DE POLIGNAC

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 120-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__120_1>

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. de Polignac.

(Séance du 5 mars 1880.)

I.

J'appellerai indistinctement *arbre, ramification, arborescence* une figure tracée sur un plan composé de *branches* et de *nœuds* satisfaisant à la loi suivante :

De chaque nœud on peut, en suivant ces branches, parvenir à un nœud quelconque, mais par un seul chemin.

Les nœuds sont les points d'intersection des branches, celles-ci des lignes droites ou courbes, mais sans points doubles, la loi qui vient d'être énoncée excluant les contours fermés.

De pareilles configurations ont été d'abord étudiées par M. C. Jordan (*Journal de Crelle*), puis indépendamment par M. Sylvester (*Educational Times*), par M. Cayley (*British Association Report,* 1875), M. Septimus Tebay, etc.

Les recherches suivantes ont pour base le mode d'existence *graphique* d'une arborescence, et, à ce propos, je ferai une remarque fondamentale qui, à ma connaissance, n'a pas encore été publiée.

Toute ramification peut être tracée au moyen d'un certain nombre de traits continus sans répétition ni arrêt, c'est-à-dire en partant de l'extrémité d'une branche et continuant jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité d'une autre branche ou à une branche déjà parcourue. Observons que le trait doit *traverser* une ligne, quoique déjà tracée, s'il peut continuer au delà, sans cheminer le long de cette ligne. Cela posé :

Remarque fondamentale. — *De quelque manière que l'on trace une ramification sans répétition ni arrêt, le nombre des parcours sera toujours le même.*

Voici, je crois, le moyen le plus simple de se rendre compte de cette propriété.

En faisant une coupure à chaque branche joignant deux nœuds, on décomposera une ramification en une série d'*étoiles*, ou, si l'on veut, de *carrefours;* on la recomposera en rendant aux carrefours leurs routes communes. Pour chaque étoile, la propriété fondamentale sera évidente. On remarquera ensuite que, en réunissant deux étoiles, on perd *un trait* sur la somme des parcours relatifs à chaque étoile, et l'on en conclura

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_\nu - (\nu - 1),$$

équation dans laquelle N est le nombre des traits qui ont servi à tracer l'arborescence, N_1, N_2, ... les nombres de traits relatifs à chaque nœud (ou étoile), et ν le nombre des nœuds. Le second membre de l'équation étant constant, le premier le sera aussi.

Quant à N_1, N_2, ..., on peut en donner l'expression en fonction des quantités qui caractérisent la ramification.

Appelons *ordre* d'un nœud le *nombre de ses branches,* autrement dit le *nombre des rayons de l'étoile* dans la décomposition de l'arborescence. Soient m_1, m_2, ... les ordres des nœuds. On vérifiera immédiatement que l'on a, en se servant de la notation de Lejeune-Dirichlet pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans une expression fractionnaire,

$$N_1 = \left(\frac{m_1 + 1}{2}\right), \quad N_2 = \left(\frac{m_2 + 2}{2}\right), \quad \ldots.$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$(1) \qquad N = \sum \binom{m+1}{2} - (\nu - 1).$$

J'appellerai N le nombre fondamental de la ramification.

II.

DIVERSES AUTRES EXPRESSIONS DU NOMBRE N.

1. Soit e le nombre des extrémités libres d'une ramification. Soit, en général, ν_k le nombre des nœuds d'ordre k; remarquons que le minimum de k est 3; on aura

$$N = e - 1 - (\nu_4 + \nu_5) - 2(\nu_6 + \nu_7) - 3(\nu_8 + \nu_9) - 4(\nu_{10} + \nu_{11}) - \ldots.$$

Cette formule s'établira de proche en proche en partant d'une ramification qui n'a que des nœuds d'ordre 3 et s'élevant graduellement à la considération des ordres supérieurs. La démonstration, sans être difficile, serait un peu longue, et j'ai cru devoir me borner à en donner le résultat.

La formule peut s'écrire

$$(2) \qquad N = e - 1 - \sum_{2}^{\mu} (\mu - 1)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}).$$

Observons qu'elle est indépendante du *nombre* des nœuds d'ordre ternaire et que, pour une ramification qui n'en a pas d'autres, on a simplement

$$(3) \qquad N = e - 1.$$

La comparaison des équations (1) et (2) donne

$$e = \sum_{2}^{\mu} (\mu - 1)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}) + \sum \binom{m+1}{2} - \nu + 2.$$

On peut transformer cette équation en remarquant que

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1};$$

et, après quelques réductions faciles, on obtiendra

$$e = \sum_{3}^{\mu} (\mu - 2)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}) + \sum \left(\frac{m+1}{2}\right) - \nu_3 + 2.$$

Si la ramification est d'ordre ternaire, le premier Σ disparaît; de plus, m étant partout égal à 3, on a

$$\frac{m+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \sum \left(\frac{m+1}{2}\right) = 2\nu_3,$$

d'où

$$e = \nu_3 + 2,$$

résultat facile à vérifier directement. Aussi, par la formule (3),

$$N = e - 1 = \nu_3 + 1. \tag{4}$$

2. La formule (1), remise sous la forme

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_\nu - (\nu - 1),$$

est susceptible de la transformation suivante.

Soient

$P_1, P_2, \ldots, P_p$ les nœuds d'ordre pair;

$2\mu_1, 2\mu_2, \ldots, 2\mu_p$ leurs ordres respectifs.

Soient, de même, les nœuds d'ordre impair

$$I_1, I_2, \ldots, I_i$$

et leurs ordres

$$2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2 + 1, \ldots, 2\lambda_i + 1.$$

Alors

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p + \lambda_1 + 1 + \ldots + \lambda_i + 1 - (\nu - 1).$$

Mais

$$\nu = p + i;$$

donc

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda + i - (p + i - 1)$$

ou

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda - p + 1.$$

i, nombre des nœuds d'ordre impair, a disparu de cette équation, résultat conforme au mode de description graphique donné au début, d'après lequel il est évident que, chaque fois qu'un trait aboutit à un nœud, on peut le prolonger au delà en ajoutant une branche au nœud sans modifier le nombre des traits.

Si la ramification n'a pas de nœuds d'ordre pair, on a

$$N = \Sigma\lambda + 1, \tag{5}$$

relation dont la formule (4) est un cas particulier.

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. Humbert.

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant $\log(x - z)$, la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_0)(x - x_1)$$

et une fonction $K(x)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1},$$
$$K = (x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x - z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Cette intégrale indéfinie est une fonction de x et de z; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x)\,dx}{K(x)(x - z)} = \Sigma(U_m + V_m z)\Delta^m(z).$$