in H_1(A, A)$  avec son représentant  $a' \otimes a''$  dans  $H(A, A)_1 = A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ , alors le produit  $a_1 \dots a_n \in H_n(A, A)$  est représenté par

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a'_{\sigma(n)} \otimes a''_1 \dots a''_n,$$

où  $\sigma$  parcourt cette fois-ci toutes les permutations de  $\{1, \dots, n\}$ . Cette formule permet de vérifier facilement que le produit  $a_1 \dots a_n$  est strictement anticommutatif (à savoir  $a_1 \dots a_n = 0$  chaque fois que  $a_i = a_j$  pour  $i \neq j$ ) et ainsi d'obtenir le carré

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n H_1(A, A) & \longrightarrow & H_n(A, A) \\ \Lambda^n \omega_1 \downarrow & \cong & \omega_n \downarrow \\ \Lambda^n \Omega_A & \longrightarrow & \Omega_A^n \end{array}$$

pour lequel on a :  $\omega_n(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) = n! \omega_1(a_2) \wedge \dots \wedge \omega_2(a_n)$ . Puisque  $\omega_1$  est un isomorphisme

$$a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)} \otimes a_0$$

définit un homomorphisme  $t_n : \Omega_A^n \rightarrow H_n(A, A)$  qui vérifie :

$$\omega_n t_n(a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n) = n! a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_n.$$

$t_n$  est la section cherchée lorsqu'on a inversé  $n!$   $\square$

L'homologie de Hochschild est également invariante par équivalence de Morita. Deux anneaux  $A$  et  $B$  sont équivalents au sens de Morita s'il existe un  $A$ - $B$ -bimodule  $M$  et un  $B$ - $A$ -bimodule  $N$  tels que

$$M \otimes_B N \cong A \quad \text{et} \quad N \otimes_A M \cong B$$

On doit à DENNIS le

**THÉORÈME 6.8.** — *Si  $A$  et  $B$  sont équivalents au sens de Morita, alors il existe une équivalence naturelle*

$$H(B, P) \cong H(A, M \otimes_B P \otimes_B N)$$

pour tout  $B$ -bimodule  $P$ .

La démonstration en est donnée dans [24], paragraphe 6 et [6], 1.e.

En particulier, les anneaux  $A$  et  $M_n(A)$  sont équivalents au sens de Morita : il suffit de prendre pour  $M$  les vecteurs-lignes à coefficients dans  $A$  et pour  $N$  les vecteurs-colonnes. IGUSA ([6], corollaire 1.2.5) a explicité l'équivalence d'homotopie entre  $H(M_n(A), M_n(P))$  et  $H(A, P)$ .

PROPOSITION 6.9. — *Au niveau des  $k$ -simplexes, l'équivalence  $f$  de  $H(M_n(A), M_n(P))$  dans  $H(A, P)$  est donnée par*

$$f_k(a^1 \otimes \dots \otimes a^k \otimes p) = \text{Tr}(a^1 \otimes a^2 \otimes \dots \otimes a^k \otimes p)$$

pour tout  $k \geq 0$  ( $a^i \in M_n(A)$  et  $p \in M_n(P)$ ).

Par définition, le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $a^1 \otimes a^2 \otimes \dots \otimes a^k \otimes p$  de  $M_n(A \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} P)$  est égal à

$$\sum_f a^1_{f(0)f(1)} \otimes a^2_{f(1)f(2)} \otimes \dots \otimes a^k_{f(k-1)f(k)} \otimes p_{f(k)f(k+1)},$$

où la sommation porte sur toutes les applications  $f$  :

$$\{0, 1, \dots, k+1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \text{ vérifiant } f(0) = i \text{ et } f(k+1) = j.$$

Rappelons pour terminer que l'homologie des groupes est un cas particulier de l'homologie de Hochschild.

En effet, à tout groupe  $G$  et à tout  $G$ -module à gauche  $M$ , on associe l'anneau  $\mathbb{Z}[G]$  et le bimodule  $M_c$  dont la structure de module à gauche est la même que celle de  $M$ . Celle de droite est induite par l'application d'augmentation  $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ , en d'autres termes  $G$  opère trivialement à droite sur  $M$ .

Réciproquement au  $\mathbb{Z}[G]$ -bimodule  $M$  correspond le  $G$ -module à gauche  $M_c$  dont le groupe abélien sous-jacent est le même que  $M$ . L'opération de  $G$  sur  $M$  est donnée par la conjugaison

$$(g, m) \mapsto gmg^{-1} \quad (g \in G, m \in M).$$

On a les isomorphismes suivants ([16], p. 291 et [6], théorème 1.d)

$$(6.10) \quad H_n(G, M) \simeq H_n(\mathbb{Z}[G], M_c) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

$$(6.11) \quad H_n(\mathbb{Z}[G], M) \simeq H_n(G, M_c)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDERSON (D. W.). — Chain functors and homology theories, *Symp. Alg. Top.* 1971, Springer Lect. Notes in Math. n° 249, 1-12.
- [2] DENNIS (R. K.). — Algebraic  $K$ -theory and Hochschild homology, exposé (non publié), *Conf. Evanston*, janvier 1976.
- [3] DWYER (W.). — Twisted homological stability for general linear groups, *Ann. of Math.* 111 (1980), 239-251.
- [4] EVENS (L.) et FRIEDLANDER (E.). — On  $K_*(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$  and related homology groups, *Trans. A.M.S.* 270 (1982), 1-46.
- [5] FARRELL (T.) et HSIANG (W. C.). — On the rational homotopy groups of the diffeomorphism groups of spheres, discs and aspherical manifolds, *Proc. Symp. Pure Math.* 32 (1978) I, 325-338.
- [6] IGUSA (K.). — What happens to Hatcher and Wagoner's formula for  $\pi_0 C(M)$  when the first Postnikov invariant of  $M$  is non-trivial?, préprint Brandeis U.
- [7] KAN (D. M.). — A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* 67 (1958), 282-312.
- [8] VANDER KALLEN (W.). — Homology stability for linear groups, *Inv. Math.* 60 (1980), 269-295.
- [9] KASSEL (C.). — Calcul algébrique de l'homologie de certains groupes de matrices, à paraître au *Journal of Algebra* (1982).
- [10] KASSEL (C.). —  $K$ -théorie relative d'un idéal bilatère de carré nul, *Conf. K-théorie alg.* Evanston 1980, *Springer Lect. Notes in Math.* n° 854, 249-261.
- [11] KASSEL (C.). — Homologie du groupe linéaire général et  $K$ -théorie stable, *Thèse*, Université de Strasbourg, juin 1981.
- [12] KASSEL (C.). — Stabilisation de la  $K$ -théorie algébrique des espaces topologiques, à paraître aux *Ann. Sc. E.N.S.* 15 (1982).
- [13] LANG (S.). — *Algebra*, Addison Wesley (1965).
- [14] LODAY (J.-L.). —  $K$ -théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sc. E.N.S.* 9 (1976), 309-377.
- [15] LODAY (J.-L.). — Homotopie des espaces de concordances, *Sém. Bourbaki* n° 516, *Springer Lect. Notes in Math.* n° 710.
- [16] MACLANE (S.). — *Homology*, Springer Verlag (1963).
- [17] MAY (J. P.). — *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand (1967).
- [18] MAY (J. P.). —  $A_\infty$ -ring spaces and algebraic  $K$ -theory, *Springer Lect. Notes in Math.* n° 658, 240-315.
- [19] RAGHUNATHAN (M. S.). — A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups, *Inv. Math.* 4 (1968), 318-335.
- [20] SERRE (J.-P.). — Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Ann. of Math.* 58 (1953), 258-294.
- [21] SNAITH (V.). — On  $K_3$  of dual numbers, préprint Western Ontario 1980.
- [22] STALLINGS (J.). — Centerless groups, an algebraic formulation of Gottlieb's theorem, *Topology* 4 (1965), 129-134.
- [23] WALDHAUSEN (F.). — Algebraic  $K$ -theory of topological spaces I, *Proc. Symp. Pure Math.* 32 (1978), 35-60.
- [24] WALDHAUSEN (F.). — Algebraic  $K$ -theory of topological spaces II, *Springer Lect. Notes in Math.* n° 763 (1979), 356-394.
- [25] WHITEHEAD (G. W.). — *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag (1978).