

BULLETIN DE LA S. M. F.

NIGEL RAY

LIONEL SCHWARTZ

Construction d'éléments dans $\pi_*^S(BU(2))$

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 449-465

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__449_0

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION D'ÉLÉMENTS DANS $\pi_*^S(BU(2))$

PAR

NIGEL RAY et LIONEL SCHWARTZ (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article on construit géométriquement des éléments de $\pi_*^S(BU(2))$ ne provenant pas de $\pi_*^S(B\mathbb{T}^2)$ par l'application induite par le plongement $\mathbb{T}^2 \subset U(2)$ d'un tore maximal.

ABSTRACT. — In this article one gives a geometric construction of elements belonging to $\pi_*^S(BU(2))$ and which are not in the image of $\pi_*^S(B\mathbb{T}^2)$ via the map induced by the inclusion $\mathbb{T}^2 \subset U(2)$ of a maximal torus.

L'objet de cet article est de construire des éléments de $\tilde{\pi}_{2k}^S(BU(2))$ (homotopie stable du classifiant du groupe unitaire $U(2)$) qui ne proviennent pas de $\tilde{\pi}_{2k}^S(B\mathbb{T}^2)$ (homotopie stable du classifiant du tore \mathbb{T}^2) par l'application j_* induite par un plongement $\mathbb{T}^2 \subset U(2)$ d'un tore maximal.

En termes géométriques, on cherche des variétés framées de dimension $2k$ munies d'un fibré vectoriel complexe de dimension 2. Et, on demande que ce fibré ne puisse se scinder, à bordisme framé de la variété près, en somme de deux fibrés en droites complexes.

On rappelle que pour des théories homologiques telles que $H_*(-)$, $K_*(-)$, $U_*(-)$... où l'on a un isomorphisme de Thom, l'application j_* considérée est surjective.

On démontrera ici seulement l'existence de ces éléments. La preuve de ce qu'ils ne proviennent pas de $\tilde{\pi}_{2k}^S(B\mathbb{T}^2)$ est faite dans [10] et repose uniquement sur des méthodes algébriques.

Dans le paragraphe I, on rappelle ce qui est nécessaire de ([10] ou [2]).

(*) Texte reçu le 20 juin 1983, révisé le 10 novembre 1983.

Nigel RAY, University of Manchester, Department of Mathematics, Manchester M13 9PL, England; Lionel SCHWARTZ, Université Paris-Sud, Mathématiques, bâtiment 425 GR 21 du C.N.R.S., 91405 Orsay Cedex.

I. Rappels et notations

On notera $K_*(-)$ la K -homologie complexe et K_*K la coalgèbre des coopérations de cette théorie.

Si V est un espace, $x \in K_*(V)$ sera dit primitif pour la coaction si celle-ci l'envoie sur $x \otimes 1 \in K_*(V) \otimes_{\mathbb{Z}} K_*K$ (voir [1]).

Il est facile de voir [1] que tout élément $a \in \pi_*^S(V)$ s'envoie par l'homomorphisme de Hurewicz $k : \pi_*^S(V) \rightarrow K_*(V)$ vers un élément $k(a)$ primitif pour la coaction. Dans la suite, on dira primitif pour primitif pour la coaction.

Rappelons maintenant ([3], [9]) que $K_0(\mathbb{C}P^\infty)$ s'identifie naturellement, en tant qu'algèbre de Pontryagin, à l'algèbre des polynômes numériques E définie comme suit :

$$E = \{ P(X) \in \mathbb{Q}[X]/P(n) \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z} \}.$$

Cette algèbre admet pour \mathbb{Z} -base les polynômes $C_x^i = X(X-1)\dots(X-i+1)/i!$. En rappelant que $K^0(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[[T]]$ où $T = \eta - 1$ (η désignant le fibré de Hopf), on a les produits de Kronecker suivants :

$$\langle C_x^i, T^j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \geq 0.$$

A partir de là, il est facile de voir que $K_0(BT^2)$, où $BT^2 = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$, s'identifie naturellement, en tant qu'algèbre de Pontryagin, à l'algèbre des polynômes numériques en deux variables X et Y ; soit E_2 définie par :

$$(1) \quad E_2 = \{ P(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]/P(n, m) \in \mathbb{Z}, \forall n, m \in \mathbb{Z} \}.$$

Il est clair que :

$$E_2 \cong E \otimes_{\mathbb{Z}} E.$$

Il nous faut maintenant décrire $K_0(BU(2))$ de manière analogue, on a la :

PROPOSITION 1 ([2], [10]). — *Le \mathbb{Z} -module $K_0(BU(2))$ est naturellement isomorphe au sous \mathbb{Z} -module de $\mathbb{Q}[X, Y]$ engendré par les polynômes tels que :*

- $$(2) \quad \begin{aligned} (i) \quad & P(X, Y) = P(Y, X), \\ (ii) \quad & P(n, n) \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, \\ (iii) \quad & 2P(n, m) \in \mathbb{Z}, \forall n, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

L'application $j_* : K_0(B\mathbb{T}^2) \rightarrow K_0(BU(2))$ est celle qui, à $P(X, Y)$, associe $1/2(P(X, Y) + P(Y, X))$.

On va maintenant décrire les éléments primitifs dans $K_{2n}(V)$ pour $V = BU(2)$ et $V = B\mathbb{T}^2$. On a la :

PROPOSITION 2 ([2], [10]). — Les éléments primitifs dans $K_{2n}(V)$ sont ceux qui s'écrivent $u^n P(X, Y)$, où :

- (i) $u \in K_2(pt)$ est l'élément de Bott;
- (ii) $P(X, Y) \in \mathbb{Q}[X, Y]$ est un polynôme homogène de degré total n en X, Y ;
- (iii) le polynôme P vérifie (1) si $V = B\mathbb{T}^2$, vérifie (2) si $V = BU(2)$.

On notera H_2 pour l'algèbre des polynômes numériques homogènes en deux variables; on notera HS_2 pour le \mathbb{Z} -module des polynômes en deux variables, homogènes, vérifiant les conditions (2). On graduera H_2 et HS_2 par le degré des polynômes en posant $d^0 X = d^0 Y = 2$.

Il résulte des propositions 1 et 2 qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_*^S(B\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{k} & H_2 \\
 \downarrow v_* & & \downarrow s \\
 \pi_*^S(BU(2)) & \xrightarrow{k} & HS_2
 \end{array}$$

où k est l'homomorphisme de Hurewicz.

L'application s associe $1/2(P(X, Y) + P(Y, X))$ à $P(X, Y) \in H_2$. Toutes les applications sont graduées.

Il résulte de la suite spectrale de Atiyah-Hirzebruch que k est un isomorphisme après tensorisation par \mathbb{Q} .

On rappelle alors que :

PROPOSITION 3 [10]. — Le polynôme $(1/2) X^n Y^n ((XY^2 - X^2 Y)/2)^2$ de HS_2 n'est pas dans l'image de s , ceci pour tout $n \geq 0$.

Dans la suite, on notera X_n cet élément. On notera $P_1(X, Y)$ pour $(X^2 Y - XY^2)/2$. On va montrer que X_n provient de $\pi_*^S(BU(2))$ pour $n \equiv 1(4)$; on aura le

THÉORÈME 4. — Les éléments $X_{4k+1} \in \tilde{\pi}_{16k+16}^S(BU(2))$, $k \geq 0$, ne proviennent pas de $\tilde{\pi}_{16k+16}^S(B\mathbb{T}^2)$ par l'application j_* induite par un plongement $\mathbb{T}^2 \subset U(2)$.

La preuve est obtenue en examinant le diagramme (3).

Les éléments ainsi construits ne sont pas de torsion. On sait également [2] que X_0 ne provient pas de $\tilde{\pi}_{1,2}^S(BU(2))$.

Avant de passer à la construction de ces éléments, il faut fixer quelques notations. Si on note $k_*(-)$ la K -homologie complexe *connexe*, il y a un homomorphisme de Hurewicz :

$$a : k_*(-) \rightarrow H_*(-)$$

qui factorise l'homomorphisme de Hurewicz h de $\pi_*^S(-)$ vers $H_*(-)$; en fait, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_*^S(-) & \xrightarrow{h} & H_*(-) \\ & \searrow k & \nearrow a \\ & k_*(-) & \end{array}$$

L'homomorphisme de Hurewicz $k : \pi_*^S(-) \rightarrow K_*(-)$ étant en fait à valeurs dans $k_*(-)$.

Les groupes $k_{2n}(V)$, pour $V = B\mathbb{T}^2$, $BU(2)$ sont facteurs directs des groupes $K_{2n}(V)$ et les éléments primitifs appartiennent à $k_{2n}(V)$.

Il sera utile de connaître l'image par a de $u^3 \cdot [(X^2 Y - XY^2)/2] \in k_6(B\mathbb{T}^2)$ dans $H_6(B\mathbb{T}^2)$.

Si on note $x_i \in H_{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$ un générateur, alors :

$$a(u^i \cdot X^i) = i! x_i, \quad \text{où } u^i \cdot X^i \in k_{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty);$$

et donc :

$$a\left(u^3 \cdot \frac{X^2 Y - XY^2}{2}\right) = x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2.$$

On va commencer par décrire un élément de $\pi_6^S(B\mathbb{T}^2)$ qui, par k , s'envoie sur $P_1(X, Y)$ dans H_2 .

II. Description d'un élément dans $\tilde{\pi}_6^S(B\mathbb{T}^2)$

On décrit un procédé fournissant un élément de $\pi_6^S(B\mathbb{T}^2)$ détectant $P_1(X, Y)$. K. H. Knapp a donné une autre construction de cet élément [6].

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^2$ a un plongement C^∞ dans S^7 . En fait, on a le résultat suivant [8] :

il existe un plongement C^∞ de deux copies de $\mathbb{C}P^2$ dans S^7 tel que chaque $\mathbb{C}P^2$ est rétract par déformation du complémentaire de l'autre exemplaire.

On peut également plonger $\mathbb{C}P^2$ dans S^7 de la manière suivante : $\mathbb{C}P^2$ est le cône de l'application $\eta : S^3 \rightarrow S^2$, le cylindre de cette application se plonge dans le joint $S^3 * S^2 \cong S^6$. En plongeant S^6 dans S^7 , on obtient aisément un plongement du cône.

Notons L^7 un voisinage tubulaire d'un des $\mathbb{C}P^2$ contenu dans S^7 . Son bord ∂L est une hypersurface lisse M^6 .

Le complémentaire de l'intérieur de L^7 dans S^7 se rétracte par déformation sur l'autre exemplaire de $\mathbb{C}P^2$ plongé dans S^7 . On notera DL l'adhérence de $S^7 - L$; on a alors :

$$M^6 \cong L \cap DL.$$

On sait alors que l'on a une équivalence d'homotopie :

$$\Sigma M^6 \sim \Sigma L \vee \Sigma DL \vee S^7.$$

L'algèbre de cohomologie $H^*(M^6)$ est décrite comme suit :

$H^2(M^6) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, ayant pour générateurs α provenant de $H^2(L)$ et β provenant de $H^2(DL)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} H^4(M^6) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ H^6(M^6) = \mathbb{Z}, \\ H^i(M^6) = \{0\} \text{ sinon pour } i > 0; \end{array} \right.$$

et on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^3 = 0, \quad \beta^3 = 0, \\ \alpha^2 \beta = -\alpha \beta^2, \\ \langle [M], \alpha^2 \beta \rangle = 1. \end{array} \right.$$

Les deux premières relations proviennent de relations similaires dans $H^*(L)$ et $H^*(DL)$. La seconde et la troisième relations proviennent de la dualité de Poincaré et d'une convention de signes. On a alors :

LEMME 5. — *La variété M^6 munie de sa trivialisat ion d'hypersurface et de l'application (α, β) dans $B\mathbb{T}^2$ représente un élément de $\pi_6^S(B\mathbb{T}^2)$ qui, par k , s'envoie sur :*

$$P_1(X, Y) \in H_2.$$

Preuve. — On désignera par x et y les deux générateurs ordinaires de $H^2(B\mathbb{T}^2)$. Soit $[M^6]_{\pi}$ la classe fondamentale de M^6 en homotopie stable, déterminée par sa trivialisaton d'hypersurface :

$$[M^6]_{\pi} \in \tilde{\pi}_6^S(M^6).$$

On veut montrer que, en notant f pour l'application (α, β) :

$$k \circ f_*([M^6]_{\pi}) = P_1(X, Y) \in H_2.$$

On calcule alors les produits de Kronecker suivants en homologie :

$$\begin{aligned} \langle f_*([M^6]), x^3 \rangle &= \langle [M^6], \alpha^3 \rangle = 0, \\ \langle f_*([M^6]), x^2 y \rangle &= \langle [M^6], \alpha^2 \beta \rangle = 1, \\ \langle f_*([M^6]), xy^2 \rangle &= \langle [M^6], \alpha \beta^2 \rangle = -1, \\ \langle f_*([M^6]), y^3 \rangle &= \langle [M^6], \beta^3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ceci nous dit que :

$$h \circ f_*([M^6]_{\pi}) = f_*([M^6]) = x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2 \in H_6(B\mathbb{T}^2).$$

Or, $P_1(X, Y)$ s'envoie sur $x_2 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_2$ par l'homomorphisme de Hurewicz $a : k_6(B\mathbb{T}^2) \rightarrow H_6(B\mathbb{T}^2)$; comme cette application est injective, on a le résultat.

La variété M^6 ainsi construite a une caractéristique de Euler $\chi(M^6) = 6$. Son fibré tangent n'est donc pas instablement trivialisable. Dans la suite, il sera nécessaire d'avoir un modèle M^6 à fibré tangent instablement trivialisable. On l'obtient par chirurgie à partir du modèle M^6 initial, en attachant des anses de dimension appropriée : Dans une carte (un ouvert de M^6 isomorphe à \mathbb{R}^6 suffisamment petit) de M^6 , on enlève trois copies de $S^2 \times B^4$, et le long des bords $S^2 \times S^3$ on recolle des anses $B^3 \times S^3$. Puisque l'on a supposé que tout se passait dans une carte, la variété obtenue est encore une hypersurface plongée dans S^7 .

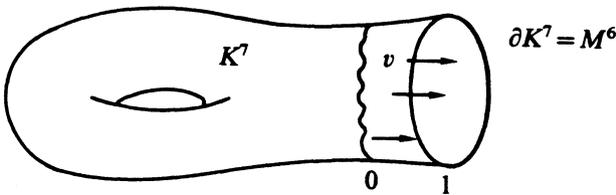
Cette construction correspond également à plonger dans S^7 deux copies de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^3$, et à répéter la construction qu'on a faite avec $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

L'hypersurface ainsi obtenue, que l'on notera encore M^6 , a même algèbre de cohomologie que la précédente, sauf en dimension 3 où l'on a : $H^3(M^6) \cong \mathbb{Z}^6$. L'application $(\alpha, \beta) : M^6 \rightarrow B\mathbb{T}^2$ est encore définie et le lemme 5, demeure vrai.

On remarquera également que la chirurgie ayant été faite dans une carte, on peut supposer que l'application (α, β) sur la variété de départ était, sur cette carte, constante. Ceci permet d'étendre cette application aussitôt au nouveau modèle.

On a maintenant $\chi(M^6) = 0$, et M^6 divise S^7 en deux sous variétés dont elle est le bord. Soient K et DK .

On a aussi le champ v de vecteurs donné par un voisinage collier de M^6 dans K^7 , c'est-à-dire $M^6 \times I \subset K^7$ ($I = [0, 1]$).



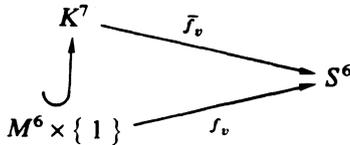
Choisissons maintenant une trivialisaton du fibré tangent à S^7 : soit

$\theta : TS^7 \xrightarrow{\sim} S^7 \times \mathbb{R}^7$. Le champ v détermine alors une application $f_v : M^6 \rightarrow S^6$ donnée par :

$$f_v(k) = \theta(v(k) / \|v(k)\|), \quad \forall k \in M^6.$$

On a alors le :

LEMME 6. — Il y a une extension :



telle que : $\bar{f}_v \sim pt$.

Preuve. — Par construction $f_v^* TS^6 \cong TM^6$. Mais $\chi(S^6) = 2$ et $\chi(M^6) = 0$. Les applications de M^6 dans S^6 sont classifiées, à homotopie près, par leur degré d'après le théorème de Hopf. La naturalité de la classe de Euler nous donne alors $f_v \sim pt$.

Choisissons alors une homotopie à zéro, $H : M^6 \times I \rightarrow S^6$ avec $H(-, 0) = pt$ et $H(-, 1) = f_v$, et définissons \bar{f}_v comme étant H dans le voisinage collier. Il est maintenant facile d'étendre \bar{f}_v à tout K^7 par :

$$\bar{f}_v(k) = pt, \quad \forall k \notin M^6 \times (0, 1].$$

Puis, on a l'homotopie à zéro :

$$\begin{cases} G(k, t) = pt, & k \notin M^6 \times (0, 1] \\ G((m, u); t) = H(m, ut) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $G(-; 0) = pt$, $G(-; 1) = \bar{f}_v$.

COROLLAIRE 7. — *Le fibré tangent TK^7 admet une trivialisatation par des champs v, v_1, \dots, v_6 où v_1, \dots, v_6 restreignent à une trivialisatation de TM^6 et v étend la normale extérieure de M^6 .*

Preuve. — La démonstration du lemme 6 nous permet d'étendre le champ v en un champ sans singularités sur tout K^7 . L'application \bar{f}_v est alors déterminée par la formule :

$$\bar{f}_v(k) = \theta(v(k) / \|v(k)\|), \quad \forall k \in K^7.$$

Considérons alors dans TK^7 un orthogonal du sous fibré engendré par v . Ce fibré est par construction isomorphe au fibré $\bar{f}_v^* TS^6$ qui est, d'après le lemme 6, trivial. On en déduit le corollaire.

En définitive, on a donc la donnée d'une variété à bord K^7 plongée dans S^7 . Le bord M^6 de K^7 possède deux classes de cohomologie α, β telles que $M^6 \xrightarrow{(\alpha, \beta)} B\mathbb{T}^2$ détecte l'élément $P_1(X, Y) \in H_2$ et α provient de $H^2(K)$.

Enfin, on a sur K^7 un champ v sans singularités étendant la normale extérieure de M^6 . On a aussi 6 champs $v_i, 1 \leq i \leq 6$, sans singularités. Les champs $v, v_i, 1 \leq i \leq 6$, fournissent une trivialisatation de TK^7 . Les champs $v_i, 1 \leq i \leq 6$, restreints à M^6 , trivialisent TM^6 .

III. Construction d'un modèle pour X_n

On commence par construire une application $\mathbb{Z}/2$ équivariante de $M^6 \times M^6$ vers $B\mathbb{T}^2$, où $\mathbb{Z}/2$ agit par permutation sur chaque facteur. Il est facile de voir que, étant données deux classes de cohomologie dans $H^2(M^6)$, soient u et v , l'application :

$$M^6 \times M^6 \xrightarrow{(u \otimes 1 + 1 \otimes v, 1 \otimes u + v \otimes 1)} B\mathbb{T}^2$$

est $\mathbb{Z}/2$ -équivariante (en utilisant le fait que $B\mathbb{T}^2$ est abélien).

On choisira $u = \beta$, $v = \alpha - \beta$. L'élément détecté par $M^6 \times M^6$, muni de cette application dans $B\mathbb{T}^2$, dans H_2 en degré 12, est :

$$R(X, Y) = (-P_1(X, Y) + XY^2 - Y^3)(P_1(X, Y) + X^2Y - X^3).$$

On voit cela en faisant des calculs de produits de Kronecker analogues à ceux du lemme 5.

On est réduit à savoir quand $(1/2)X^n Y^n R(X, Y)$ provient de $\pi_*^S(BU(2))$.

En effet :

$$R(X, Y) = -7P_1^2(X, Y) + P_1(X, Y)(X^3 - Y^3);$$

donc,

$$\frac{1}{2}X^n Y^n R(X, Y) = -\frac{7}{2}X^n Y^n P_1^2(X, Y) + X^n Y^n \frac{P_1(X, Y)X^3 - P_1(X, Y)Y^3}{2}.$$

Le deuxième terme du membre de gauche provient de $\pi_*^S(BU(2))$. Par la proposition 1, il provient de $X^{n+3} \cdot Y^n \cdot P_1(X, Y) \in H_2$; or, cet élément provient d'un élément de $\pi_*^S(B\mathbb{T}^2)$ obtenu comme produit de Pontryagin (dans $\pi_*^S(B\mathbb{T}^2)$) de l'élément donné par le lemme 5 par l'élément $X^{n+3} \cdot Y^n \in \pi_{4n+6}^S(B\mathbb{T}^2)$.

Il suffit alors de considérer le diagramme (3).

Le lieu des points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/2$ dans $M^6 \times M^6$ est la diagonale $M^6 \overset{\Delta}{\subset} M^6 \times M^6$. Soit V un voisinage tubulaire de la diagonale dans $M^6 \times M^6$.

Comme TM^6 est trivial, on a :

$$V = M^6 \times B^6.$$

La trivialisatation du voisinage tubulaire est obtenue comme suit : la variété $M^6 \times M^6$ a son fibré tangent trivialisé par les champs de vecteurs $p_1^* v_i$ et $p_2^* v_j$, $1 \leq i, j \leq 6$, images inverses des v_i par les projections p_1 et p_2 sur le premier et le second facteur.

La diagonale a son fibré tangent trivialisé par la restriction des champs :

$$v_i^+ = p_1^* v_i + p_2^* v_i, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Son fibré normal est trivialisé par les restrictions des champs :

$$v_i^- = p_1^* v_i - p_2^* v_i, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Ceci fournit la trivialisisation du voisinage tubulaire V .

L'application $M^6 \xrightarrow{\Delta} M^6 \times M^6 \rightarrow B\mathbb{T}^2$ borde à zéro. En effet, elle est égale à :

$$M^6 \xrightarrow{\Delta} BS^1 \xrightarrow{\Delta} B\mathbb{T}^2$$

par construction. Or, d'après la première partie de ce paragraphe, α provient d'une classe $\alpha' \in H^2(K)$; on a donc :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} M^6 & \xrightarrow{\alpha} & BS^1 \\ \cap & & \nearrow \alpha' \\ K^7 & & \end{array}$$

ce qui donne le bordisme cherché.

Remarque. — Ceci explique le choix $u = \beta, v = \alpha - \beta$ fait plus haut.

On peut alors, en utilisant la trivialisisation de ∂V , former :

$$N^{12} = M^6 \times M^6 - \hat{V} \cup_{S^5 \times M^6} S^5 \times K^7.$$

Remarquons d'abord que le groupe $\mathbb{Z}/2$ agit sans points fixes sur N^{12} . En effet, l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $M^6 \times M^6$ réduit sur $\partial V \simeq S^5 \times M^6$ à l'action antipodale sur S^5 .

Considérons la variété :

$$M^{4n+12} = (S^2)^n \times (S^2)^n \times_{\mathbb{Z}/2} N^{12},$$

où $\mathbb{Z}/2$ agit sur N^{12} ainsi qu'il a été dit, et sur le facteur de gauche par permutation des facteurs.

On va montrer qu'il existe une application de cette variété dans $BU(2)$, telle que si cette variété a son fibré tangent stablement trivial, la classe détectée, dans H_2 en degré $4n+12$, est $(1/2) X^n Y^n R(X, Y)$.

La construction de N^{12} nous permet d'étendre l'application :

$$g = (\beta \otimes 1 + 1 \otimes (\alpha - \beta), 1 \otimes \beta + (\alpha - \beta) \otimes 1)$$

de $M^6 \times M^6$ vers $B\mathbb{T}^2$ en une application g' de N^{12} vers $B\mathbb{T}^2$. Plus précisément, formons un bordisme de la manière suivante :

Soit $M^6 \times M^6 \times I \cup B^6 \times K^7, I = [0, 1]$, l'union étant faite le long de $B^6 \times M^6 \times \{1\} = V \times \{1\}$ et de $B^6 \times M^6 \subset B^6 \times K^7$. Modulo un redresse-

ment des angles, on obtient un bordisme de $M^6 \times M^6$ à N^{12} . Par ailleurs, (4) implique aussitôt que l'application g s'étend à tout ce bordisme.

Par ailleurs, l'extension peut être supposée équivariante. Il suffit pour cela de disposer d'une rétraction équivariante de $D^6 \times K^7$ sur $D^6 \times M^6 \cup_{M^6} K^7$. Le groupe $\mathbb{Z}/2$ agissant de manière antipodale sur le facteur D^6 , une telle rétraction est facile à construire.

Il reste à voir que le fibré tangent de ce bordisme peut être trivialisé et on aura montré que :

$$M^6 \times M^6 \xrightarrow{\quad} B\mathbb{T}^2 \quad \text{et} \quad N^{12} \xrightarrow{\quad} B\mathbb{T}^2$$

représentent le même élément de $\pi_{12}^S(B\mathbb{T}^2)$.

Il faut d'abord préciser quelle trivialisations on met sur $T(M^6 \times M^6)$; on choisit celle donnée par les champs $v_i^+, v_j^-, 1 \leq i, j \leq 6$.

Le champ v_i^+ s'étend à tout le bordisme grâce aux constructions du paragraphe II : considéré sur la diagonale il est égal, à un multiple scalaire près, au champ, image directe $\Delta_*(v_i)$, $\Delta : M^6 \rightarrow M^6 \times M^6$ est la diagonale, et on sait que ce champ admet un prolongement à K^7 également noté v_i .

On note encore v_i^+ l'extension obtenue.

Les champs v_i^- servent à trivialisier V , ils s'étendent à tout le bordisme en utilisant les champs coordonnées sur B^6 , soient $\partial/\partial x_i, 1 \leq i \leq 6$. On notera encore v_i^- le champ obtenu.

Enfin, le champ parallèle à la direction I sur $M^6 \times M^6 \times I$ se prolonge grâce au champ v sur K^7 .

On vérifiera que ces champs déterminent en tout point une base de l'espace tangent au bordisme. Par construction, ils donnent la trivialisations de départ sur $M^6 \times M^6$. On a donc le résultat.

Ce qu'on vient d'écrire ne donne *a priori* qu'une trivialisations stable de TN^{12} . On aura besoin d'une trivialisations instable. On va donc en écrire une directement (en fait, elle est équivalente à celle donnée stablement). Rappelons que :

$$N^{12} = M^6 \times M^6 - \dot{V} \cup_{S^5 \times M^6} S^5 \times K^7.$$

Les champs v_i^+ s'étendent de manière analogue à ce qui a été dit plus haut. Il reste à étendre les champs v_i^- . Définissons au point $(\lambda_1, \dots, \lambda_6, k) \in S^5 \times K^7, \sum \lambda_i^2 = 1$, un champ ω_i par :

$$(5) \quad \omega_i = \lambda_i v + \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda_i \left(\sum \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Cette formule n'est autre que la décomposition en un point x de S^{n-1} d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ en sa composante radiale parallèle à x et sa composante tangentielle orthogonale à x :

$$u = ax + \omega, \quad \langle x, \omega \rangle = 0.$$

Mais on remplace x par le champ v du paragraphe I dans la formule.

Il est alors facile de voir que, à un multiple scalaire près, ω_i étend v_i^- . On notera encore v_i^- l'extension obtenue. Les champs v_i^- trivialisent sur $S^5 \times K^7$ le fibré $p^* TS^5 \otimes \mathbb{R} v$ ($p: S^5 \times K \rightarrow S^5$ est la projection). D'où l'on déduit que les champs v_i^+ et v_i^- , $1 \leq i \leq 6$, trivialisent le fibré TN^{12} .

L'involution sur N^{12} , qu'on notera τ , agit sur ces champs par :

$$(6) \quad \begin{cases} \tau(v_i^+) = v_i^+ \\ \tau(v_i^-) = -v_i^- \end{cases}$$

Ceci résulte des définitions.

Notons M^{12} la variété N^{12}/τ . Soit ξ le fibré en droites réelles associé au revêtement à deux feuillets $N^{12} \rightarrow M^{12}$, c'est-à-dire : $N^{12} \times_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{R} \rightarrow M^{12}$ où le générateur de $\mathbb{Z}/2$ agit sur \mathbb{R} par multiplication par -1 . Il résulte de ce que l'on vient de dire que l'on a le :

LEMME 8. — *Le fibré TM^{12} est isomorphe à $6\xi \oplus 6\mathbb{R}$.*

Ceci résulte de (6).

Rappelons qu'on définit la variété M^{4n+12} par :

$$M^{4n+12} = (S^2)^n \times (S^2)^n \times_{\mathbb{Z}/2} N^{12};$$

le groupe $\mathbb{Z}/2$ agissant à gauche par permutation des facteurs.

On peut énoncer le :

THÉORÈME 9. — (i) *Il existe une application $t_n: M^{4n+12}$ vers $BU(2)$ telle que si M^{4n+12} est stablement parallélisable l'élément de $\pi_{4n+12}^S(BU(2))$ ainsi construit s'envoie par k sur :*

$$\frac{1}{2} X^n Y^n R(X, Y) \in K_{4n+12}(BU(2)).$$

(ii) M^{4n+12} est stablement parallélisable dès que $n \equiv 1(4)$.

IV. Preuve du théorème 9

On va commencer par construire l'application t_n . On rappelle que l'on a $g' : N^{12} \rightarrow B\mathbb{T}^2$, $\mathbb{Z}/2$ -équivariante. Soit alors h_n l'application de $(S^2)^n$ vers BS^1 définie par :

$$\underbrace{S^2 \times \dots \times S^2}_{n \text{ fois}} \xrightarrow{x \times \dots \times x} \underbrace{BS^1 \times \dots \times BS^1}_{n \text{ fois}} \xrightarrow{\text{mult}} BS^1,$$

x étant un générateur de $H^2(BS^1)$.

Soit alors l'application :

$$g'_n : N^{4n+12} = (S^2)^n \times (S^2)^n \times N^{12} \rightarrow E\Sigma_2 \times B\mathbb{T}^2,$$

définie comme suit.

Soit :

$$(s, s', n) \in (S^2)^n \times (S^2)^n \times N^{12}, \quad s, s' \in (S^2)^n, \quad n \in N^{12}.$$

L'image de cet élément sur la composante $E\Sigma_2 \cong S^\infty$ est $T(n)$, où on désigne par T une application de N^{12} dans $E\Sigma_2$ classifiant l'involution τ sur N^{12} . Sur la composante $B\mathbb{T}^2$, c'est $h_n(s) \cdot h_n(s') \cdot g'(n)$, le produit étant celui de $B\mathbb{T}^2$. Cette application est $\mathbb{Z}/2$ équivariante (on met sur $E\Sigma_2 \cong S^\infty$ l'action antipodale et on rappelle que $B\mathbb{T}^2$ est abélien). On a donc une application rf_n :

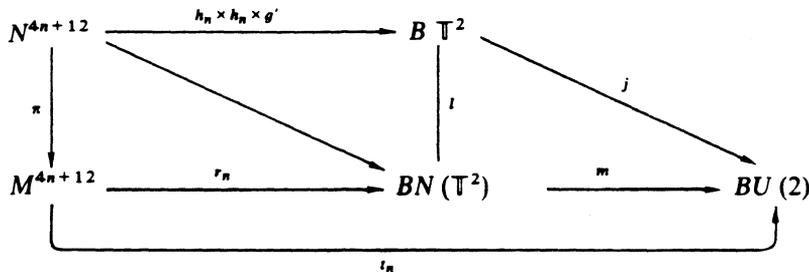
$$M^{4n+12} = (S^2)^n \times (S^2)^n \times_{\mathbb{Z}/2} N^{12} \xrightarrow{r_n} E\Sigma_2 \times_{\mathbb{Z}/2} B\mathbb{T}^2.$$

Mais le terme de droite est isomorphe à $BN(\mathbb{T}^2)$, où $N(\mathbb{T}^2)$ est le normalisateur d'un tore maximal de $U(2)$ [7]. En composant avec

$BN(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{m} BU(2)$ induite par $N(\mathbb{T}^2) \subset U(2)$, on obtient :

$$t_n : M^{4n+12} \rightarrow BU(2).$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :



L'application l est induite par le plongement $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow N(\mathbb{T}^2)$; l'application π est la projection de N^{4n+12} sur $M^{4n+12} \cong N^{4n+12}/\tau$. Mais $\pi_*([N^{4n+12}]) = 2[M^{4n+12}]$ tant en homologie qu'en K -homologie, donc :

$$2.m_*.(r_n)_*([M^{4n+12}]) = m_*.(r_n)_*.\pi_*([N^{4n+12}]);$$

ce qui donne en K -homologie, grâce à la commutativité du diagramme :

$$\begin{aligned} m_*.(r_n)_*([M^{4n+12}]) \\ = \frac{1}{2} X^n Y^n (P_1(X, Y) - XY^2 + Y^3) (P_1(X, Y) + X^2 Y - X^3), \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} m_* . l_* . (h_n \times h_n \times g')_* ([N^{4n+12}]) \\ = X^n Y^n (P_1(X, Y) - XY^2 + Y^3) (P_1(X, Y) + X^2 Y - X^3). \end{aligned}$$

Ceci donne la première partie du théorème.

Pour la seconde partie, on sait que M^{4n+12} est stablement parallélisable si et seulement si $2n\mu + TM^{12}$ est stablement trivial [5], où μ est le fibré en plans réels sur M^{12} défini par :

$$\mathbb{R}^2 \times_{\mathbb{Z}/2} N^{12} \rightarrow M^{12},$$

le groupe $\mathbb{Z}/2$ agissant sur \mathbb{R}^2 via la représentation dans $O(2)$ qui, au

générateur, associe la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le fibré μ se scinde en la somme du fibré ξ et d'un fibré trivial de dimension 1. On est donc réduit, grâce au lemme 7 à savoir quand $(2n+6)\xi$ est trivial.

On a le :

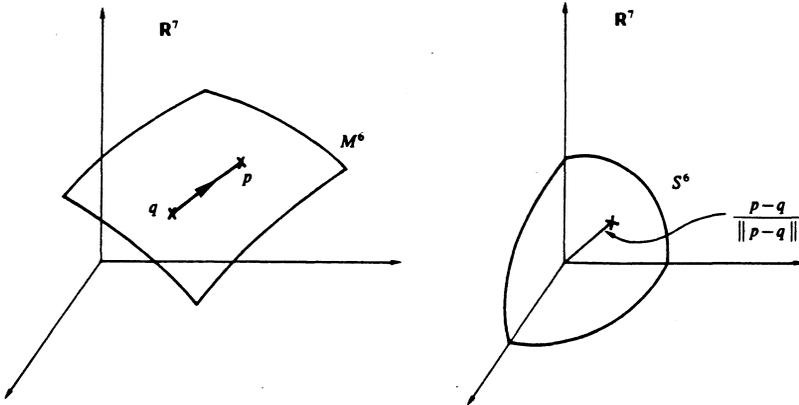
LEMME 10. — *Le fibré en droites réelles ξ sur N^{12} est classifié par une application de N^{12} dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^6$.*

Le lemme donne la fin du théorème 8 car $\widetilde{KO}(\mathbb{R}\mathbb{P}^6) \cong \mathbb{Z}/8$, et donc M^{4n+12} est stablement parallélisable dès que $8 \mid 2n+6$, soit $n \equiv 1(4)$.

Preuve du lemme. — Il nous faut montrer que l'application $T: N^{12} \rightarrow S^\infty$, commutant à l'involution τ sur M^{12} et à l'application antipodale sur S^∞ peut être prise à valeurs dans S^6 . Pour cela, on utilisera une construction due à Haefliger.

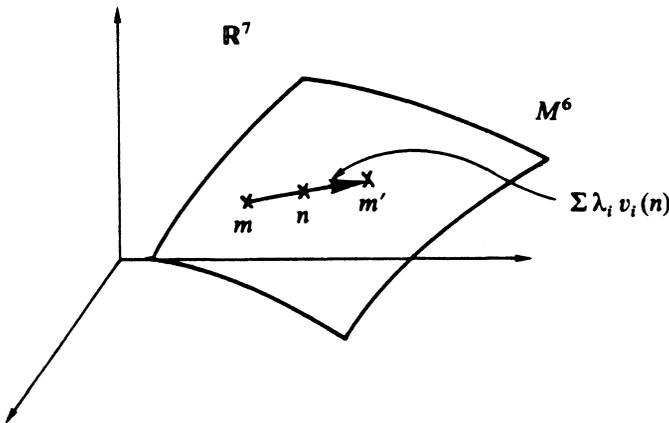
La variété M^6 initiale nous est donnée avec un plongement dans $\mathbb{R}^7 \subset S^7$; plus précisément, on a un plongement de K^7 , avec $\partial K^7 = M^6$, dans \mathbb{R}^7 .

Alors, à deux points distincts p et q de M^6 , considérés comme points dans \mathbb{R}^7 , on peut associer l'élément $p-q/\|p-q\|$ de S^6 .



Ceci nous fournit une application $T : M^6 \times M^6 - \dot{V} \rightarrow S^6$ satisfaisant aux propriétés requises. Il faut l'étendre maintenant à N^{12} . Pour cela, examinons T sur $\partial V = S^5 \times M^6$. L'application T y est décrite comme suit : soient $(m, m') \in \partial V$; la trivialisaton du voisinage tubulaire de la diagonale nous permet d'écrire (m, m') sous la forme :

$$(n, \sum_1^6 \lambda_i v_i^-) \quad \text{avec} \quad \sum |\lambda_i|^2 = 1.$$



Alors, T est donnée par : $(n, \sum_1^6 \lambda_i v_i^-) \rightarrow \sum_1^6 \lambda_i v_i (n) \in S^6 \subset \mathbb{R}^7$; les champs v_i étant ceux du II pris au point n (on peut les supposer orthonormaux en tout point).

Mais, comme c'est K^7 qui est plongé dans $\mathbb{R}^7 = S^7 - \{pt\}$ et que les champs v_i sont définis sur tout K^7 , la formule précédente se prolonge comme suit sur $S^5 \times K^7$:

$$T: S^5 \times K^7 \rightarrow S^6 \subset \mathbb{R}^7,$$

$$(\lambda_i, \sum \lambda_i^2 = 1, k) \rightarrow \sum \lambda_i v_i^-(k).$$

Donc, on a étendu T en une application $\mathbb{Z}/2$ -équivariante de tout N^{12} vers S^6 . D'où le lemme.

V. Remarques

K. FELALI a montré dans [4] que $X_1 \in HS^2$ provient de $\pi_{16}^S(BU(2))$ par des calculs de différentielles dans la suite spectrale de Atiyah-Hirzebruch.

Le cas des éléments X_n pour $n \neq 1(4)$, $n > 0$, n'est pas tranché. Évidemment, $2X_n$ provient de $\pi_{*}^S(BU(2))$.

On peut conjecturer par contre que, si $P(X, Y) \in HS_2$ provient de $\pi_{*}^S(BU(2))$ et si $P(X, Y)$ ne comporte pas, dans sa décomposition au sens de [10], de termes $(1/2) X^n Y^n P_1(X, Y)$, alors pour tout h assez grand $X^h Y^h P(X, Y) \in HS_2$ provient d'un élément de $\pi_{*}^S(BU(2))$ qui provient lui-même de $\pi_{*}^S(B\mathbb{T}^2)$.

D'autres éléments [10] peuvent être également intéressants à étudier.

Un travail analogue peut être fait pour $B\mathbb{T}^p$ et $BU(p)$, p premier distinct de 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADAMS (J. F.), Stable homotopy and generalized homology, Chicago, part II.
- [2] BAKER (A.), CLARKE (F.), RAY (N.) et SCHWARTZ (L.), (en préparation).
- [3] CLARKE (F.), Self-maps of BU, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 89, 1981, p. 491-506.
- [4] FELALI (K. S.), Intersection points of immersed manifolds, Ph. D. Thesis, Manchester, 1982.
- [5] JONES (J. D.), The Kervaire invariant of extended power manifolds, *Topology*, vol. 17, 1978, p. 249-266.

- [6] KNAPP (K. H.), Some applications of K -theory to framed bordism. E -invariant and transfert, Habilitationsschrift Bonn, 1979.
- [7] MADSEN (I.) et MILGRAM (J.), The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, chap. 3, *Annals of Math. Studies*, Princeton, n° 92, 1979.
- [8] MASSEY (W. S.), Imbeddings of projectives planes and related manifolds in spheres, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 23, n° 9, 1974, p. 791-812.
- [9] SCHWARTZ (L.), Opérations d'Adams en K -homologie et applications, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 109, 1981, p. 237-257.
- [10] SCHWARTZ (L.), Polynômes numériques et homotopie stable (en préparation).