BULLETIN DE LA S. M. F.

EDOARDO BALLICO

PH. ELLIA

Fibrés uniformes de rang 5 sur $\mathbb{P}^3$

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 59-87

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__59_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 59-87.

FIBRÉS UNIFORMES DE RANG 5 SUR $\mathbb{P}^3$

PAR

E. BALLICO et Ph. ELLIA

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous donnons la classification complète des fibrés uniformes de rang 5 sur $\mathbb{P}^3$. Pour cela nous déterminons d'abord (par de longs calculs) les classes de Chern possibles et concluons ensuite par des arguments géométriques standards.

ABSTRACT. — In this paper we give the complete classification of uniform vector bundles of rank 5 on $\mathbb{P}^3$. For this we first determine (by some tricky computations) the possible Chern classes and then conclude by standard geometric arguments.

I. Introduction

Par $\mathbb{P}^n$ on note $\mathbb{P}^n(K)$ où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un fibré vectoriel algébrique E sur $\mathbb{P}^n$ est dit uniforme s'il existe une suite d'entiers $(k;\ r_1 \ldots r_k;\ \mu_1 \ldots \mu_k)$, avec $\mu_1 > \ldots > \mu_k$, telle que, pour toute droite l de $\mathbb{P}^n$, l'on ait :

$$E \mid l \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} r_i . \mathcal{O}_l(\mu_i).$$

La suite $(k;\ r_1 \ldots r_k;\ \mu_1 \ldots \mu_k)$ est appelée type de scindage de E.

La classification de ces fibrés sur $\mathbb{P}^n$ est connue dans certains cas : rang $(E) \leqslant n$, $n \geqslant 2$ ([V dV], [Sa], [E-H-S]); rang $(E) = n+1$ pour certaines valeurs de n dont $n=2$ et $n=3$ ([Ele, 1], [Ell, 2]). En particulier, tous ces fibrés sont homogènes, c'est-à-dire invariants sous les automorphismes de $\mathbb{P}^n$.

Il existe cependant des fibrés uniformes non homogènes ([Ele, 2], [E-H-S], [Ell, 1], [Dr]); notamment de rang $2n$ sur $\mathbb{P}^n$, $n \geqslant 2$ [Dr]. Ainsi l'uniformité n'implique pas toujours l'homogénéité et le problème de la classification et de

(*) Texte reçu le 14 juin 1982.

E. BALLICO, Scuola Normale superiore, 56100 Pisa (Italie).

P. ELLIA, Université de Nice, Département de Mathématiques, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

l'homogénéité des fibrés uniformes reste ouvert si : $n+1 \leqslant \mathrm{rang}(E) < 2n$, $n \geqslant 3$.

Dans ce travail, nous apportons une réponse partielle en démontrant :

THÉORÈME. — *Les fibrés uniformes de rang* 5 *sur* $\mathbb{P}^3$ *sont* (*à isomorphisme près*) :

$$\bigoplus_{i=1}^{k} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i); \qquad T_{\mathbb{P}^3}(\mu) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\beta);$$

$$\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(\gamma) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\delta) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\varepsilon).$$

Ce résultat renforce la conjecture suivante : « Les fibrés uniformes sur $\mathbb{P}^n$ de rang strictement inférieur à $2n$ sont homogènes ».

La filtration relative de Harder-Narasimhan permet une décomposition dans l'anneau $H^*(F)$ du polynôme de Chern de $p^* E$. En suivant ([E-H-S]) ceci permet d'associer une relation polynominale à tout fibré uniforme de rang 5 sur $\mathbb{P}^3$:

$$(\mathscr{E}) \quad P(T, U) + (\alpha T + \beta U + \gamma V) U^4 + M(T, U, V) R(U, V) = \prod_{i=1}^{k} S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

(*cf.* § 3).

$P(T, U)$ est un polynôme homogène à coefficients les classes de Chern de E; les $S_i(T, U, V)$, polynômes de Chern des fibrés associés E_i, sont homogènes symétriques en U et V. $M(T, U, V)$ est homogène de degré deux et $R(U, V)$ désigne le polynôme : $(U^4 - V^4)/(U - V)$.

La dimension étant basse, on peut, par des calculs explicites, déterminer les $S_i(T, U, V)$ satisfaisant à une relation du type précédent. Ceci permet, grâce à des lemmes géométriques adéquats (II 4.1, ..., II 4.8), d'obtenir la classification.

Un mot au sujet de ces notations. D'autres auteurs préféreront sans doute regarder $H^{\bullet}(F)$ comme un $H^{\bullet}(G)$-module plutôt que comme un K-espace vectoriel. Nous avons repris les notations de [E-H-S] pour plusieurs raisons. D'abord elles semblent les mieux adaptées si l'on veut s'attaquer au cas général ($n+1 \leqslant r < 2n$) et nous espérons qu'alors nos calculs aideront à une meilleure compréhension. Ensuite dans notre cas particulier ces notations nous permettent de nous ramener de façon systématique à calculer avec des nombres. Ceci sans affecter sensiblement la longueur des calculs. Finalement ce point de vue se retrouve dans plusieurs travaux ([E-H-S], [Ell, 2], [Ba-Ell]).

NOTATION. — $h^i(\mathbb{P}^n, E) := \dim_K H^i(\mathbb{P}^n, E)$. Nous ferons par la suite un libre usage du théorème de changement de base (*cf.* par exemple [Ha]).

II. Généralités sur les fibrés uniformes

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats pour la plupart maintenant bien connus concernant les fibrés uniformes. La référence principale est [E-H-S].

1. La filtration d'Harder-Narasimhan

Soit $G \xleftarrow{q} F \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n$ le diagramme où G désigne la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^n$ et F la variété d'incidence;

$$F: \quad \{(x, d_l) \in \mathbb{P}^n \times G / x \in d_l\},$$

p et q sont les projections. On a la proposition suivante [E-H-S] :

II.1. Proposition. — *Soit E un fibré uniforme de type de scindage $(k; r_1 \ldots r_k; \mu_1 \ldots \mu_k)$ alors $p^* E$ est muni d'une filtration canonique par des sous-fibrés, de gradué associé : $\bigoplus_{i=1}^{k} [q^* E_i \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)]$ où les E_i sont des fibrés de rang r_i sur G.*

Cette filtration est la filtration relative d'Harder-Narasimhan : elle « globalise » les différentes filtrations d'Harder-Narasimhan des fibrés $E \mid l$, l droite de $\mathbb{P}^n$.

Le j-ième terme de la filtration est noté $HN^j p^* E$ (ou HN^j si aucune confusion n'est à craindre) il est donné par :

$$HN^j p^* E =: \operatorname{Im} [q^* q_* p^* E(-\mu_j) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_j) \to p^* E].$$

2. Cohomologie de F

De façon naturelle, F s'identifie à $\mathbb{P}(Q)$ où Q désigne le fibré quotient tautologique sur $\mathbb{P}^n$. Ceci permet de définir le fibré de Hopf, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(Q)}(-1)$ relatif à Q noté : H_Q. On pose :

$$V := c_1(H_Q) \qquad \text{et} \qquad U := c_1(p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)).$$

A l'aide du théorème de Leray-Hirsch et de quelques suites exactes tautologiques, on arrive à la description suivante de la cohomologie de F (*cf.* [E-H-S]) :

II.2. Proposition. — *On a une identification naturelle :*

$$H^{\bullet}(F, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[U, V] / (U^{n+1}, R(U, V));$$

où $R(U, V)=(U^{n+1}-V^{n+1})/(U-V)$. *Dans cette identification, la sous-algèbre* $q^*(H^*(G, \mathbb{Z}))$ *est l'image de l'algèbre des polynômes symétriques en* U *et* V *et la sous-algèbre* $p^*(H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}))$ *est l'image de l'algèbre des polynômes indépendants de* V.

3. La relation ($\mathscr{E}$)

A tout fibré topologique A de rang r sur une variété X on associe son polynôme de Chern $\mathscr{C}_A$:

$$\mathscr{C}_A(T)=:T^r-c_1(A).T^{r-1}+\ldots+(-1)^i c_i(A)T^{r-i}+\ldots$$

(a) Si L est un fibré en droites, alors :

$$\mathscr{C}_{A\otimes L}(T)=\mathscr{C}_A(T-c_1(L)).$$

(b) Si A est filtré de sorte que le gradué associé soit $\oplus A_i$ alors :

$$\mathscr{C}_A(T)=\prod_i \mathscr{C}_{A_i}(T).$$

Si E est un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ alors, d'après (II.1) le polynôme de Chern de p^*E est de la forme :

$$\mathscr{C}_{p^*E}(T)=\prod_{i=1}^k \mathscr{C}_{q^*E_i\otimes p^*\mathcal{O}(\mu_i)}(T).$$

En utilisant (II.2), on peut énoncer (I.3) : à tout fibré uniforme E de type de scindage $(k; r_1 \ldots r_k; \mu_1 \ldots \mu_k)$ est associée une relation :

$$(\mathscr{E})\quad P(T, U)+Q(T, U, V)U^{n+1}+M(T, U, V).R(U, V) = \prod_{i=1}^k S_i(T+\mu_i U, U, V),$$

où :

$$P(T, U):=T^r+c_1 UT^{r-1}+\ldots+c_i U^i T^{r-i}+\ldots$$

est le polynôme de Chern de p^*E, les c_i étant les classes de Chern de E vues comme entiers, r désigne le rang de E.

$Q(T, U, V)$ et $M(T, U, V)$ sont des polynômes homogènes de degré r-n-1 et r-n respectivement.

$S_i(T, U, V)$ est un polynôme homogène de degré r_i, symétrique en U et V qui représente le polynôme de Chern de q^*E_i.

4. Quelques propositions

Dans ce numéro, on donne quelques propositions qui classifient certains types de fibrés uniformes ou du moins qui permettent de les reconnaître. E désigne un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage $(k;\, r_1 \ldots r_k;\, \mu_1 \ldots \mu_k)$.

II. 4.1. Proposition. — *Si* $k=1$ *alors* $E \simeq r_1 . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_1)$ (cf. [E-H-S]).

II. 4.2. Proposition. — *S'il existe un indice* j, $1 \leqslant j \leqslant k$, *tel que* $\mu_j - \mu_{j+1} \geqslant 2$ *alors E est extension de deux fibrés uniformes de rang* $r_1 + \ldots + r_j$ *et* $r_{j+1} + \ldots + r_k$ (cf. [E-H-S]).

II. 4.3. Proposition. — *E a un sous-fibré isomorphe à Q si et seulement si* $p^* E$ *a un sous-fibré isomorphe à* H_Q. *En particulier, si* $r_1 = 1$ *et* $S_1(T, U, V) = T - U - V$ *alors* $E(-\mu_1 + 1)$ *a un sous-fibré isomorphe à Q, de même si* $r_k = 1$ *et* $S_k(T, U, V) = T + U + V$ *alors* $E(-\mu_k - 1)$ *a un quotient isomorphe à* Q^v (cf. [E-H-S]).

II. 4.4. Proposition. — *Si* $c_1(E_1) = \ldots = c_1(E_k) = 0$ *alors :*

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} r_i . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_i) \text{ (cf. [E-H-S].}$$

II. 4.5. Proposition. — *Soit* $n \geqslant 3$, *si* $r_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, *alors :*

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_i)$$

(cf. [Ell, 2]).

II. 4.6. Proposition. — *Soit* $n \geqslant 2$. *Si* $k=2$ *et* $r_1 = 1$ *ou* $r_2 = 1$ *alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :*

$$\bigoplus_{i=1}^{2} r_i . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_i), \qquad T_{\mathbf{P}^n}(\mu_1 - 2) \oplus (r-n) . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\mu_2),$$
$$\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(2 - \mu_1) \oplus (r-n) . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-\mu_2)$$

(cf. [Ell, 2]).

II. 4.7. Proposition. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un fibré de rang* 2 *sur* $\mathrm{G}(1, n)$ $(n \geqslant 3)$ *tel que* $q^* \mathscr{F}|_{p^{-1}(x)}$ *soit décomposable pour tout x de* $\mathbb{P}^n$ *alors ou bien* $\mathscr{F}$ *est lui-même décomposable, ou bien* $\mathscr{F}$ *est isomorphe à* $\omega(h)$ *où* ω *désigne le sous-fibré tautologique sur* $G(1, n)$ (cf. [Ba-VdV]).

II. 4.8. Proposition. — *Soit* $\mathscr{F}$ *un fibré sur* $G(1, 3)$ *tel que pour tout x de* $\mathbb{P}^3$ *on ait :* $q^* \mathscr{F}|_{p^{-1}(x)} \simeq T_{p^{-1}(x)}(-1)$, alors $\mathscr{F} \simeq N$.
où N désigne le fibré quotient tautologique sur G (1, 3).

Démonstration. — On considère les variétés suivantes :

$$F' := \{(x, d_l, H)/x \in d_l,\ d_l \subset H\},$$
$$F'' := \{(x, H)/x \in H\},$$

x désigne un point de $\mathbb{P}^3$, d_l un point de $G(1, 3)$ et H un plan de $\mathbb{P}^3$. On note p' et q' les projections de F' sur F et F'' respectivement. F' s'identifie à $\mathbb{P}(q^* N \otimes H_Q)$. On construit une application : $f: F' \to \mathbb{P}(q^* \mathscr{F} \otimes H_Q)$ de la façon suivante à (x, d_l, H) on associe la droite de $(q^* \mathscr{F} \otimes H_Q)_{(x, d_l)}$ qui est engendrée par les sections globales de $q^* \mathscr{F} \otimes H_Q|_{p'(q'^{-1}(x, H))}$. En fait, tout ceci n'est qu'une version relative de la méthode employée dans [VdV]. On voit dès lors que d'après nos hypothèses f est un isomorphisme, ainsi $q^* \mathscr{F} \otimes H_Q \simeq q^* N \otimes H_Q \otimes L$ où L est un fibré en droites sur F donc de la forme : $H_Q^{\otimes \cdot} \otimes p^* \mathcal{O}(b)$ (*cf.* [E-H-S]). En considérant les restrictions aux fibres de p et q il vient : $q^* \mathscr{F} \simeq q^* N$. ■

Notons au passage le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Les fibrés uniformes de rang* 2 *sur* $G(1, n)$ *sont* (*à isomorphisme près*) : *si* $n > 3$: $\mathcal{O}_G(a) \oplus \mathcal{O}_G(b), \omega(h)$.

Si $n = 3$: $\mathcal{O}_G(a) \oplus \mathcal{O}_G(b), \omega(h) . N(t)$ (ω *désigne le sous-fibré tautologique de rang* 2 *sur* $G(1, n)$).

Démonstration. — Si $n > 3$ et si $\mathscr{F}$ est uniforme sur $G(1, n)$ alors $q^* \mathscr{F}|_{p^{-1}(x)}$ est décomposable, on conclut avec (II. 4.7). Si $n = 3$, ou $q^* \mathscr{F}|_{p^{-1}(x)}$ est décomposable, ou l'on peut se ramener à la situation de la proposition précédente.

5. FIBRES UNIFORMES DE RANG 5 SUR $\mathbb{P}^3$

Pour étudier les fibrés uniformes de rang 5 sur $\mathbb{P}^3$, il suffit d'après (II. 4.2) et la classification des fibrés uniformes de rang 4 sur $\mathbb{P}^3$ [Ell. 2], de considérer les fibrés de type de scindage $(k; r_1 \ldots r_k; \mu_1 \ldots \mu_k)$ avec $\mu_i - \mu_{i+1} = 1$, $1 \leqslant i < k$. Finalement par dualité et (II. 4.1, II. 4.5, II. 4.6) il reste à étudier les cas suivants :

(1) $k = 2, \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 2,$

(2) $k = 3, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 1,$

(3) $k = 3, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 3,$

(4) $k = 3, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 2,$

(5) $k=3, \quad r_1=2, \quad r_2=1, \quad r_3=2,$

(6) $k=4, \quad r_1=1, \quad r_2=1, \quad r_3=2, \quad r_4=1,$

(7) $k=4, \quad r_1=1, \quad r_2=1, \quad r_4=2.$

La méthode consiste à étudier dans chaque cas la relation $(\mathscr{E})$ associée d'un point de vue algébrique, on conclut ensuite par (II. 4.3, II. 4.4) ou des propositions similaires.

On utilisera les notations suivantes :

$(\mathscr{E}_j)$ désigne la relation obtenue à partir de $(\mathscr{E})$ en remplaçant T par $T-\mu_j U$; $(\mathscr{E}_j)_*$: la relation $(\mathscr{E}_j)$ modulo U^2+V^2.

II. 5.1. REMARQUE. – Dans le cas qui nous occupe le polynôme $Q(T, U, V)$ intervenant dans $(\mathscr{E})$ est de la forme : $Q(T, U, V)=\alpha T+\beta U+\gamma V$. S'il existe un indice i_0 tel que $\mu_{i_0}=0$ et $r_{i_0}=1$ ou $r_{i_0}=3$ alors $\beta=\gamma$: il suffit pour le voir de poser $T=0$ dans $(\mathscr{E})$ et de remarquer que $U+V$ divise $S_{i_0}(0, U, V)$ et $R(U, V)$.

III. $k=2$, $r_1=3$, $r_2=2$.

On étudie la relation $(\mathscr{E})$ correspondante, pour cela on pose :

$$S_1(T, U, V)=T^3+T^2 A(U+V)+TE(U^2+V^2) + TDUV+HR(U, V)+G(U^2 V+UV^2),$$

$$S_2(T, U, V)=T^2+TB(U+V)+F(U^2+V^2)+MUV.$$

La relation $(\mathscr{E}_1)$ est donc de la forme :

$$T^5+c_1 UT^4+c_2 U^2 T^3+c_3 U^3 T^2 +(\alpha T+\gamma U+\gamma V) U^4+M(T, U, V).R(U, V) =S_1(T, U, V).S_2(T\text{-}U, U, V),$$

où $M(T, U, V)$ est un polynôme homogène de degré deux.

III. 1. LEMME. – *Les seules possibilités sont :*

(1) $(A, B)=(0, 0),$

(2) $A=-1, \quad S_2(T, U, V)=T^2+T(U+V),$

(3) $A=-1, \quad S_2(T, U, V)=T^2+T(U+V)+U^2+V^2+UV.$

Démonstration. — La relation $(\mathscr{E}_1)_*$ s'écrit :

$$[T^3+T^2A(U+V)+TDUV+G(U^2V+UV^2)]$$
$$\times[T^2+TU(B-2)+TVB+U^2(1-B)+UV(M-B)]$$
$$\equiv T^5+c_1UT^4+c_2U^2T^3+c_3U^3T^2+(\alpha T+\gamma U+\gamma V)U^4,$$

où $\equiv$ indique une égalité modulo (U^2+V^2). Les coefficients de T^4V, T^3UV, TU^3V, T^2U^2V, T^3U^2, T^2U^3, TU^4 donnent respectivement les relations :

$$B+A=0, \tag{1}$$

$$M-B+AB+A(B\text{-}2)+D=0, \tag{2}$$

$$D(1\text{-}B)+G(B\text{-}2)-BG=0, \tag{3}$$

$$A(M\text{-}B)+A(1\text{-}B)+D(B\text{-}2)+G=0, \tag{4}$$

$$1-B+A(B\text{-}2)-AB=c_2, \tag{5}$$

$$A(1\text{-}B)-A(M\text{-}B)-BD-G=c_3, \tag{6}$$

$$D(B\text{-}M)-BG-G(B\text{-}2)=\alpha, \tag{7}$$

les coefficients de U^5 et U^4V donnent :

$$-G(M\text{-}B)-G(1\text{-}B)=\gamma, \tag{8}$$

$$G(1\text{-}B)-G(M\text{-}B)=\gamma. \tag{9}$$

On considère maintenant la relation $(\mathscr{E}_1)$ modulo $(U+V)$:

$$[T^3+TU^2(2E-D)][T^2-2UT+U^2(1+2F-M)]$$
$$=T^5+c_1UT^4+c_2U^2T^3+c_3U^3T^2+\alpha TU^4.$$

On en déduit :

$$1+2F-M+2E-D=c_2, \tag{10}$$

$$-4E+2D=c_3, \tag{11}$$

$$(2E-D)(1+2F-M)=\alpha \tag{12}$$

De (8) et (9) : $G(1-B)=0$, si $B=1$ alors $A=-1$ (1). Si $G=0$ de (3) il vient : $D(1-B)=0$. En supposant $D=0$, (4) donne alors : $A(M+1-2B)=0$. Si $M+1-2B=0$ on a (2) : $-2B^2+3B-1=0$ c'est-à-dire $B=1$ ou $B=1/2$, ce dernier cas devant être exclu car $B\in\mathbb{Z}$. Les valeurs de (A, B) sont donc $(0, 0)$ ou $(-1, 1)$. Supposons $(A, B)=(-1, 1)$. De (2) et (3) il vient :

(2′) : $M=1-D$; (3′) $G=0$. De (6) et (11) et en utilisant (2′) : (4′) $D=E$. De (5) et (10) en utilisant (4′) : $1+2F-M=2-E$ (5′). Finalement de (7) et (12) : $D(1-M)=(2E-D)(1+2F-M)$, en utilisant (2′) (4′) (5′) : $2E(E-1)=0$ ce qui permet de conclure. ■

III. 2. $A=0$.

Dans ce cas, le fibré correspondant est isomorphe à :

$$3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1)\oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2).$$

En effet, on a aussi $B=0$ et il suffit d'appliquer (II.4.4).

III. 3. $A=-1$.

III. 3.1. — Lemme. — *Si $A=-1$ alors $R^1 p_*(q^* E_1)=0$ et E_2 est isomorphe à l'un des fibrés suivants :* $\mathcal{O}_G\oplus\mathcal{O}_G(1)$, N.

Démonstration. — En restreignant la filtration $HN^{\cdot}$ de $p^* E$ à $p^{-1}(x)$ on voit que $q^* E_1|_{p^{-1}(x)}$ est un sous-fibré de rang 3, de première classe de Chern -1, du fibré $5\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$. Ceci montre que $q^* E_1|_{p^{-1}(x)}$ est uniforme de type de scindage ($k=2$; $r_1=2$, $r_2=1$; $\mu_1=0$, $\mu_2=-1$). De même on obtient que $q^* E_2|_{p^{-1}(x)}$ est uniforme de type de scindage ($k=2$; $r_1=1$, $r_2=1$; $\mu_1=1$, $\mu_2=0$). D'après [Ele, 1] $q^* E_1|_{p^{-1}(x)}$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants : $2\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)$, $\Omega^1(1)\oplus\mathcal{O}$. Il s'en suit que $R^1 p_*(q^* E_1)=0$. La liste des fibrés uniformes de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$ [VdV)] montre que, selon la valeur de :

$$F=c_2(q^* E_2|_{p^{-1}(x)}),\qquad q^* E_2|_{p^{-1}(x)}\simeq T_{p^{-1}(x)}(-1)$$

pour tout x (resp. $\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}\oplus\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$ pour tout x). Dans le premier cas par (II.4.8) il vient $E_2\simeq N$, dans le second cas par (II. 4.7) $E_2\simeq\mathcal{O}_G\oplus\mathcal{O}_G(1)$; en effet comme $c_2(q^* E_2)=0$ (*cf.* III. 1) E_2 ne peut être un translaté de ω. ■

III. 4. Proposition. — *Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^3$ de type de scindage ($k=2$; $r_1=3$, $r_2=2$; μ_1, μ_2) alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :*

$$\bigoplus_{i=1}^{2} r_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i),\qquad \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(2+\mu_2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2),$$
$$T_{\mathbb{P}^3}(-2+\mu_1)\oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1).$$

Démonstration. — D'après ce qui précède il reste à considérer le cas où $R^1 p_*(q^* E_1)=0$ et $E_2\simeq N$ (resp. $\mathcal{O}_G\oplus\mathcal{O}_G(1)$).

Si $E_2\simeq N$ en appliquant p_* à :

$$0\to q^* E_1\otimes p^*\mathcal{O}(\mu_1)\to p^* E\to q^* E_2\otimes p^*\mathcal{O}(\mu_2)\to 0,$$

il vient : $0 \to \mathscr{F} \to E \to Q(\mu_2) \to 0$ (car $p_*(q^* N)=Q$).

On en déduit que $\mathscr{F}$ est uniforme donc isomorphe à $2\mathcal{O}(\mu_1)$. Donc :

$$E \simeq 2\mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(\mu_2 - 1).$$

Si $E_2 \simeq \mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(1)$ de la même façon on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(t) \to E \to \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(2+\mu_2) \to 0.$$

En effet :

$$q^*(\mathcal{O}_G \oplus \mathcal{O}_G(1)) \simeq \mathcal{O}_F \oplus (H_Q^v \otimes p^* \mathcal{O}(1))$$

et $p_*(H_Q^v) \simeq Q^v$(car $F \simeq \mathbb{P}(Q)$). Comme $h^1(T_{\mathbb{P}^3}(a))=0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, la suite exacte est scindée et :

$$E \simeq \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(2+\mu_2). \quad \blacksquare$$

IV. $k=3$, $r_1=1$, $r_2=3$, $r_3=1$.

Pour étudier $(\mathscr{E})$ on pose :

$$S_1(T, U, V)=T+A(U+V),$$

$$S_2(T, U, V)=T^3+T^2 B(U+V)+TC(U^2+V^2)$$
$$+TDUV+E.R(U, V)+F(U^2 V+UV^2),$$

$$S_3(T, U, V)=T+G(U+V).$$

$(\mathscr{E}_2)$ est de la forme :

$$S_1(T+U, U, V) S_2(T, U, V) S_3(T-U, U, V)$$
$$=T^5+c_1 UT^4+c_2 U^2 T^3+c_3 U^3 T^2$$
$$+(\alpha T+\gamma U+\gamma V) U^4+M(T, U, V).R(U, V)$$

où $M(T, U, V)$ est un polynôme homogène de degré deux.

IV. 1. Lemme. — *Les seules possibilités sont* $(A, B, G)=(0, 0, 0)$ *ou* $c_2=0$.

Démonstration. — Comme dans (III. 1) on calcule modulo (U^2+V^2) dans $(\mathscr{E}_2)$. On a :

$$S_1(T+U, U, V).S_3(T-U, U, V)$$
$$\equiv T^2+T(A+G)(U+V)+U^2(G-A-1)+UV(2AG-A+G),$$

$$S_2(T, U, V) \equiv T^3+T^2 B(U+V)+TD UV+F(U^2 V+UV^2).$$

Les coefficients de $T^4 V$, $T^3 UV$, $TU^3 V$ dans $(\mathscr{E}_2)_*$ donnent respectivement :

(1) $$A+B+G=0,$$

(2) $$2AG-A+G+2B(A+G)+D=0,$$

(3) $$D(G-A-1)=0.$$

Le coefficient de $T^3 U^2$ donne :

(4) $$c_2=G-A-1$$

ceux de U^5, $U^4 V$ et TU^4 :

(5) $$-F(2AG-2A+2G-1)=\gamma,$$

(6) $$-F(2AG+1)=\gamma,$$

(7) $$\alpha=-2F(A+G)-D(2AG-A+G).$$

Maintenant on calcule modulo $(U+V)$ dans $(\mathscr{E}_2)$:

$$S_1(T+U,\ U,\ V).\ S_3(T-U,\ U,\ V)\equiv T^2-U^2,$$
$$S_2(T,\ U,\ V)\equiv T^3+TU^2(2C-D).$$

Les coefficients de $T^3 U^2$ et TU^4 dans $(\mathscr{E}_2)_-$ fournissent :

(8) $$c_2=2C-D-1,$$

(9) $$\alpha=D-2C.$$

De (4), (5) et (6) il vient $F.c_2=0$. Si $F=0$ de (1) et (2) il vient : $D=2A^2+2B^2+2AB+2A+B\,(2')$. D'après (3) et (4) on peut supposer $D=0$ ce qui implique d'après (2') : $A=0$ ou $A=-1$. Si $A=-1$, $D=0$ et $F=0$ de (2') on tire $B(2B-1)=0$ et donc $B=0$ ce qui entraîne $G=1$ et $c_2=1$ (*cf.* 4). De (7) et (9) on tire $C=0$ et de (8) $c_2=-1$ ce qui est absurde. ■

IV. 2. Cas où $c_2=0$.

Ce cas est réglé par la proposition suivante : (*cf.* [Ell, 2]) :

IV. 2.1. Proposition. — *Soit $\mathscr{F}$ un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n\,(n\geqslant 2)$ de type de scindage :* $(k=3;\ r_1=1,\ r_2=r-2,\ r_3=1;\ \mu_1=1,\ \mu_2=0,\ \mu_3=-1)$ avec $c_2(\mathscr{F})=0$ *alors $\mathscr{F}$ est isomorphe à l'un des fibrés suivants :*

$$T_{\mathbb{P}^n}(-1)\oplus(r-n-1)\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$$
$$\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)\oplus(r-n-1).\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1).$$

IV. 3. Cas où $(A,\ B,\ G)=(0,\ 0,\ 0)$.

D'après (II.4.4) :

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{3} r_i \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i).$$

On a donc démontré :

IV. 4. PROPOSITION. — *Les fibrés uniformes sur* $\mathbb{P}^3$ *de type de scindage* ($k=3$; $r_1=1$, $r_2=3$, $r_3=1$) *sont* (*à isomorphisme près*) : $\bigoplus_{i=1}^{3} r_i . \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i)$,

$$T_{\mathbf{P}^3}(-2+\mu_1) \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_3),$$

$$\Omega^1_{\mathbf{P}^3}(2+\mu_3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_2).$$

V. $k=3$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=3$.

Soit :

$$S_1(T, U, V) = T + A(U+V), \qquad S_2(T, U, V) = \mathrm{T} + \mathrm{B}(\mathrm{U}+\mathrm{V}),$$

$$S_3(T, U, V) = T^3 + T^2 C(U+V) + TD(U^2+V^2) + TEUV + FR(U, V) + G(U^2 V + UV^2).$$

V. 1. LEMME. — *On a* $A+B+C=0$ *et les seules valeurs possibles pour le couple* (A, B) *sont :* (0, 0); (0, −1); (−1, 0); (−2, 0).

La démonstration du lemme fait l'objet des numéros V. 1.1, ..., V. 1.4.

V. 1.1. $A \leqslant 0$, $B \leqslant 0$, $C \geqslant 0$.

Pour le voir, il suffit de restreindre la filtration $HN^{\bullet}$ à une fibre de p, il vient alors les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\mathrm{A}) \to \mathcal{K}^2 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(B) \to 0$$

et :

$$0 \to \mathcal{K}^2 \to 5.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \to \mathcal{E}_3 \to 0 \qquad \text{avec} \quad c_1(\mathcal{E}_3) = C.$$

On conclut en remarquant :

$$\mathcal{K}^2 \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(\mathrm{A}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(B).$$

V. 1.2. la relation $(\mathcal{E}_3)_*$ s'écrit :

$$S_1(T+2U, U, V) S_2(T+U, U, V) S_3(T, U, V) \equiv T^5 + c_1 UT^4 + c_2 U^2 T^3 + c_3 U^3 T^2 + (\alpha T + \gamma U + \gamma V) U^4.$$

En calculant modulo (U^2+V^2) il vient :

$$S_1(T+2U, U, V).S_2(T+U, U, V)$$
$$\equiv T^2+TU(3+B+A)+TV(B+A)+U^2(2+A+2B)+UV(A+2B+2AB),$$

$$S_3(T, U, V)\equiv T^3+T^2C(U+V)+TEUV+G(U^2V+V^2U).$$

Les coefficients de T^4V, T^3UV, TU^3V, T^2U^2V, U^5 et U^4V dans $(\mathscr{E}_3)_*$ donnent respectivement :

(1) $$A+B+C=0,$$

(2) $$A+2B+2AB+E+C(3+2A+2B)=0,$$

(3) $$E(2+A+2B)+3G=0,$$

(4) $$2C(A+2B+AB+1)+E(3+B+A)+G=0,$$

(5) $$-G(2A+4B+2AB+2)=\gamma,$$

(6) $$-G(-2+2AB)=\gamma.$$

De (5) et (6) il vient : $G(A+2B+2)=0$.

V. 1.3. Cas où $A+2B+2=0$.

D'après (V.1.1) les seules possibilités sont :

$$(A, B)=(0, -1), (-2, 0).$$

V. 1.4. Cas où $G=0$.

(3) donne : $E(2+A+2B)=0$, on peut donc supposer $E=0$; dès lors de (4) on tire $C(A+2B+AB+1)=0$.

V. 1.4.1. Cas où G et C sont nuls.

De (V.1.1) et (1) : $A=0$ et $B=0$.

V. 1.4.2. Cas où $G=0$ et $A+2B+AB+1=0$.

De $A(B+1)=-(2B+1)$ on tire $(A, B)=(-1, 0)$ ou $(-3, -2)$ car aucun diviseur premier de $B+1$ ne divise $2B+1$. Le cas $(A, B)=(-3, -2)$ doit être exclu car (2) n'est pas vérifiée si $(A, B, E, C)=(-3, -2, 0, 5)$.

V. 2. $(A, B)=(0, 0)$.

D'après (II. 4.4) :

$$E\simeq\bigoplus_{i=1}^{3} r_i.\mathscr{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i).$$

V. 3. $(A, B)=(0, -1)$.

On a $E_1 \simeq \mathcal{O}_G$ d'où une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \to E \to \mathcal{F} \to 0$$

avec $\mathcal{F}$ uniforme et isomorphe à l'un des fibrés suivants [Ell, 2], $\mathcal{O}(\mu_2) \oplus 3\mathcal{O}(\mu_3)$, $T(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}(\mu_3)$. Dans les deux cas, la suite ci-dessus scinde et on conclut :

$$E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-2+\mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3)$$

(l'autre possibilité est exclue car $B \neq 0$).

V. 4. $(A, B) = (-1, 0)$.

D'après (II. 4.3) on a une suite exacte :

$$0 \to Q \to E(-\mu_1+1) \to \mathcal{F} \to 0,$$

or ceci est absurde car :

$$E(-\mu_1+1) \mid l \simeq \mathcal{O}_l(1) \oplus \mathcal{O}_l \oplus 3\mathcal{O}_l(-1)$$

pour toute droite l de $\mathbb{P}^3$.

V. 5. $(A, B) = (-2, 0)$.

Ce cas ne correspond pas à un fibré uniforme. Pour le voir, nous avons besoin du lemme suivant qui sera d'ailleurs utilisé par la suite :

V. 5.1. Lemme. — *Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, de type de scindage $(k; r_1=1, r_2=1, \ldots, r_k; \mu_1 \ldots \mu_k)$. Soient $S_i(T, U, V) = T + A_i(U+V)$ les polynômes de Chern des fibrés $q^* E_i$ associés $(i=1, 2)$. Supposons $A_1 \geq -2$. Alors :*

(i) *Si $A_2 = 0$. On a une suite exacte :*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_2) \to \mathrm{E} \to \mathcal{F} \to 0$$

et le fibré $\mathcal{F}$ est uniforme.

(ii) *Si $A_2 = -1$ alors E contient $T_{\mathbb{P}^n}(\mu_2 - 2)$ comme sous-fibré.*

Démonstration. — Soit la suite exacte :

$$(\star) \qquad 0 \to q^* E_1 \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1) \to HN^2 \to q^* E_2 \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_2) \to 0,$$

dans notre cas :

$$q^* E_i \rightleftarrows q^* (\mathcal{O}_G(A_i)); \qquad i = 1, 2.$$

D'autre part, en utilisant la suite spectrale de Leray et en remarquant que :

$$R^j p_*(q^* \mathcal{O}_G(t) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1 - \mu_2)) = 0, \qquad j = 0, 1,$$

si $t < 0$; on obtient :

$$H^1(F, q^* \mathcal{O}_G(t) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_1 - \mu_2)) = 0 \qquad \text{si} \quad t < 0.$$

Ainsi, si $A_1 - A_2 < 0$, la suite ($\star$) scinde et $q^* E_2 \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_2)$ s'injecte dans $p^* E$ comme sous-fibré. Si $A_2 = 0$ alors $E_2 \simeq \mathcal{O}_G$ et on a bien une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(\mu_2) \to E \to \mathcal{F} \to 0.$$

En restreignant à une droite l :

$$0 \to \mathcal{O}_l(\mu_2) \to \mathcal{O}_l(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_l(\mu_2) \oplus [\bigoplus_{i=3}^k r_i . \mathcal{O}_l(\mu_i)] \to \mathcal{F} \mid l \to 0.$$

Comme :

$$H^0(l, Hom(\mathcal{O}_l(\mu_2), \bigoplus_{i=3}^k r_i . \mathcal{O}_l(\mu_i))) = 0$$

(car $\mu_2 > \mu_i$, $3 \leqslant i \leqslant k$) on voit que $\mathcal{F}$ est uniforme avec :

$$\mathcal{F} \mid l \simeq \mathcal{O}_l(\mu_1) \oplus [\bigoplus_{i=3}^k r_i . \mathcal{O}_l(\mu_i)]$$

(ce qui permet d'ailleurs d'appliquer (II.4.2) à $\mathcal{F}$). Si $A_2 = -1$, on conclut avec (II.4.3). ■

V. 5.2. En appliquant ce lemme à la situation de (V.5) il vient une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2) \to E \to \mathcal{F} \to 0$$

et il est facile de voir (II.4.2) et (II.4.1) que $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus 3.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3)$ et par conséquent E est entièrement décomposé mais ceci est en contradiction avec $A \neq 0$.

Ceci achève la démonstration de :

V.6. Proposition. — *Soit* E *un fibré uniforme sur* $\mathbb{P}^3$ *de type de scindage :* ($k = 3$; $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$; μ_1, μ_2, μ_3) *alors E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :*

$$\bigoplus_{i=1}^3 r_i . \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i), \; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-2 + \mu_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3).$$

VI. $k = 3$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$.

On pose :

$$S_1(T, U, V) = T + A(U+V);$$

$$S_2(T, U, V) = T^2 + TB(U+V) + E(U^2+V^2) + DUV;$$

$$S_3(T, U, V) = T^2 + TM(U+V) + F(U^2+V^2) + GUV.$$

La relation $(\mathscr{E}_1)$ est de la forme :

$$\begin{aligned} S_1(T, U, V)\,&S_2(T-U, U, V)\,S_3(T-2U, U, V) \\ &= T^5 + c_1 UT^4 + c_2 U^2 T^3 + c_3 U^3 T^2 \\ &\qquad + (\alpha T + \gamma U + \gamma V)U^4 + M(T, U, V)R(U, V), \end{aligned}$$

où $M(T, U, V)$ est un polynôme homogène de degré deux.

VI. 1. Lemme. — *Les seules valeurs possibles pour le couple* (A, M) *sont :* $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(-1, 0)$; $(-2, 2)$; $(-3, 2)$.

Démonstration. — On considère $(\mathscr{E}_1)_*$, c'est-à-dire on calcule modulo (U^2+V^2) dans $(\mathscr{E}_1)$; on a :

$$\begin{aligned} S_1(T, U, V)\,&S_2(T-U, U, V) \\ &\equiv T^3 + T^2U(-2+B+A) + T^2V(B+A) + TUV(D-B-2A+2AB) \\ &\qquad + TU^2(1-B-2A) + U^3(A-AD) + U^2V(AD-2AB+A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(T-2U, U, V) \\ &\equiv T^2 + TU(-4+M) + TV(M) + U^2(4-2M) + UV(-2M+G). \end{aligned}$$

Le coefficient de $T^4 V$ dans $(\mathscr{E}_1)_*$ donne : (1) $M = -B-A$.

Le coefficient de $T^3 UV$ dans $(\mathscr{E}_1)_*$ donne :

$$D + G - 5B - 6A + 2AB + M(2B+2A-4) = 0$$

en utilisant (1) :

$$D + G = B + 2A + 2A^2 + 2B^2 + 2AB. \tag{2}$$

Pour le coefficient de T^2U^2V après avoir remplacé M par $-B-A$:

$$\begin{aligned} -D(4+B) + G(-2+B+A) + 8A + 3B + 6B^2 \\ -2AB^2 + 4AB + 8A^2 - 2A^2B = 0. \end{aligned}$$

En remplaçant $-D$ par $G-B-2A-2A^2-2B^2-2AB$ (2) il vient :

(3) $$G(2+2B+A)=B+3B^2+6AB+4A^2B+2B^3+4AB^2.$$

De même pour le coefficient de TU^3V après avoir utilisé (1) :

$$D(-2A+4+2B)+G(1-B-2A)+2AB-10A$$
$$-2B+6A^2B+6AB^2-10A^2-4B^2=0.$$

Or $D=B+2A+2A^2+2B^2+2AB-G$ et en identifiant dans l'égalité précédente :

(4) $$3G(1+B)=-6A^2-4A^3+6AB^2$$
$$+6A^2B+2B-2A+6B^2+12AB+4B^3,$$

les coefficients de U^5 et U^4V dans $(\mathscr{E}_1)_*$ sont tous les deux égaux à γ et sont donnés respectivement par :

$$(4-2M)(A-AD)-(G-2M)(AD-2AB+A)=\gamma,$$
$$(4-2M)(AD-2AB+A)+(G-2M)(A-AD)=\gamma.$$

Par différence :

$$2A[(4-2M)(B-D)-(G-2M)(1-B)]=0.$$

En développant et en utilisant les égalités : $M=-B-A$ (1) $D=B+2A+2A^2+2B^2+2AB-G$ (2) il vient :

(5) $$AG(3+3B+2A)$$
$$=A[2B+10A+12A^2+6B^2+10AB+4A^3+8AB^2+8A^2B+4B^3].$$

Si $A=0$, on utilise (3) et (4), par la suite on suppose donc $A\neq 0$.

En faisant : $A(4)-3(2A(3)-(5))=0$ et en utilisant (1) il vient :

($\star$) $$4A^3-6A^2M-6AM^2-4M^3+30A^2$$
$$+6AM+6M^2+26A-2M=0.$$

D'autre part, avec le même argument qu'en (V. 1.1) on a : $A\leqslant 0$ et $M\geqslant 0$. Si $A\leqslant -8$ et $M\geqslant 3$, la relation ($\star$) n'est pas vérifiée : en effet, comme : $(+3/2)M.(4A^2+4AM+M^2)\geqslant 0$, on a :

$$4A^3-\frac{5}{2}M^3+30A^2+6AM+6M^2+26A-2M\geqslant 0;$$

or :

$$4A^3+30A^2<0 \qquad \text{si} \quad A\leqslant -8$$

et :

$$-\frac{5}{2}M^3+6M^2<0 \qquad \text{si} \quad M\geqslant 3.$$

Pour conclure, il suffit d'examiner les différents cas correspondant à : $0>A>-8$ et $0\leqslant M<3$. Par exemple, si $M=0$ la relation $(\star)$ donne : $2A(A+1)(2A+13)=0$ et donc $A=0$ ou $A=-1$. ■

VI. 2. $A=0$.

Dans ce cas $E_1 \simeq \mathcal{O}_G$ et l'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(\mu_1) \to E \to \mathcal{F} \to 0 \quad (\star)$$

avec $\mathcal{F}$ uniforme et isomorphe à l'un des fibrés suivants [Ell. 2] :

$$\mathcal{O}(\mu_2) \oplus T(-3+\mu_1),$$

$$\Omega^1(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_3) \qquad \text{ou} \qquad \bigoplus_{i=2}^{3} r_i . \mathcal{O}(\mu_i),$$

dans tous les cas la suite $(\star)$ est scindée ($h^1(\mathbb{P}^3, \Omega^1(3))$, $h^1(\mathbb{P}^3, \mathrm{T})$, $h^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(\mu))$ sont nuls).

VI. 3. $A=-1$.

D'après (II. 4.3) on a une suite exacte :

$$0 \to T(\mu_1-2) \to \mathrm{E} \to \mathcal{G} \to 0 \quad (\star\star)$$

et $\mathcal{G}$ est uniforme et isomorphe à $2.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3)$ [VdV]. Ainsi :

$$E \simeq T_{\mathbb{P}^3}(\mu_1-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3).$$

VI. 4. Pour étudier les deux cas restants, nous avons besoin de quelques relations supplémentaires :

VI. 4.1.

$$G=4A^2+M^2+AM+10A+M+6,$$

$$F=G+\frac{M}{2}+\frac{A^2}{2}+\frac{A}{2}-\frac{M^2}{2},$$

$$E=-G+\frac{3M^2}{2}+\frac{A^2}{2}-\frac{M}{2}-\frac{A}{2}+AM.$$

La première relation s'obtient à partir de (4) et (5)' $(A \neq 0)$. Pour les deux dernières, on a d'abord : $E+F=A^2+B^2+AB$ (poser $T=1$ et $U=0$ dans $(\mathscr{E})$) ensuite, en comparant les coefficients de $T^2 U^2 V$ et $T^2 V^2 U$ dans $(\mathscr{E}_2)$ on obtient :

$$F=G-D-B-2AB+E-MA+A-M$$

d'où le résultat en utilisant les relations déjà obtenues. Ainsi toutes les inconnues s'expriment en fonction de A et M.

VI. 4.2. $(A, M)=(-2, 2)$.

D'après ce qui précède :

$$S_1(T, U, V)=T-2(U+V), \qquad S_2(T, U, V)=T^2,$$
$$S_3(T, U, V)=T^2+2T(U+V)+4(U^2+V^2+UV).$$

Cette solution ne correspond pas à un fibré uniforme. Pour le voir, nous emploierons la méthode de [Ell. 2]. Soit P un plan de $\mathbb{P}^3$ alors P induit un « sous-diagramme » du diagramme standard :

$$P^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P$$

où : $F_2 := q^{-1}(P^*)$, q' et p' étant les restrictions de q et p. On pose :

$$\mathscr{E}_i := E_i \mid p^*, \qquad \mathscr{X}^i := HN^i \mid F_2 \text{ et } \mathscr{E} := E \mid P.$$

La filtration $HN^{\cdot}$ de $\mathscr{E}$ est donnée par les $\mathscr{X}^i$ et les $\mathscr{E}_i$. En particulier $\mathscr{E}_3$ est un fibré de rang 2 sur P^* avec $c_1(\mathscr{E}_3)=2$ et $c_2(\mathscr{E}_3)=0$ (car $H^{\cdot}(F_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[U, V]/(U^3, U^2+V^2+UV)$). Sur une fibre de p' (qui s'identifie à une droite l^* de P^*) on a :

$$\mathscr{E}_3 \mid l^* \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{l^*} \oplus \mathcal{O}_{l^*}(2) & (\alpha) \\ 2\mathcal{O}_{l^*}(1) & (\beta) \\ \text{et seuls ces deux cas sont possibles.} \end{cases}$$

Car $c_1(\mathscr{E}_3)=2$ et $\mathscr{E}_3 \mid l^*$ est engendré par ses sections globales. Si on a (β) pour une droite, on l'a génériquement et en particulier : $h^0(P^*, \mathscr{E}_3) \leqslant 6$ et $h^2(P^*, \mathscr{E}_3)=0$, d'où $\chi(P^*, \mathscr{E}_3) \leqslant 6$. D'autre part, par Riemann-Roch : $\chi(P^*, \mathscr{E}_3)=7$. On a donc (α) pour toute droite l^* de P^* et donc $\mathscr{E}_3 \simeq \mathcal{O}_{P^*} \oplus \mathcal{O}_{P^*}(2)$ [VdV]. Une droite l de $p^{-1}(x)$ correspond aux droites de $\mathbb{P}^3$

passant par x et contenues dans un plan P et donc l s'identifie à la fibre de p' dans le sous-diagramme induit par P. De plus :

$$q^* E_3 \,|\, p^{-1}(x) \,|\, l \simeq q^{*\prime} \mathscr{E}_3 \,|_{p'^{-1}(x)}$$

et d'après ce qui précède $q^* E_3 \,|_{p^{-1}(x)}$ est uniforme de type de scindage ($k=2$; $r_1=r_2=1$; $\mu_1=2$, $\mu_2=0$) et donc isomorphe à $\mathcal{O}_{p^{-1}(x)} \oplus \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(2)$ [VdV]. En particulier $c_2(q^* E_3 \,|\, p^{-1}(x))=0$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $c_2(q^* E_3 \,|\, p^{-1}(x))=4$.

VI. 4.3. $(A, M)=(-3, 2)$.

Cette solution, elle non plus, ne correspond pas à un fibré uniforme. La démonstration est identique à celle qui précède à ce détail près que maintenant : $S_3(T, U, V)=T^2+2T(U+V)+14(U^2+V^2)+12UV$ et donc $c_2(\mathscr{E}_3)=-2$.

On peut rassembler les résultats de ce numéro dans la proposition :

VI. 5. Proposition. — *Les fibrés uniformes sur* $\mathbb{P}^3$ *de type de scindage* ($k=3$, $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=2$, μ_1, μ_2, μ_3) *sont (à isomorphisme près) :*

$$\bigoplus_{i=1}^{3} r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i), \qquad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-3+\mu_1),$$
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3), \qquad T_{\mathbb{P}^3}(\mu_1-2) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_3).$$

VII. $k=3$, $r_1=2$, $r_2=1$, $r_3=2$.

On pose :

$$S_1(T, V, U)=T^2+TA(U+V)+B(U^2+V^2)+CUV,$$
$$S_2(T, U, V)=T+D(U+V),$$
$$S_3(T, U, V)=T^2+TE(U+V)+F(U^2+V^2)+GUV.$$

VII. 1. Lemme. — *Les valeurs possibles pour le couple* (A, E) *sont* (0,0), (0,1), (−1,0), (−2,2). *De plus si* $(A, E)=(-2,2)$ *on a* $F=G$ *et* $B=C$.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de (VI. 1). En calculant modulo (U^2+V^2) dans $(\mathscr{E}_2)$ il vient :

$$\begin{aligned} S_1(T+U, U, V) S_2(T, U, V) \equiv {} & T^3+T^2U(2+A+D)+T^2V(A+D) \\ & +TU^2(1+A+2D)+TUV(A+C+2D+2AD) \\ & +U^3(D-DC)+U^2V(2AD+D+DC) \end{aligned}$$

$$S_3(T-U, U, V) \equiv T^2+TU(-2+E)+TV(E)+U^2(1-E)+UV(G-E).$$

Le coefficient de $T^4 V$ dans $(\mathscr{E}_2)_*$ donne :

(1) $$D = -A - E.$$

Celui de $T^3 UV$:

$$A + C + 2AD - 2A + E(1 + 2A + 2D) + G = 0.$$

En utilisant (1) :

(2) $$2A^2 + 2EA + 2E^2 - E + A - C = G.$$

Pour le coefficient de $T^2 U^2 V$:

$$D(-2A - 2 + C + 2E + 2EA) + G(2 + A) + DG - A - 2C + EC - E = 0,$$

en utilisant (1) et (2) :

(3) $C(-A + E - 4) = 4EA^2 + 4E^2 A - 6A^2 - 3AE + E - 3A - 3E^2 + 2E^3.$

Le coefficient de TUV^3 dans $(\mathscr{E}_2)_*$ donne :

$$D(-2A - 2C - 2E) + G(1 + A) + 2DG + A + C - 2EA - EC - E = 0.$$

En utilisant (1) et (2) :

(4) $C(3E + 3A) = 6A^2 E + 6AE^2 + 2A^3 + 4E^3 - 3A^2 - 3AE - 6E^2 - 2A + 2E$

Les coefficients de U^5 et $U^4 V$ sont égaux et sont donnés respectivement par :

$$(1 - E)D(1 - C) - (G - E)D(2A + 1 + C)$$

et :

$$(1 - E)D(2A + 1 + C) + (G - E)D(1 - C).$$

En utilisant (1) et (2) et par différence, il vient :

(5) $D\,[C\,(E + A) - 2A^3 - 2E^2 A - 2A^2 E - 3A^2 - 2E^2 + AE - 2A + 2E] = 0.$

Si $D = 0$ de (4) et (1) il vient : $A(2A^2 + 6A + 4) = 0$, c'est-à-dire : $(A, E) = (0,0)$; $(-1,1)$; $(-2,2)$. On suppose maintenant $D \neq 0$, alors $(4) + 3.((5)/D) = 0$ nous donne :

$$4A^3 - 4E^3 + 12A^2 + 12E^2 + 8A - 8E = 0 \quad (*).$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$(A-E+2)(A^2+A+E^2-E+AE)=0 \quad (*).$$

En utilisant $A\leqslant 0$, $E\geqslant 0$ (*cf.* (V. 1.1) on obtient comme solutions à (*) : $(A, E)=(0,0)$; $(0,1)$; $(-1,0)$; $(-1,1)$; $(-2,2)$; $(0,2)$; $(-1,2)$; $(-2,0)$; $(-2,1)$. Les quatre derniers couples sont à écarter car ils ne vérifient pas $(\mathscr{E}_2)_*$; par exemple si $(A, E)=(-2,1)$ de (3) il vient $C=4$ mais alors (5) n'est pas vérifiée. De même, pour les trois autres cas. Pour éliminer le cas $(-1,1)$ introduisons les relations suivantes :

$$(6) \quad \alpha=(1-E)(1+A+2D)+(-2+E)D(1-C) \\ -(G-E)(A+C+2D+2AD)-E(2AD+D+DC),$$

$$(7) \quad c_2=-2+E-A,$$

$$(8) \quad c_3=(1-E)(2+A+D)+(-2+E)(1+A+2D) \\ +D(1-C)-(A+D)(G-E)-E(A+C+2D+2AD),$$

$$(9) \quad c_2=2B+2F-G-C-2,$$

$$(10) \quad c_3=-4B+4F-2G+2C,$$

$$(11) \quad \alpha=(2F-G+1)(2B-C+1).$$

En calculant les coefficients de TU^4, T^3U^2, T^2U^3 dans $(\mathscr{E}_2)_*$ on obtient (6) (7) et (8) quant à (9) (10) (11) elles s'obtiennent en calculant modulo $(U+V)$ dans $(\mathscr{E}_2)$. Si $(A, E)=(-1,1)$ de (1), ..., (5) on tire $D=C=G=0$. De (7) et (9) il vient $B+F=1$ et de (6) et (11) $(2F+1)(2B+1)=-1$ ce qui est absurde vu ce qui précède. Si $(A, E)=(-2,2)$ de (1) il vient $D=0$ et de (2) $4=C+G$. De (9) et (7) on tire : $B+F=4$. De (8) et (10) en utilisant $B=4-F$ et $C=4-G$ il vient $F=G$ et par suite $B=C$. ■

VII. 2. $(A, E)=(0,0)$.

Dans ce cas A, D et E sont nuls et d'après (II. 4.4) le fibré correspondant est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^3 r_i.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i)$.

VII. 3. $(A, E)=(0,1)$.

$q^*E_1|_{p^{-1}(x)}$ étant un sous-fibré de première classe de Chern nulle d'un fibré trivial, il est isomorphe à $2.\mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$. Ceci montre que B est nul (car $B=c_2(q^*E_1|p^{-1}(x))$; de plus, d'après (VII. 1, (3)) on a : $C=0$. On a donc $E_1\simeq 2.\mathcal{O}_G$ (II. 4.7). On en déduit une suite exacte :

$$0\to 2\mathcal{O}(\mu_1)\to E\to \mathscr{F}\to 0$$

avec $\mathscr{F}$ uniforme et isomorphe à $\bigoplus_{i=2}^{3} r_i.\mathcal{O}(\mu_i)$ ou $T(-2+\mu_2)$ [E-H-S], dans les deux cas la suite scinde. Cependant E n'est pas somme directe de fibrés en droites (car $D\neq 0$), donc :

$$E\simeq 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus T_{\mathbf{P}^3}(-2+\mu_2).$$

VII. 4. $(A, E)=(-1,0)$.

C'est le cas dual du précédent; il vient :

$$E\simeq \Omega^1_{\mathbf{P}^3}(2+\mu_2)\oplus 2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_3)$$

VII. 5. $(A, E)=(-2,2)$.

Cette solution ne correspond pas à un fibré uniforme. En suivant la méthode de (VI. 4.2) on obtient $F=0=G$ et $B=C=4$. Maintenant il suffit d'observer que, quitte à dualiser la suite exacte :

$$0\to q^* E_1\otimes p^* \mathrm{O}(\mu_1)\to p^* E,$$

le raisonnement de (VI. 4.2) s'applique à $q^* E_1 \,|\, p^{-1}(x)$. On en déduit $B=C=0$ ce qui est contradictoire.

On a donc démontré :

VII. 6. Proposition. — *Les fibrés uniformes sur* $\mathbb{P}^3$ *de type de scindage* ($k=3$, $r_1=2$, $r_2=1$, $r_3=2$; μ_1, μ_2, μ_3) *sont à isomorphisme près) :*

$$\bigoplus_{i=1}^{3} r_i.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i),\qquad \Omega^1_{\mathbf{P}^3}(2+\mu_2)\oplus 2.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_3),$$
$$2\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus T_{\mathbf{P}^3}(-2+\mu_2).$$

VIII. $k=4$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=1$.

On pose :

$$S_1(T, U, V)=T+A(U+V),\qquad S_2(T, U, V)=T+B(U+V),$$
$$S_3(T, U, V)=T^2+TC(U+V)+D(U^2+V^2)+EUV,$$
$$S_4(T, U, V)=T+F(U+V).$$

La relation $(\mathscr{E}_1)$ est de la forme :

$$\begin{aligned}S_1(T, U, V)&S_2(T-U, U, V)S_3(T-2U, U, V)S_4(T-3U, U, V)\\ &=T^5+c_1 UT^4+c_2 U^2 T^3+c_3 U^3 T^2+(\alpha T+\gamma U+\gamma V)U^4\\ &\qquad +M(T, U, V).R(U, V)\end{aligned}$$

où $M(T, U, V)$ est un polynôme homogène de degré deux.

VIII. 1. LEMME. — *Seuls peuvent se présenter les cas suivants :*
(i) $A=0$;
(ii) $A=-1$;
(iii) $A\leqslant -2$ et $B=0$ ou $B=-1$;
(iv) $F=1$;
(v) $F=0$.

Démonstration. — En considérant les coefficients de $T^4 V$ et $T^3 U^2$ dans $(\mathscr{E}_1)_*$ il vient :

$$A+B+C+F=0, \tag{1}$$

$$c_2=23-2A-B+F. \tag{2}$$

En calculant maintenant modulo $(U+V)$ dans $(\mathscr{E}_1)$ le coefficient de $T^3 U^2$ donne :

$$c_2=23+2D-E. \tag{3}$$

En posant $U=0$ et $V=1$ dans $(\mathscr{E}_1)$ on obtient :

$$D=(A+B+F)^2-AF-BF-AB. \tag{4}$$

De (2) (3) et (4) on déduit :

$$E=(A+B+F)^2+A(A+2)+F(F-1)+B(B+1).$$

Finalement en comparant les coefficients de $U^3 V^2$ et $U^2 V^3$ dans $(\mathscr{E}_3)$ on a la relation :

$$(\star)\, E(2BF+2F-A+AF-AB-2B)=2D.$$

De plus $A\leqslant 0$, $B\leqslant 0$, $F\geqslant 0$ (*cf.* V.1.1) et $D\geqslant 0$ (4). Pour $A<-2$, $B<-1$ et $F>1$ $(\star)$ n'a pas de solution pour des raisons de signe. ■

VIII. 2. Cas où $A=0$.

Dans ce cas $E_1 \simeq \mathcal{O}_G$ et on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O} \to E(-\mu_1) \to \mathscr{F} \to 0$$

avec $\mathscr{F}$ uniforme. En utilisant cette suite exacte et les résultats de [Ell.2] on voit que E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\bigoplus_{i=1}^4 r_i.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i), \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus T_{\mathbf{P}^3}(-3+\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_4);$$
$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_2)\oplus\Omega^1_{\mathbf{P}^3}(-1+\mu_1).$$

VIII. 3. Cas où $A=-1$.

D'après (II. 4.3) on a une suite exacte :

$$0 \to Q \to E(-\mu_1+1) \to \mathscr{F} \to 0,$$

ce qui est absurde vu le type de scindage de $E(-\mu_1+1)$.

VIII. 4. Cas où $A \leqslant -2$ et $B=0$.

D'après (V. 5.1) on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(\mu_2) \to E \to \mathscr{F} \to 0$$

avec $\mathscr{F}$ uniforme. Il vient facilement (II. 4.2, [E-H-S] :

$$\mathscr{F} \simeq \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \Omega^1(2+\mu_1) \qquad \text{ou} \qquad \bigoplus_{i\neq 2} r_i.\mathcal{O}(\mu_i)$$

et par suite :

$$E \simeq \mathcal{O}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}(\mu_2) \oplus \Omega^1(2+\mu_1) \qquad \text{ou} \qquad E \simeq \oplus r_i.\mathcal{O}(\mu_i)$$

mais ceci est en contradiction avec $A \neq 0$.

VIII. 5. Cas où $A \leqslant -2$ et $B=-1$.

De (V. 5.1) on déduit :

$$E \simeq \mathcal{O}(\mu_1) \oplus T(\mu_2-2) \oplus \mathcal{O}(\mu_4)$$

mais ceci est absurde car $A \neq 0$.

VIII. 6. Cas où $F=1$.

Par (II. 4.3) il vient :

$$E \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1) \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_2) \oplus \Omega^1_{\mathbf{P}^3}(2+\mu_4).$$

VIII. 7. Cas où $F=0$.

On a $E_4 \simeq \mathcal{O}_G$ d'où une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}(-\mu_4) \to E^v \to \mathscr{G} \to 0$$

avec $\mathscr{G}$ uniforme. En utilisant les résultats de [Ell. 2] et cette suite exacte on voit que E est isomorphe à l'un des fibrés suivants :

$$\oplus\, r_i \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i), \qquad \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_4) \oplus T_{\mathbf{P}^3}(-2+\mu_2).$$

En résumé, on a démontré :

VIII. 8. PROPOSITION. — *Les fibrés uniformes sur* $\mathbb{P}^3$ *de type de scindage* ($k=4$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=1$; $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) *sont* (*à isomorphisme près*) :

$$\bigoplus_{i=1}^{4} r_i.\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_i),$$
$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus T_{\mathbf{P}^3}(-2+\mu_2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_4);$$
$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(\mu_2)\oplus\Omega^1_{\mathbf{P}^3}(-1+\mu_1).$$

IX. $k=4$, $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=1$, $r_4=2$.

On pose :

$$S_1(T, U, V)=T+A(U+V), \qquad S_2(T, U, V)=T+B(U+V)$$
$$S_3(T, U, V)=T+C(U+V),$$
$$S_4(T, U, V)=T^2+TD(U+V)+E(U^2+V^2)+FUV.$$

IX. 1. LEMME. — *Les seuls cas possibles sont :*

(i) $A=0$;

(ii) $A=-1$;

(iii) $A\leqslant -2$, $B=0$ ou $B=-1$.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de (VIII. 1). Soit la relation $(\mathcal{E}_1)$:

$$\prod_{i=1}^{4} S_i(T+(1-i)U, U, V)=T^5+c_1 UT^4+c_2 U^2 T^3+c_3 U^3 T^2$$
$$+(\alpha T+\gamma U+\gamma V)U^4+M(T, U, V)R(U, V).$$

En calculant modulo (U^2+V^2) dans $(\mathcal{E}_1)$, les coefficients de $T^4 V$ et $U^2 T^3$ donnent respectivement :

(1) $$A+B+C+D=0,$$

(2) $$c_2=29-3A-2B-C.$$

En calculant modulo $(U+V)$ dans $(\mathcal{E}_1)$, le coefficient de $U^2 T^3$ fournit :

(3) $$c_2=29+2E-F.$$

En posant $U=0$ et $V=1$ dans $(\mathcal{E})$ il vient :

(4) $$E=A^2+B^2+C^2+AB+AC+BC.$$

De (2), (3) et (4) on déduit :

$$F=(A+B+C)^2+A(A+3)+B(B+2)+C(C+1).$$

D'autre part, en identifiant les coefficients de $U^2 V^3$ et $U^3 V^2$ dans $(\mathscr{E}_4)$: $(\star) F\chi+6E=0$ avec $\chi := 2A(C+1)+B(A+3)+3C(2+B)$. De plus : $A\leqslant 0$, $B\leqslant 0$, $C\leqslant 0$, $D\geqslant 0$ (*cf.* V. 1.1) et $E\geqslant 0(4)$. Si $A\leqslant -3$, $B\leqslant -2$ et $C\leqslant -1$ alors la relation $(\star)$ n'a pas de solution (car $F>0$, $\chi\geqslant 0$, $E>0$). Les cas $0\geqslant A\geqslant -1$, $0\geqslant B\geqslant -1$ sont contenus dans (IX. 1), ainsi il reste à traiter $A=-2$ et $C=0$.

Supposons $A=-2$. En calculant modulo (U^2+V^2) dans $(\mathscr{E}_2)$ les coefficients de U^5 et $U^4 V$ donnent respectivement :

$$B[(4-2D)(4C-1)-(F-2D)(3-2C)]=\gamma$$
$$B[(4-2D)(3-2C)+(F-2D)(4C-1)]=\gamma.$$

On peut supposer $B\neq 0$ et par différence il vient :

$$2(2-D)(3C-2)=(F-2D)(1+C) \quad (\star\star).$$

Si $D\leqslant 2$, de (1) il vient $B=0$ et $C=0$.

Si $D>2$ et $C\leqslant -1$, de $(\star\star)$ on déduit : $F-2D<0$, c'est-à-dire : $2B^2+2C^2-C+2BC-2<0$, ce qui est impossible si $C\leqslant -1$.

Pour conclure, il reste à traiter le cas : $C=0$.

$S_3(T, U, V)$ étant égal à T, la relation $(\mathscr{E}_3)$ s'écrit :

$$T^5+\tilde{c}_1 UT^4+\tilde{c}_2 U^2 T^3+\tilde{c}_3 U^3 T^2+\tilde{\alpha} TU^4+M_3(T, U, V)R(U, V) = \textstyle\prod_{i=1}^4 S_i(T+(3-i)U, U, V).$$

Ceci montre que la relation $(\mathscr{E}_4)$ modulo (U^2+V^2) est de la forme :

$$T^5+s_1 UT^4+s_2 U^2 T^3+s_3 U^3 T^2+\alpha' TU^4+\beta U^5 \equiv \textstyle\prod_{i=1}^4 S_i(T+(4-i)U, U, V).$$

En calculant le coefficient de $U^4 V$ on obtient : $F(6+3B+2A)=0$ dont toutes les solutions sont contenues dans (IX. 1). ■

IX. 2. Cas où $A=0$.

On a : $E_1\simeq\mathcal{O}_G$ ce qui donne une suite exacte :

$$0\to\mathcal{O}(\mu_1)\to E\to\mathcal{F}\to 0$$

avec $\mathscr{F}$ uniforme. En utilisant les résultats de [Ell. 2] et cette suite exacte, il vient :

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{4} r_i . \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i)$$

ou :

$$E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-2+\mu_3).$$

IX. 3. Cas où $A=-1$.

Ce cas est impossible : d'après (II. 4.3) on aurait une injection $0 \to Q \to E(-\mu_1+1)$ ce qui est absurde, vu le type de scindage de $E(-\mu_1+1)$.

IX. 4. Cas où $A \leqslant -2$ et $B=0$.

En procédant comme en (VIII. 4) il vient :

$$E \simeq \bigoplus_{i=1}^{4} r_i . \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i)$$

ou :

$$E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-2+\mu_3)$$

mais ceci est impossible car $A \neq 0$.

IX. 5. Cas où $A \leqslant -2$ et $B=-1$.

D'après (V. 5.1) on aurait une injection : $0 \to T(-2+\mu_2) \to E$ ce qui est absurde vu le type de scindage de E.

Ceci termine la démonstration de :

IX. 6. PROPOSITION. — *Les fibrés uniformes sur $\mathbb{P}^3$ de type de scindage* ($k=4$; $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=1$, $r_4=2$; μ_1, μ_2, μ_3, μ_4) sont à isomorphisme près :

$$\bigoplus_{i=1}^{4} r_i . \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_i); \qquad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mu_2) \oplus T_{\mathbb{P}^3}(-2+\mu_3).$$

La classification des fibrés uniformes de rang cinq sur $\mathbb{P}^3$ est donc maintenant complète.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba-Ell] BALLICO (E.) et ELLIA (P.). — Fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$, à paraître au *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 294, 1982, p. 403-406.

[Ba-VdV] BARTH (W.) et VAN DE VEN (A.). — On the geometry in codimension 2 of Grassmann manifolds in Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds, *Lectures Notes in Math.*, n° 412, 1974, p. 1-35.

[Dr] DREZET (J. M.). — Exemples de fibrés uniformes non homogènes, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 291, 1980, p. 125-128.

[E-H-S] ELENCWAJG (G.), HIRSCHOWITZ (A.) et SCHNEIDER (M.). — Les fibrés uniformes de rang au plus n sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sont ceux qu'on croit in Vector bundles and differential equations. *Proceedings*, Nice, 1979. *Progress in Math.*, vol. 7 (Birkhäuser Boston), p. 37-63.

[Ele, 1] ELENCWAJG (G,). — Les fibrés uniformes de rang 3 sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont homogènes, *Math. Ann.*, vol. 231, 1978, p. 217-227.

[Ele, 2] ELENCWAJG (G.). — Des fibrés uniformes non homogènes, *Math. Ann.*, vol. 239, 1979, p. 185-192.

[Ell, 1] ELLIA (P.). — Des fibrés uniformes non homogènes de rang $(2n+1)$ sur $\mathbb{P}^n (n \geqq 3)$, *Journal für die reine and ang. Math.*, vol. 321, 1981, p. 113-119.

[Ell, 2] ELLIA (P.). — Sur les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n$: *Mémoire de la Soc. Math. France*, nouvelle série n° 7, 1982, p. 1-60.

[Ha] HARTSHORNE (R.). — Algebraic Geometry *Graduate texts in Math.*, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Sa] SATO (E.). — Uniform vector bundles on a projective space, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 28, 1976, p. 123-132.

[VdV] VAN DE VEN (A.). — On uniform vector bundles, *Math. Ann.*, vol. 195, 1972, p. 245-248.