BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES FÉLIX
STEPHEN HALPERIN
JEAN-CLAUDE THOMAS

L. S. catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore. (Une nuit dans le train)

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 89-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__89_0>

Bull. Soc. math. France
111, 1983, p. 89-96.

L. S. CATÉGORIE ET SUITE SPECTRALE DE MILNOR-MOORE
(Une nuit dans le train)

PAR

YVES FÉLIX, STEPHEN HALPERIN et JEAN-CLAUDE THOMAS (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'il est impossible de majorer la catégorie d'un espace en terme des invariants liés à la suite spectrale de Milnor-Moore et donnons une caractérisation des espaces S dont l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle est abélienne et $e(S)\leqslant 2$.

ABSTRACT. — The rational category of a space is not bounded by invariants related to the Milnor-Moore spectral sequence. We give a characterization of space S whose homotopy Lie algebra is abelian and which satisfy $e(S)\leqslant 2$.

Dans cet article on désigne par S un CW-complexe, 1-connexe dont l'homologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré. On rappelle que la *L.S.-catégorie de S* est le plus petit entier m tel que $m+1$ ouverts contractiles dans S constituent un recouvrement de S. Cet invariant homotopique, noté cat (S) est minoré par la L.S.-catégorie du localisé $S_{\mathbf{Q}}$ de S, notée $\mathrm{cat}_0(S)$ et appelée *la catégorie rationnelle de S*.

Deux autres invariants homotopiques liés à la L.S.-catégorie sont définis à l'aide de la suite spectrale de Milnor-Moore. Rappelons que si l'on considère la bar-construction sur l'algèbre différentielle des chaînes $(C_*(\Omega(S)), \partial)$ de l'espace des lacets $\Omega(S)$, alors la filtration par le bar degré engendre une suite spectrale de coalgèbres convergeant vers $H_*(S)$. Nous appelons *suite*

(*) Texte reçu le 4 juillet 1982.

Yves FÉLIX, U.C.L., Institut de Mathématique, Chemin du cyclotron 2, 1348 Louvain-La-Neuve (Belgique) (Chercheur F.N.R.S.).

Stephen HALPERIN, Mathematics Department, University of Toronto, Toronto (Canada). (Pendant le cours de cette recherche l'auteur a bénéficié de l'hospitalité du Sondersforshungsbereich (40) Mathematik à l'Université de Bonn et de celle de l'Université de Lille-I.)

Jean-Claude THOMAS, Université de Lille-I, U.E.R. de Mathématiques pures et appliquées, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex (E.R.A. au C.N.R.S. 07 590).

spectrale de Milnor-Moore, la suite spectrale $E_2^{*,*}$ duale de la précédente, qui converge vers $H^*(S; \mathbb{Q})$.

Les deux invariants $e(S)$ et $l(S)$ sont alors définis par :

$$e(S)=\sup\{p \mid E_\infty^{p,*}\neq 0\}.$$
$$l(S)=\inf\{p\geqslant 1 \mid E_{p+1}^{*,*}=E_\infty^{*,*}\}.$$

L'invariant $e(S)$ a été introduit par Toomer [T] qui démontre que $e(S)\leqslant \mathrm{cat}_0(S)$ et conjecture l'égalité; depuis Lemaire et Sigrist ont exhibé un exemple avec $e(S)=2$ et $\mathrm{cat}_0(S)=3$. Le résultat principal de Ginsburg [G] appliqué à $S_\mathbb{Q}$ donne $l(S)\leqslant \mathrm{cat}_0(S)$: par suite :

$$\sup(l(S), e(S))\leqslant \mathrm{cat}_0(S)\leqslant \mathrm{cat}(S).$$

Depuis s'est posée la question d'une éventuelle majoration de $\mathrm{cat}_0(S)$ en termes des invariants $l(S)$ et $e(S)$. Un des buts de cet article est de démontrer l'impossibilité d'une telle majoration. En effet nous pouvons énoncer :

Théorème 1. — *Soit $Y=\bigoplus_{p\geqslant 2} Y_p$ un espace vectoriel gradué de type fini. Il existe un et un seul espace S (à type d'homotopie rationnelle près) tel que :*

(i) $e(S)\leqslant 2$;

(ii) *L'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega(S))\otimes\mathbb{Q}$ est abélienne;*

(iii) *l'image de l'homomorphisme de Hurewicz (rationnel) est isomorphe à Y.*

Théorème 2. — *A l'exception des seuls espaces S^p, $S^p\times S^q$ (p, q impairs) et des espaces dont la cohomologie rationnelle est isomorphe à $\mathbb{Q}[\alpha]/\alpha^3$ tout espace satisfaisant aux conditions* (i), (ii) *du théorème* 1 *vérifie aussi :*

$$\dim \pi_*(S)\otimes\mathbb{Q}=\infty.$$

Dans ce cas, $e(S)=l(S)=2$ et $\mathrm{cat}_0(S)=\infty$.

Ces résultats laissent ouvert le :

Problème. — Si $\mathrm{cat}_0(S)<\infty$, peut-on majorer $\mathrm{cat}_0(S)$ en fonction de $e(S)$ et de $l(S)$

Nous pouvons néanmoins montrer que même quand S est un CW complexe fini on ne peut pas majorer $\mathrm{cat}_0(S)$ uniquement à l'aide de $e(S)$. En effet :

THÉORÈME 3. — *Il existe une suite infinie S_k, $k=1, 2, \ldots$, de CW complexes finis* 1-*connexes, telle que :*

$$e(S_k)=2 \qquad et \qquad \mathrm{cat}_0(S_k)>k.$$

En particulier $\mathrm{cat}_0(S_k)/e(S_k) \to \infty$.

Ces résultats se démontrent à l'aide des *modèles minimaux de Sullivan*. Ceci désigne une algèbre différentielle graduée (a. d. g. c.) $(\Lambda X, d)$ où $X=\bigoplus_{p\geq 2} X^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, gradué de type fini, ΛX l'algèbre graduée commutative libre engendrée par X, d est une dérivation de carré nul et de degré $+1$ telle que $d(X)\subset(\Lambda X)^+ (\Lambda X)^+$. D'après [S] et [B-G], on associe à tout espace S un modèle minimal $(\Lambda X, d)$ unique à isomorphisme près, ce qui induit une bijection entre « *les types d'homotopie des espaces* $S_{\mathbb{Q}}$ » et « *les classes d'isomorphisme des modèles minimaux* ».

D'autre part l'a. d. g. c., ΛX est munie d'une seconde (wedge) graduation $\Lambda X=\bigoplus_{i\geq 0} \Lambda^i X$, lorsque l'on désigne par $\Lambda^i X$ le sous-espace des mots en X de longueur i. La filtration par les idéaux $\Lambda^{\geq i} X$ engendre une suite spectrale qui s'identifie à celle de Milnor-Moore.

Si on suppose en outre que $d(X)\subset\Lambda^i X$ pour un i fixé, alors la cohomologie $H(\Lambda X, d)$ est bigraduée $H(\Lambda X, d)=\bigoplus_{p,q} H^{p,q}(\Lambda X, d)$ où $H^{p,q}(\Lambda X, d)$ est le sous-espace des classes représentées par des cocycles dans $(\Lambda^p X)^{p+q}$.

La proposition clef s'énonce :

PROPOSITION 1. — *Soit $Z_0=\bigoplus_{p\geq 2} Z_0^p$ un espace vectoriel gradué de type fini. Il existe une et une seule a. d. g. c. $(\Lambda X, d)$ (à isomorphisme près) telle que :*

(*a*) $d(X)\subset\Lambda^3 X$.

(*b*) $(\ker d)\cap X\cong Z_0$.

(*c*) $H^{3,*}(\Lambda X, d)=0$.

Dans ce cas, $(\Lambda X, d)$ *vérifie nécessairement :*

$$H^{p,*}(\Lambda X, d)=0, \qquad p\geq 3.$$

Démonstration de la proposition 1. — Posons $Z_1^p=(\Lambda^3 Z_0)^{p+1}$ et définissons $d : Z_1 \xrightarrow{\cong} \Lambda^3 Z_0$. Supposons $(\Lambda(Z_0\oplus\ldots\oplus Z_k), d)$ définie et choisissons Z_{k+1} et $d : Z_{k+1} \to \mathrm{Ker}\, d\cap\Lambda^3(Z_0\oplus\ldots\oplus Z_k)$ de telle manière que d induise un isomorphisme $Z_{k+1} \xrightarrow{\cong} H^{3,*}(\Lambda(Z_0\oplus\ldots\oplus Z_k), d)$.

Posons $X=\bigoplus_{k\geqslant 0} Z_k$, alors l'a. d. g. c. $(\Lambda X, d)$ ainsi construite vérifie (*a*) (*b*) (*c*) et est évidemment unique à isomorphisme près.

Il reste à démontrer que $H^{p,*}(\Lambda X, d)=0, p\geqslant 4$. Pour ceci, fixons une base $x_1, x_2, \ldots$ de X avec $\deg x_i \leqslant \deg x_{i+1}$; alors $dx_i \in \Lambda\ (x_1, \ldots, x_{i-1})$. Soit $(\Lambda X_{\geqslant i}, d)$ l'a. d. g. c. obtenue en quotientant $(\Lambda X, d)$ par l'idéal $\Lambda^+(x_1, \ldots, x_{i-1})$ et définissons la condition C_j^r par :

$$C_j^r: \quad H^{p,q}(\Lambda X_{\geqslant j})=0 \quad \text{si} \quad p\geqslant 3 \quad \text{et} \quad p+q\leqslant r.$$

Nous terminons en montrant :

(*a*) $$C_j^r \Rightarrow C_{j+1}^r$$

et :

(*b*) $$(C_j^r, \forall j\geqslant 2) \Rightarrow C_1^{r+1}.$$

(*a*) $C_j^r \Rightarrow C_{j+1}^r$: Nous noterons d et $\bar{d}$ les différentielles induites dans $\Lambda X_{\geqslant j}$ et $\Lambda X_{\geqslant j+1}$. Si $\Phi\in(\Lambda^p X_{\geqslant j+1})^s$ $(s\leqslant r, p\geqslant 3)$ est un $\bar{d}$-cocycle alors $d\Phi=x_j\Omega$. Il y a deux cas à distinguer :

Cas (*i*) : $\deg x_j$ *est pair*. Dans ce cas la relation $0=d^2\Phi=x_j d\Omega$ implique $d\Omega=0$. Mais :

$$\Omega\in(\Lambda^{p+1} X_{\geqslant j})^{s-|x_j|+1}, \qquad |x_j|=\deg x_j,$$

et en vertu de C_j^r, $\Omega=d\Gamma$ et $d(\Phi-x_j\Gamma)=0$. Mais $\Phi-x_j\Gamma\in(\Lambda^p X_{\geqslant j})^s$ et une deuxième application de C_j^r donne $\Phi-x_j\Gamma=d\Psi$, d'où $\Phi=\bar{d}\Psi'$.

Cas (*ii*) : $\deg x_j$ *est impair*. De $d(x_j\Omega)=0$ on tire $d\Omega=x_j\Omega_1$, et donc une suite $\Omega=\Omega_0, \Omega_1, \ldots$ d'éléments dans $\Lambda X_{\geqslant j}$ avec :

$$d\Omega_i=x_j\Omega_{i+1}.$$

En particulier $\deg\Omega>\deg\Omega_1>\ldots$ et donc pour un certain i, $\Omega_{i+1}=0$. Il en suit que $d\Omega_i=0$ d'où (d'après C_j^r) $\Omega_i=d\Gamma_i$ et donc $d(\Omega_{i-1}+x_j\Gamma_i)=0$. Une deuxième application de C_j^r donne $\Omega_{i-1}+x_j\Gamma_i=d\Gamma_{i-1}$ et $d(\Omega_{i-2}+x_i\Gamma_{i-1})=0$. Continuons de cette manière; à la fin on trouve $d\Psi=\Phi+x_j\Gamma_0$, d'où $\Phi=\bar{d}\Psi'$.

(*b*) C_j^r, *tout* $j\Rightarrow C_1^{r+1}$: Soit $\Phi\in(\Lambda^p X)^{r+1}$ un cocycle, $p\geqslant 4$. Il faut démontrer que Φ est un cobord. Évidemment Φ se projette en zéro dans $\Lambda X_{>i}$ pour i assez grand. Il suffit donc de montrer que si Φ se projette sur un cobord dans $\Lambda X_{>i}$ il se projette aussi sur un cobord dans $\Lambda X_{\geqslant i}$. Notons d et $\bar{d}$ les différentielles dans $\Lambda X_{\geqslant i}$ et $\Lambda X_{>i}$ et Ψ l'image de Φ dans $\Lambda X_{\geqslant i}$, Ψ' son image dans $\Lambda X_{>i}$.

Alors $\Psi' = \overline{d\Gamma}$; remplaçons Ψ par $\Psi - d\Gamma$ de telle manière que $\Psi = x_i \Omega$. Si $\deg x_i$ est pair nécessairement $d\Omega = 0$; de plus $\Omega \in (\Lambda^{\geqslant 3} X_{\geqslant i})^{\leqslant r}$. Appliquant C_i^r nous obtenons $\Omega = d\Gamma$, $\Psi = d(x_i \Gamma)$.

Si $\deg x_i$ est impair nous trouvons $\Omega = \Omega_0, \Omega_1, \ldots$ avec $d\Omega_k = x_i \Omega_{k+1}$; pour des raisons de degré, il existe $k+1$ tel que $\Omega_{k+1} = 0$. Les Ω_v étant tous de degré $\leqslant r$, nous concluons par le même raisonnement que dans (a) que $\Omega = d\Gamma + x_i \Gamma'$. Alors :

$$\Psi = x_i \Omega = -d(x_i \Gamma).$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 1. — D'après un résultat d'ANDREWS et ARKOWITZ [A-A], la condition $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$ abélienne équivaut à $d(X) \subset \Lambda^{\geqslant 3} X$, où $(\Lambda X, d)$ est le modèle minimal de S. Si de plus $d(X) \subset \Lambda^3 X$, l'image de l'homomorphisme de Hurewicz est en dualité avec $\operatorname{Ker}(d) \cap X$, [S], [B-G], [B-L].

Avec les notations de la proposition 1, choisissons $Z_0^p = \operatorname{Hom}(Y_p, \mathbb{Q})$. Les conditions (ii) et (iii) du théorème 1 sont satisfaites et puisque $H^{p,*}(\Lambda X, d) = 0$ si $p \geqslant 3$, la condition (i) du théorème 1 est certainement vérifiée.

. Pour montrer l'unicité, supposons que S vérifie (i), (ii), (iii). Soit $(\Lambda X, d)$ un modèle minimal de S, à l'aide d'un changement de générateurs, on peut supposer que si $d(x+\Phi) = 0$ pour un $x \in X$ et un $\Phi \in \Lambda^{\geqslant 2} X$ alors $dx = 0$. Posons, alors $Z = X \cap \ker d$ et $\Lambda X = \Lambda Z \otimes \Lambda Y$.

Soit maintenant $(\Lambda \tilde{X}, D_3) = (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}, D_3)$ le modèle construit dans la proposition 1 à partir de Z. En vertu de l'unicité de $(\Lambda \tilde{X}, D_3)$ il suffit de montrer que $(\Lambda \tilde{X}, D_3)$ est isomorphe à $(\Lambda X, d)$ pour établir l'unicité de S.

Supposons avoir construit un isomorphisme :

$$\psi : \quad (\Lambda Z \otimes \Lambda \tilde{Y}^p, D_3) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda Y^{<r}, d)$$

tel que $\psi_{|\Lambda Z} = \mathrm{id}_{\Lambda Z}$. Soit $\tilde{y} \in \tilde{Y}^p$, alors $\psi(D_3 \tilde{y})$ est un d-cocycle dans $(\Lambda^{\geqslant 3} X)^{p+1}$ et puisque $e(S) = 2$ nécessairement $\psi D_3(\tilde{y})$ est un d-cobord.

Posons, $\psi(D_3(\tilde{y})) = d\ (\alpha(\tilde{y}) + \beta(\tilde{y}))$ où $\alpha(\tilde{y}) \in (\Lambda Z \otimes \Lambda^+ Y^{<p})^p$, $\beta(\tilde{y}) \in Y^p$ dépendent linéairement de $\tilde{y}$. Puisque ψ est un isomorphisme, pour tout $\tilde{y} \neq 0$ $\psi(D_3 \tilde{y})$ possède une composante non nulle dans $\Lambda^3 X$, d'autre part pour des raisons de degré que $\alpha(\tilde{y}) \in \Lambda^{\geqslant 2} X$.

Par suite. $d\alpha(\tilde{y})\in\Lambda^{\geqslant 4}X$ et $\beta(\tilde{y})\neq 0$; c'est-à-dire que β est injectif. Prolongeons ψ à $\tilde{Y}^p$ en posant $\psi(\tilde{y})=\alpha(\tilde{y})+\beta(\tilde{y})$ alors ψ : $(\Lambda Z\otimes\Lambda\tilde{Y}^{\leqslant p}, D_3)\to(\Lambda Z\otimes\Lambda Y^{\leqslant p}, d)$ est un homomorphisme d'a. d. g. c. injectif. Il est à montrer que $Y^p\subset \operatorname{Im}\psi$. Soit $y\in Y^p$ alors dy appartient à $(\Lambda Z\otimes\Lambda Y^{<p})\cap\Lambda^{\geqslant 3}X$, d'où :

$$\psi^{-1}(dy)\in(\Lambda Z\otimes\Lambda\tilde{Y}^{<p})\cap(\Lambda^{\geqslant 3}\tilde{X})\cap(\ker D_3).$$

D'après la proposition 1, $\psi^{-1}(dy)=D_3\Phi$ et puisque Φ est de degré p, $\psi(\Phi)$ est défini et $d(y-\psi(\Phi))=0$.

Posons $\Phi=\tilde{y}+\Omega$ avec $\tilde{y}\in\tilde{Y}^p$, $\Omega\in\Lambda^{\geqslant 2}\tilde{X}$, alors $d(y-\beta(\tilde{y})-\Omega')=0$ avec $\Omega'\in\Lambda^{\geqslant 2}X$. Par hypothèse $y-\beta(\tilde{y})\in Y^p\cap Z=0$, d'où :

$$y=\beta(\tilde{y})=\psi(\tilde{y})-\alpha(\tilde{y})=\psi(\tilde{y}-\psi^{-1}(\alpha(\tilde{y})))$$

ce qui démontre que ψ : $(\Lambda Z\otimes\Lambda\tilde{Y}^{\leqslant p}, D_3)\to(\Lambda Z\otimes\Lambda^{\leqslant p}Y, d)$ est un isomorphisme d'a. d. g. c. Une induction sur p termine la démonstration.

Démonstration du théorème 2. — Puisque d'après ce qui précède S admet un modèle du type $(\Lambda X, D_3)$, nécessairement $l(S)=2$. Si on suppose en outre que $\dim X=\dim\,(\pi_*(S)\otimes\mathbb{Q})=\infty$, d'après [F-H-T] nécessairement $\operatorname{cat}_0(S)=\infty$, puisque $\pi_*(S)\otimes\mathbb{Q}$ est abélienne.

Supposons maintenant que $\dim X$ soit fini, et notons $x_1, \ldots, x_n$ une base de X telle que $\deg x_i\leqslant\deg x_{i+1}$. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la démonstration de la proposition 1 chaque $(\Lambda X_{\geqslant i}, d)$ satisfait aux conditions (i) et (ii); en particulier :

$$0=[x_i]^3\in H(\Lambda X_{\geqslant i}).$$

Cette dernière condition entraîne d'après [H] que $\dim H(\Lambda X, d)<+\infty$ et d'après [F-H], §.9, que $\dim\,(X^{\text{impair}})\leqslant e(S)\leqslant 2$. Un petit calcul utilisant la relation $dX\subset\Lambda^3X$ et [H], §.11, montre alors que les seuls modèles possibles sont :

$$(\Lambda(x), 0),\qquad \deg x \text{ impair}.$$

$$(\Lambda(x, y), 0),\qquad \deg x \text{ et } \deg y \text{ impair}.$$

$$(\Lambda(x, y), d),\qquad dy=0,\quad dx=y^3.$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 3. – Soit S satisfaisant aux conclusions des théorèmes 1 et 2 choisi de façon que $\dim \pi_p(S) \otimes \mathbb{Q} \geqslant p+1$, pour tout $p>1$. (Ceci est possible en choisissant bien l'espace vectoriel Y.)

Soit $(\Lambda X, d)$ le modèle minimal de S. La différentielle d est homogène de wedge degré 2. Considérons un idéal bigradué I_k de ΛX tel que :

$$I_k^p = 0, \qquad p<k, \qquad I_k^k \oplus (\operatorname{Ker} d)^k = (\Lambda X)^k,$$
$$I_k^p = (\Lambda X)^p, \qquad p>k.$$

L'algèbre différentielle quotient $(\Lambda X / I_k, \bar{d})$ a le même modèle $(\Lambda Z, D)$ que le k-squelette $S(k)$, d'une décomposition homologique de S, Évidemment, $\bar{d}$ est homogène relativement à la graduation induite dans $\Lambda X / I_k$ par le wedge degré.

Montrons d'abord que $e(S(k)) \leqslant 2$. En effet si $\Phi \in \Lambda^3 Z$ est un D-cocycle son image dans $\Lambda X / I_k$ est la somme de $\bar{d}$-cocycle Ψ_i. Chaque Ψ_i est l'image, par la projection $\Lambda X \twoheadrightarrow \Lambda X / I_k$, d'un d-cocycle $\Psi'_i \in \Lambda^i X$ (puisque la projection est bihomogène et surjective en cohomologie). Comme $e(\Lambda X, d) \leqslant 2$, Ψ'_i est un d-cobord, par suite les Ψ_i sont des $\bar{d}$-cobord et Φ est un D-cobord.

Posons maintenant :

$$S_k = S(4k^2+2).$$

L'inclusion $\pi_*(\Omega S_k) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(\Omega S) \otimes Q$ est un isomorphisme en degré $\leqslant 4k^2$. Si $\operatorname{cat}_0(S) = m \leqslant 2k$ alors en vertu de notre hypothèse initiale $rg(\pi_{2k}(\Omega S)) \geqslant m+1$. En appliquant alors [F-H-T], théorème 1.6, on déduit que $m(4k+1) - 4k > 4k^2$, puisque $\pi_*(\Omega S) \otimes Q$ est abélienne. Par suite si $m \leqq 2k$, nécessairement $m>k$ et donc $m>k$ est toujours satisfaite.

Finalement puisque $\operatorname{cat}_0(S_k) \geqslant 2$, nécessairement $e(S_k) \geqslant 2$, ce qui montre que $e(S_k) = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[A-A] ANDREWS (P.) et ARKOWITZ (M.). – Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products, *Canad. J. Math.*, vol. XXX, n° 5, 1978, p. 961-982.

[B-G] BOUSFIELD (A. K.) et GUGENHEIM (V. K. A. M.). – On the P. L. de Rham theory and rational homotopy type, *Memoirs of A.M.S.*, 179, 1976.

[B-L] BAUES (H. J.) et LEMAIRE (J. M.). – Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann.*, vol. 225, 1977, p. 219-242.

[F-H] FELIX (Y.) et HALPERIN (S.). – Rational L. S. category and its applications (à paraître *Trans. of A.M.S.*).

[F-H-T] FÉLIX (Y.), HALPERIN (S.) et THOMAS (J. C.). — *The homotopy Lie algebra for finite complexes* (à paraître).

[G] GINSBURG (M.). — On the L. S. category, *Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 538-551.

[L-S] LEMAIRE (J. M.) et SIGRIST (F.). — Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L. S. catégorie, *Comment Math. Helvetici*, vol. 56, 1981, p. 103-122.

[S] SULLIVAN (D.). — Infinitesimal computations in topology, *Publ. I.H.E.S.*, vol. 47, 1977, p. 269-331.