BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE MŒGLIN
RUDOLF RENTSCHLER

Sur la classification des idéaux primitifs des algèbres enveloppantes

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 3-40
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__3_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 3-40.

SUR LA CLASSIFICATION DES IDÉAUX PRIMITIFS DES ALGÈBRES ENVELOPPANTES

PAR

C. MOEGLIN ET R. RENTSCHLER (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un C-groupe algébrique affine connexe et $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\ G$.

THÉORÈME : *Soient* $\mathfrak{t}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, I *et* Q *des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *et* $U(\mathfrak{t})$ *tels que* $I\cap U(\mathfrak{t})=\bigcap_{\gamma\in G}\gamma Q$ *et* H *le stabilisateur de* Q *dans* G. *Alors tous les idéaux primitifs* J *de* $U(\mathrm{Lie}\ H)$ *avec* $J\cap U(t)=Q$ *et* $\mathrm{Ind}(J, (\mathrm{Lie}\ H)\uparrow\mathfrak{g})=I$ *sont conjugués sous* H.

COROLLAIRE. — *La « classification » surjective de* DUFLO $(f, \xi)\rightarrow I_{f,\ \xi}$ *des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ (Acta Math., 1982) *à l'aide des formes* f *de type unipotent sur* $\mathfrak{g}$ *et de certains idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g}(f))$ *est injective modulo G-cojugaison.*

On montre le théorème dans un cadre un peu plus général et on donne dans le dernier paragraphe une réciproque partielle de l'application de DUFLO.

ABSTRACT. — Let G be an affine algebraic connected C-group and let $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\ G$..

THEOREM. — *Let* $\mathfrak{t}$ *be an ideal of* $\mathfrak{g}$ *and let* I *and* Q *be primitive ideals of* $U(\mathfrak{g})$ *and* $U(\mathfrak{t})$ *such that* $I\cap U(\mathfrak{t})=\bigcap_{\gamma\in G}\gamma Q$. *Let* H *be the stabiliser of* Q *in* G. *Then all primitive ideals* J *of* $U(\mathrm{Lie}\ H)$ *with* $J\cap U(\mathfrak{t})=Q$ *and* $\mathrm{Ind}(J, (\mathrm{Lie}\ H)\uparrow\mathfrak{g})=I$ *are conjugate under the action of* H.

CORROLARY. — *The surjective "classification"* $(f, \xi)\rightarrow I_{f,\ \xi}$ *of the primitive ideals of* $U(\mathfrak{g})$ *given by* DUFLO (Acta Math., 1982) *using linear forms* f *of unipotent type on* $\mathfrak{g}$ *and certain primitive ideals* ξ *of* $U(\mathfrak{g}(f))$ *is injective modulo conjugation by elements of* G.

The Theorem is proved in a slightly more general framework and in the last paragraph we construct a partial inverse of DUFLO's classification map.

(*) Texte reçu le 21 mars 1983.

C. MOEGLIN, Université Pierre-et-Marie-Curie, L.M.F., Aile 45-46, 3e étage, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

R. RENTSCHLER, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay.

Introduction

Dans cet article on démontre une conjecture de DUFLO sur la construction des idéaux primitifs des algèbres enveloppantes que nous allons énoncer après avoir rappelé les résultats la suscitant [3].

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique définie sur un corps k, algébriquement clos de caractéristique 0 et I un idéal primitif, alors DUFLO montre que l'on peut obtenir I à partir de la donnée d'une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ de type fortement unipotent et d'un idéal primitif ξ de l'algèbre enveloppante de la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ stabilisant f.

Duflo a conjecturé que l'orbite du couple (f, ξ) sous l'action du groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{g}$ est uniquement déterminée par l'idéal primitif I. Nous démontrons cela après avoir amélioré [5], 4.7 par le théorème suivant :

(*le corps de base noté k est supposé algébriquement clos, de caractéristique* 0 *et l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$ *est notée* $U(\mathfrak{a})$).

THÉORÈME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, G le groupe algébrique adjoint de* $\mathfrak{g}$, *définis sur k, et* $\mathfrak{t}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$; *soit I un idéal primitif de* $U(\mathfrak{g})$ *dont on note P l'intersection avec* $U(\mathfrak{t})$; *alors il existe une unique G-orbite, notée* Ω, *dans l'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{t})$, *vérifiant :*

soit $Q \in \Omega$, *alors on a :*

$$\bigcap_{\gamma \in G} \gamma Q = P.$$

On fixe un élément Q de Ω; *on note H le sous-groupe de G stabilisant Q et* $\mathfrak{h}$ *l'algèbre de Lie de H; alors il existe une unique H-orbite, notée* Ω', *dans l'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{h})$, *vérifiant :*

soit $\mathscr{I} \in \Omega'$, *alors on a :*

$$\mathscr{I} \cap U(\mathfrak{t}) = P,$$

$$\bigcap_{\gamma \in G} \gamma(U(\mathfrak{g})\mathscr{I}) = I \qquad (\text{i. e. } \operatorname{ind}(\mathscr{I}, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}) = I).$$

Grâce à [5], 4.7, il nous suffit de démontrer l'unicité de l'orbite Ω', unicité qui résulte du résultat plus général que nous allons énoncer après avoir introduit quelques notations :

Soient G un groupe algébrique irréductible, U une k-algèbre unitaire de type fini et V un U-module à droite. Soit α (resp. β) un homomorphisme du groupe G dans le groupe $\mathrm{End}_{k-\mathrm{alg}}\, U$ (resp. $\mathrm{End}_k\, V$) et on suppose que l'on a les propriétés suivantes :

• l'action de G dans U (resp. V) est rationnelle (i. e. U (resp. V) est un G-espace vectoriel réunion de sous-G-modules rationnels de dimensions finies).

• $U \otimes k'$ est noethérienne à gauche et à droite pour toutes extensions de corps k' du corps k.

• *α et β sont compatibles au sens suivant :*

$\forall u \in U$, $v \in V$, $\gamma \in G$, on a :

$$\beta(\gamma)(vu) = \beta(\gamma)\, v\, (\alpha(\gamma)\, u).$$

Soit Q un idéal rationnel de U (i. e. Q est un idéal premier de U et le centre de l'anneau des quotients de U/Q est réduit à k). On pose :

$$H = \{ \gamma \in G \mid \alpha(\gamma)\, Q = Q \},$$
$$P = \bigcap\nolimits_{\gamma \in G} \alpha(\gamma)\, Q,$$

et on note S l'ensemble des éléments de U/P non diviseurs de 0.

Soit N un sous-U-module de V contenant VP; on dit que N vérifie la condition (C) si quel que soit $s \in S$, on a :

$$N/VP = \{ v \in V/VP \mid \forall \gamma \in G,\ v(\alpha(\gamma)\, s) \in N/VP \}.$$

Le résultat principal de ce travail est d'établir la bijection suivante :

PROPOSITION. — *En plus des hypothèses et notations ci-dessus, on suppose que l'on a :*

$$\bigcap\nolimits_{\gamma \in G} \beta(\gamma)\, VQ = P.$$

Alors, soit M un sous-module de V; on suppose que M vérifie les propriétés (H_1) :

$$(H_1) \quad \begin{cases} M \text{ est } H\text{-stable;} \\ M \text{ contient } VQ; \\ M \text{ vérifie } (C); \\ V/M \text{ est un } V/Q\text{-module fidèle.} \end{cases}$$

On note $\Psi(M)$ le plus grand sous-V-module de M stable par G et alors $\Psi(M) =: \mathcal{M}$ vérifie les propriétés (H_2).

$$(H_2)\quad \begin{cases} \mathcal{M} \text{ est stable par } G; \\ \mathcal{M} \text{ contient } VP; \\ \mathcal{M} \text{ vérifie } (C); \\ V/\mathcal{M} \text{ est un } U/P\text{-module fidèle.} \end{cases}$$

Et réciproquement, soit $\mathcal{M}$ un sous-U-module de V qui vérifie les propriétés (H_2); on note $\Phi(\mathcal{M})$ le sous-U-module de V, tel que :

$$\Phi(\mathcal{M}) \supset VP;$$

$$\Phi(\mathcal{M})/VP = \{ v \in V/VP \mid \exists\, s \in S \mid \forall\, \gamma \in G,\ v(\alpha(\gamma)s) \in (\mathcal{M}VQ)/VP \}.$$

Alors le sous-U-module $\Phi(\mathcal{M})$ vérifie les propriétés (H_1) et l'on a :

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id} = \Psi \circ \Phi.$$

Au chapitre 4, on construit une application réciproque à celle de Duflo [3], IV et on donne quelques propriétés de l'ensemble des idéaux primitifs d'une algèbre enveloppante.

1.

1.1. Dans ce chapitre, nous allons démontrer la proposition énoncée à la fin de l'introduction dont on adopte les notations, c'est-à-dire G, U, V, α, β, Q, H, P, S. On remarque que l'on peut supposer que l'on a $P=0$ en remplaçant éventuellement V par V/VP et U par U/P; c'est ce que nous ferons et S est donc un sous-ensemble multiplicatif oréen de U. On note $K(G)$ (resp. $K(G/H)$) le corps, ensemble des fonctions rationnelles de G (resp. G/H), d la représentation régulière droite de G dans $K(G)$ et l la représentation régulière gauche de G dans $K(G)$ et $K(G/H)$. On identifie $K(G/H)$ au sous-corps de $K(G)$ ensemble des éléments invariants par $d(H)$. On muni $U \otimes K(G)$ de la structure de $K(G)$-algèbre prolongeant naturellement celle de k-algèbre de $U \otimes 1$ (identifiée à U) et $V \otimes K(G)$ de la structure de $U \otimes K(G)$-module à droite prolongeant naturellement celle de U-module à droite de $V \otimes 1$ (identifié à V).

1.2. Soit W un k-espace vectoriel sur lequel le groupe G agit de façon rationnelle. (On note ρ le morphisme de G dans $\mathrm{End}_k W$.) Alors, il existe un endomorphisme de $K(G)$-espace vectoriel noté μ_W de $W \otimes K(G)$ défini par la relation suivante :

$$\mu_W\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes f_i\right) = \sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes f'_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (\rho(\gamma) w_i)\, f_i(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} w'_j\, f'_j(\gamma),$$

quel que soit l'élément γ de G où les fonctions $f_1 \ldots f'_m$ sont définies.

On fait d'abord $W=U$; comme $\alpha(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{End}_{k-\mathrm{alg}} U$, on voit que μ_U est un endomorphisme de $K(G)$-algèbres; puis on fait $W=V$; quels que soient u dans $U\otimes K(G)$ et v dans $V\otimes K(G)$ on a :

$$\mu_V(v)\,\mu_U(u)=\mu_V(vu).$$

Remarquons tout de suite, pour pouvoir l'utiliser au paragraphe 1.4, que μ_W coïncide avec l'action du point générique μ de $G(K(G))$ défini en [5], 2.2, cela se voit par spécialisation.

1.3. LEMME. — *Soient W, ρ, μ_W comme en 1.2; on identifie W à $W\otimes 1$ dans $W\otimes K(G)$ et on a :*

(i) *Le $K(G)$-morphisme μ_W est un $K(G)$-isomorphisme.*

(ii) *Soit $\gamma\in G$, alors on a :*

(ii)$_1$ $\mu_W(\rho(\gamma)\otimes d(\gamma))=\mathrm{Id}\otimes d(\gamma)$,

(ii)$_2$ $\mu_W(\mathrm{Id}\otimes l(\gamma))=\rho(\gamma)\otimes l(\gamma)$.

(iii) *Soit $\mathcal{N}$ un sous-k-espace vectoriel de W, stable par G, alors, on a :*

$$\mu_W(\mathcal{N}\otimes K(G))=\mathcal{N}\otimes K(G).$$

(iv) *Soit N un sous-k-espace vectoriel de W; on pose :*

$$\mathcal{N}=\textstyle\bigcap_{\gamma\in G}\rho(\gamma)N,$$

et on a :

$$\mu_W(N\otimes K(G))\cap W=\mathcal{N}.$$

(v) *Soit N un sous-k-espace vectoriel, H-stable, de W, alors on pose :*

$$N_{\mu 1}=\mu_W(N\otimes K(G))\cap(W\otimes K(G/H))$$

et en tant que $K(G)$-espace vectoriel, $\mu_W(N\otimes K(G))$ est engendré par $N_{\mu 1}$.

(i) Comme l'action de G dans W est supposée rationnelle, il existe un $K(G)$-endomorphisme, noté μ'_W, de $W\otimes K(G)$, caractérisé par la relation :

$$\mu'_W\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i\otimes f_i\right)=\textstyle\sum_{j=1}^{m} w'_j\otimes f'_j \iff \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\rho(\gamma^{-1})w_i)\,f_i(\gamma)=\textstyle\sum_{j=1}^{m} w'_j\,f'_j(\gamma),$$

quel que soit l'élément γ de G où les fonctions $f_1\ldots f'_m$ sont définies.

Et on vérifie facilement que l'on a :

$$\mu_W\,\mu'_W=\mu'_W\,\mu_W=\mathrm{Id}.$$

(ii) Soient $w \in W$ et $\gamma \in G$; on écrit $\mu_W(w)$ sous la forme :

$$\mu_W(w) = \sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes f'_j;$$

il est clair que les fonctions $f'_1, \ldots, f'_m$ sont partout définies; soit : γ' un élément de G et on a :

$$\sum_{j=1}^{m} w'_j \otimes d(\gamma) f'_j = (\mathrm{Id} \otimes d(\gamma)) \, \mu_W(w) \in W \otimes K(G),$$
$$\sum_{j=1}^{m} w'_j f'_j(\gamma' \gamma) = \rho(\gamma' \gamma) w = \rho(\gamma') \rho(\gamma) w,$$

c'est-à-dire :

$$\mu_W(\rho(\gamma) w) = (\mathrm{Id} \otimes d(\gamma)) \, \mu_W(w).$$

Et $(\mathrm{ii})_1$ se déduit de cette égalité par $K(G)$-linéarité.

La démonstration de $(\mathrm{ii})_2$ est analogue.

(iii) est connu.

(iv) On pose momentanément :

$$\mathcal{N}' = \mu_W(N \otimes K(G)) \cap W.$$

Grâce à $(\mathrm{ii})_2$, on voit que $\mathcal{N}'$ est stable pour l'action de G; on utilise alors (iii) et (i) qui donnent l'égalité suivante :

$$\mu_W^{-1}(\mathcal{N} \otimes K(G)) = \mathcal{N}' \otimes K(G).$$

L'inclusion de $\mathcal{N}' \otimes K(G)$ dans $N \otimes K(G)$ en résulte, c'est-à-dire :

$$\mathcal{N}' \subset N$$

et puisque $\mathcal{N}'$ est G-stable, on a même :

$$\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}.$$

L'inclusion de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}'$ est une conséquence immédiate de (iii), ce qui termine la démonstration de (iv).

(v) Par hypothèse, le sous-$K(G)$-espace vectoriel $N \otimes K(G)$ de $W \otimes K(G)$ est stable pour l'action de H définie par $\rho \otimes d$; grâce à $(\mathrm{ii})_1$, on voit que le sous-$K(G)$-espace vectoriel $\mu_W(N \otimes K(G))$ est stable pour l'action de H définie par $\mathrm{Id} \otimes d$ et (v) résulte alors de [1], 4.5.7.

1.4. Rappelons que nous avons établi en [5], 2.10, l'existence d'un isomorphisme de corps, noté ici φ, entre le cœur, noté C, de U (i.e. le centre de l'anneau des quotients de U) et le corps $K(G/H)$, caractérisé par la propriété suivante (*cf.* [5], 2.5 (ii) et (iii)) : on pose :

$$Q_\mu = \mu(Q \otimes K(G))$$

et alors Q_μ est engendré par l'ensemble des éléments $sc \otimes 1 - s \otimes \varphi(c)$, où c appartient à C, s appartient à S et sc appartient à U. Suivant 13(v), on pose :

$$VQ_{\mu\,1} = \mu(VQ \otimes K(G)) \cap (V \otimes K(G/H)).$$

1.5. Lemme. — (i) *Soit $\mathcal{N}$ un sous-U-module de V et on suppose que $\mathcal{N}$ est stable sous l'action de G; soient v un élément de V et s un élément de S tels que l'on ait :*

$$Vs \in \mathcal{N}.$$

Alors il existe un élément s' de S avec la propriété suivante :

$$\forall\, \gamma \in G, \quad v(\alpha(\gamma)s') \in \mathcal{N}.$$

(ii) *Soient N un sous-U-module de V, et n (resp. s) un élément de V (resp. S); alors on a l'équivalence suivante :*

$$n\mu_V^{-1}(s) \in N \otimes K(G) \iff \forall\, \gamma \in G, \quad n(\alpha(\gamma^{-1})s) \in N.$$

(i) Soit E le sous-k-espace vectoriel de V engendré par l'ensemble des éléments $\beta(\gamma)v$ où γ appartient à G; alors E est nécessairement de dimension finie. Comme $\mathcal{N}$ est stable sous l'action de G, pour un ensemble de générateurs e de E, il existe un élément x de S dépendant de e et vérifiant :

$$ex \in \mathcal{N}.$$

La propriété de Ore permet alors de choisir un élément s' de S qui vérifie :

$$Es' \subset \mathcal{N}.$$

On a donc :

$$\forall\, \gamma \in G, \quad (\beta(\gamma)v)s' \in \mathcal{N},$$

d'où l'assertion (i) du lemme :

$$\forall \gamma \in G, \quad v((\alpha(\gamma^{-1}))s') \in \mathcal{N}.$$

(ii) Soient n, s des éléments de U et S respectivement; si on suppose que pour presque tout élément γ de G, l'élément $n(\alpha(\gamma^{-1})s)$ de U est dans N alors on a aussi cette propriété pour tout élément γ de G; l'assertion de (ii) est alors immédiate par spécialisation.

1.6. Lemme. — *Soient N et $\mathscr{L}$ des sous-U-modules de V; on suppose que N (resp. $\mathscr{L}$) est stable pour l'action de H (resp. G) et que N contient VQ. On pose :*

$$N' = \{ v \in V \mid \exists\ s \in S \mid v(\alpha(\gamma)s) \in N,\ \forall\, \gamma \in G \},$$
$$\mathscr{L}' = \{ v \in V \mid \exists\ s \in S \mid v(\alpha(\gamma)s) \in \mathscr{L},\ \forall\, \gamma \in G \}.$$

Il est clair que N' est un sous-U-module de V stable par H et contenant VQ. On adopte les notations $(VQ)_{\mu 1}$ (cf. 1.4), $N_{\mu 1}$ (cf. 1.3(v)), $\mathscr{N}$ (cf. 13(iv)) et *$N'_{\mu 1}$, $\mathscr{N}'$ (analogues obtenus en remplaçant N par N').*

On pose :

$$X = \{ v \in V \otimes K(G/H) \mid \exists\ s \in S,\ vs \in \mathscr{L} + (VQ)_{\mu 1} \}.$$

(i) *On considère le cas où $\mathscr{L} = \mathscr{N}$ et on a alors :*

$$N_{\mu 1} \subset X = N'_{\mu 1}.$$

(ii) *On suppose, en outre, que l'on a :*

$$\bigcap\nolimits_{\gamma \in G} \beta(\gamma)\, VQ = 0.$$

et on a alors :

$\mathscr{L}'$ est le plus grand sous-U-module de V stable sous l'action de G est inclus dans $\mu_V^{-1}(XK(G))$.

(i) Soit $XK(G)$ le sous-$K(G)$-espace vectoriel engendré par X dans $V \otimes K(G)$. Soit $\gamma \in G$; d'après [5], 2.8, on a :

$$(\beta(\gamma) \otimes l(\gamma))\, (VQ)_\mu = (VQ)_\mu.$$

Il est clair que l'on a aussi

$$(\beta(\gamma) \otimes l(\gamma))\, S = S,$$
$$(\beta(\gamma) \otimes l(\gamma))\, (\mathscr{N} \otimes K(G)) = \mathscr{N} \otimes K(G),$$

ce qui montre que l'action de G dans $V \otimes K(G)$ définie par $\beta \otimes l$ laisse stable $XK(G)$. De 1.3 $(ii)_2$, on en déduit que le sous-$K(G)$-espace vectoriel $\mu_V^{-1}(XK(G))$ de $V \otimes K(G)$ est stable pour l'action de G définie par $\mathrm{Id} \otimes l$.

D'après [1], 4.5.7 cela entraîne l'existence d'un sous-k-espace vectoriel, noté N'' pour le moment, de V vérifiant la caractéristique suivante :

$$N'' \otimes K(G)=\mu_V^{-1}(XK(G)).$$

Il est facile de vérifier qu'en fait N'' est un sous-U-module de V qu'il contient VQ. En outre $XK(G)$ est stable pour l'action de H définie par $\mathrm{Id} \otimes d$; de 1.3 (ii)$_1$, on déduit que N'' en tant que sous-k-espace vectoriel de $V \otimes K(G)$ est stable pour l'action de H définie par $\beta \otimes d$ ce qui est équivalent au fait que N'' est stable par l'action de H définie par β. On adopte la notation $N''_{\mu 1}$ de 1.3(iv) et on a donc :

$$N''_{\mu 1}=X.$$

Pour terminer la démonstration de (i), il ne nous reste plus qu'à démontrer l'égalité de N' et de N''. Soit donc $n'' \in N''$; alors la propriété de Ore de S et la définition de X, montrent qu'il existe $s \in S$ vérifiant :

$$\mu_V(n'')s \in (\mathcal{N}(VQ)_{\mu 1})K(G) \subset \mu_V(N \otimes K(G)).$$

En appliquant μ_V^{-1} et le lemme 1.5(ii), on obtient l'inclusion de N'' dans N'.

Réciproquement, soient $n' \in N'$ et $s \in S$ et on suppose que l'on a :

$$\forall \gamma \in G, \quad n' \alpha(\gamma^{-1})s \in N.$$

D'après le lemme 1.5(ii), cela équivaut à :

$$n' \mu_U^{-1}(s) \in N \otimes K(G),$$

et à :

$$\mu_V(n')s \in N_\mu.$$

Cela montre que l'inclusion de N' dans N'' est équivalente à l'inclusion de N_μ dans $XK(G)=N''_\mu$, c'est-à-dire aussi (grâce à 1.3(v)) à celle de $N_{\mu 1}$ dans X, inclusion que nous allons maintenant démontrer.

Soit $x := \sum_{i=1}^n u_i \otimes f_i$ un élément de $N_{\mu 1}$. On utilise la propriété de Ore de S pour fixer un élément s de S tel que l'on ait :

(φ a été défini en 1.4) :

$$s\varphi^{-1}(f_i) \in U \qquad \text{pour} \quad i=1, \ldots, n.$$

Et on a l'égalité suivante :

$$(*) \qquad xs=\sum_{i=1}^n u_i(s \otimes f_i - s\varphi^{-1}(f_i) \otimes 1)+\sum_{i=1}^n u_i s\varphi^{-1}(f_i) \otimes 1.$$

D'après 1.4, elle montre que l'on a :

$$xs \in (VQ)_{\mu 1} + V.$$

Or, il est clair que $N_{\mu 1}$ est un $U \otimes K(G/H)$-module à droite, l'élément xs de $V \otimes K(G/H)$ appartient donc à $N_{\mu 1}$ et que $N_{\mu 1}$ contient $(VQ)_{\mu 1}$. Par suite, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s\varphi^{-1}(f_i)) \otimes 1 \in N_{\mu 1} \cap V.$$

En tenant compte de 1.3(iv), (i.e. l'inclusion de $N_{\mu 1} \cap V$ dans $\mathcal{N}$) et en revenant à (*), on constate l'assertion annoncée :

$$N_{\mu 1} \subset X$$

et termine la démonstration de (i).

(ii) On note $\mathscr{X}$ le plus grand sous-U-module de V inclus dans $\mu_V^{-1}(XK(G))$ et stable sous l'action de G. D'après 1.3(iv), on a :

$$\mathscr{X} = XK(G) \cap V = X \cap V.$$

D'après la définition de X cela veut dire que l'on a :

$$\mathscr{X} = \{ v \in V \mid \exists\, s \in S,\ vs \in \mathscr{L} + (VQ)_{\mu 1} \}.$$

Or, d'après 1.3(iv) et l'hypothèse du lemme, on a :

$$V \cap (VQ)_{\mu 1} \subset V \cap VQ_{\mu} = \bigcap_{\gamma \in G} \beta(\gamma)\, VQ = 0.$$

L'inclusion de $\mathscr{L}$ dans V, montre alors que l'on a :

$$\mathscr{X} = \{ v \in V \mid \exists\, s \in S,\ vs \in \mathscr{L} \},$$

Et le lemme 5 permet alors d'établir l'égalité de $\mathscr{X}$ et de $\mathscr{L}'$.

1.7. LEMME. — *On suppose que l'on a* $\bigcap_{\gamma \in G} \beta(\gamma)\, VQ = 0$. *Soit M un sous-U-module de V; on suppose que M vérifie les hypothèses (H_1) de l'introduction et on note $\Psi(M)$ le plus grand sous-U-module de M stable par G* (i.e. $\Psi(M) = \mathscr{M}$ *dans les notations de* 1.3(iv)); *on a alors :*

(i) *$V/\Psi(M)$ est un U-module fidèle.*

(ii) *$\Psi(M)$ vérifie (C).*

(i) Soit F l'idéal de U tel que $V/\Psi(M)$ soit un U/F-module fidèle; il est clair que F est inclus dans Q et que F est stable sous l'action de G; on a donc F égal 0, c'est-à-dire (i).

(ii) Reprenons les notations du lemme 1.6, M', $\mathscr{M}=\Psi(M)$ et $\mathscr{M}'$. Puisqu'on a supposé que M vérifie (C), l'égalité de M et M' est claire; elle entraîne l'égalité de $\mathscr{M}$ et de $\mathscr{M}'$ d'après 1.6(ii), ce qui est équivalent à l'assertion de (ii) : $\mathscr{M}=\Psi(M)$ vérifie (C).

1.8. LEMME. — *On suppose que l'on a* $\bigcap_{\gamma\in G}\beta(\gamma)VQ=0$. *Soit* $\mathscr{L}$ *un sous-U-module de V; on suppose que* $\mathscr{L}$ *vérifie les hypothèses* (H_2) *de l'introduction et on définit* $\Phi(\mathscr{L})$ *comme dans l'introduction, c'est-à-dire (avec les notations du lemme* 1.6) :

$$\Phi(\mathscr{L})=(\mathscr{L}+VQ)'.$$

Alors, on a :

(i) $V/\Phi(\mathscr{L})$ *est un* U/Q*-module fidèle;*

(ii) $\Phi(\mathscr{L})$ *vérifie* (C).

(i) Soit F l'idéal de U tel que $V/\Phi(\mathscr{L})$ soit un U/F-module fidèle, on pose :

$$\mathscr{F}=\bigcap_{\gamma\in G}\alpha(\gamma)F.$$

Par définition, on a :

$$VF\subset(\mathscr{L}+VQ)',$$

ce qui d'après le lemme 1.6(ii) et avec ses notations, entraîne l'inclusion suivante :

$$V\mathscr{F}\subset\mathscr{L}'.$$

Puisque nous avons supposé que $\mathscr{L}$ vérifie (C), il est clair que $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{L}$ sont égaux; comme $V/\mathscr{L}$ est un U-module fidèle par hypothèse, nous venons de prouver la nullité de $\mathscr{F}$. Il est clair que F contient Q et l'égalité de F et de Q résulte alors de [5], 2.12, d'où (i).

(ii) est évident d'après la définition de $\Phi(\mathscr{L})$.

1.9. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION DE L'INTRODUCTION

Grâce aux lemmes 1.7 et 1.8, il ne nous reste plus qu'à vérifier les égalités :

$$\Phi\circ\Psi=\Psi\circ\Phi=\mathrm{Id}.$$

Soit $\mathscr{L}$ un sous-U-module de V; on suppose que $\mathscr{L}$ vérifie les hypothèses (H_2) de l'introduction et on a défini X comme au lemme 1.6; alors, d'après 1.3(v), puis 1.3(iv) et 1.4, on a :

$$\Phi(\mathscr{L})=\mu^{-1}(X_{\mu 1}K(G)).$$

Le lemme 1.6(ii) montre alors que la restriction de Φ aux sous-U-modules de V qui satisfont aux hypothèses (H_2) vérifie $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$. De même le lemme 1.6(i) et 1.3(v) montre que la restriction de Ψ aux sous-U-modules de V qui satisfont aux hypothèses (H_1) de l'introduction, vérifie $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$.

1.10. Remarque. — *On suppose qu'il existe un sous-groupe unipotent N de H avec la propriété suivante :*

l'ensemble des éléments N-invariants de U/Q est réduit au corps k.

(i) *Alors un sous-U-module M de V vérifie les hypothèses (H_1) l'introduction si et seulement si M est H-invariant, M contient VQ et M est différent de V.*

(ii) *En outre, l'application Φ prend la forme suivante :*

soit $\mathcal{M}$ un sous-U-module de V qui vérifie les hypothèses (H_2) de l'introduction, alors $\Phi(\mathcal{M})$ vaut $\mathcal{M}+VQ$.

Sans restreindre la généralité, on suppose que l'on a $\bigcap_{\gamma \in G} \alpha(\gamma) Q = 0$ et on rappelle que puisque N est un groupe unipotent agissant rationnellement dans V/M et dans U/Q, on a :

$(*)$ tout sous-k-espace vectoriel non nul et N-invariant de V/M ou de U/Q contient un élément N-invariant non nul. En particulier l'idéal Q de U est maximal.

(i) Il est clair que pour démontrer (i), il suffit de prouver qu'un sous-U-module M de V qui est H-invariant, qui contient VQ et est différent de V, vérifie aussi :

V/M est un U/Q module fidèle (ce qui résulte immédiatement de $(*)$).

M vérifie la condition (C) (ce que nous allons maintenant démontrer).

On pose :

$$M' = \{ v \in V \mid \exists\ s \in S,\ v\alpha(\gamma)s \in M,\ \forall \gamma \in G \},$$

c'est un sous-U-module, H-invariant de V. On suppose, tout d'abord, que le quotient M'/M est non nul et on fixe un élément m' de $M'-M$ dont l'image dans M'/M est un élément N-invariant (*cf.* $(*)$). On pose :

$$E = \{ u \in U \mid m' u \in M \}.$$

Il est clair que E est un sous-k-espace vectoriel, N-invariant de U, et que E contient Q; en outre, par définition de M', l'inclusion de Q dans E

est stricte. Alors $(*)$ et l'hypothèse $(U/Q)^N=k$ montre que l'on a :

$$E \supset k+Q.$$

On déduit de cela que m' est un élément de M, ce qui est la contradiction cherchée.

(ii) Soit $\mathscr{M}$ comme dans l'énoncé de (ii); on sait *a priori*, d'après la définition de Φ, que $\mathscr{M}+VQ$ est inclus dans Φ $(\mathscr{M})$ et d'après 1.9 que $\Phi(\mathscr{M})$ est différent de V; on applique donc (i) à $\mathscr{M}+VQ$ et on voit que ce sous-U-module de V vérifie la propriété (C). Par définition de la propriété (C) et de Φ, on termine la démonstration de (ii).

1.11. Nous allons terminer ce chapitre en étendant la proposition de l'introduction au cas de groupes non irréductibles, ce qui nous servira pour construire une application réciproque à l'application de DUFLO (*voir* chapitres 3 et 4). On ne suppose pas que l'on a $\bigcap_{\gamma \in G} \alpha(\gamma) Q=0$ mais on suppose que Q est un idéal k-rationnel de U (*cf.* [5], 1.1). Soit T un groupe algébrique et on suppose que T agit dans le k-espace vectoriel V et dans la k-algèbre U par automorphismes respectant les structures et que les opérations dans U et dans V sont compatibles pour la structure de U-module de V. Pour simplifier les énoncés, on suppose aussi que G est un sous-groupe distingué de T et que le quotient T/G est un groupe fini. On note les actions de T et de G dans U (resp. V) sans lettre grecque. On note T_1 le sous-groupe de T qui stabilise l'idéal Q. On garde la définition de Φ donnée dans l'introduction. On suppose que l'on a :

$$\bigcap_{\gamma \in G} \gamma VQ=VP.$$

1.12. LEMME (*notations et hypothèses de* 1.11). — *Soit $\mathscr{M}$ un sous-U-module de V qui vérifie les hypothèses (H_2), alors on a :*

$$\Phi(\bigcap_{\tau \in T} \tau \mathscr{M})=\bigcap_{\tau \in T_1} \tau \Phi(\mathscr{M}).$$

Soit τ un élément de T; remarquons l'égalité de τP avec $\tau \operatorname{Ann}_U V/\tau \mathscr{M}$ et que cet idéal de U est G-stable. On pose :

$$\begin{gathered} X=(\bigcap_{\tau \in T} \tau \mathscr{M})+VQ, \\ T'=\{\tau \in T \mid \tau P=P\}, \\ Y=(\bigcap_{\tau \in T'} \tau \mathscr{M})+VQ, \\ Z=\Phi(\bigcap_{\tau \in T} \tau \mathscr{M}), \\ E=\{s \in S \mid (Y/VP) \gamma s \subset X/VP, \ \forall \gamma \in G\}. \end{gathered}$$

Montrons d'abord que E est un ensemble non vide, ce qui prouvera que l'on a $X \subset Y \subset Z$ et l'égalité :

$$\Phi(\bigcap_{\tau \in T'} \tau \mathcal{M}) = \Phi(\bigcap_{\tau \in T} \tau \mathcal{M}).$$

Puisque T/G est un groupe fini, il est clair que l'ensemble des sous-modules distincts $(\tau \mathcal{M})_{\tau \in T}$ est fini et on fixe un sous-ensemble T'' de $T - T'$, fini tel que l'ensemble des idéaux de $U\{\mathrm{Ann}_U V/\tau \mathcal{M}\}_{\tau \in T''}$ coïncide avec l'ensemble des idéaux de $U\{\mathrm{Ann}_U V/\tau \mathcal{M}\}_{\tau \in T}$. Soit τ un élément de T''; on fixe un élément s_τ de U qui vérifie :

$$s_\tau \in S \cap (\mathrm{Ann}_U V/\tau \mathcal{M} P)/P.$$

Soit γ un élément de G; l'élément γs_τ de U vérifie aussi la même propriété, i. e. :

$$\gamma s_\tau \in S \cap (\mathrm{Ann}_U V/\tau \mathcal{M} P)/P.$$

On pose :

$$s = \prod_{\tau \in T''} s_\tau$$

et on a :

$$\gamma s \in S \cap ((\prod_{\tau \in T''} \mathrm{Ann}_U V/\tau \mathcal{M}) + P)/P, \qquad \forall \gamma \in G.$$

Cela montre que l'ensemble E contient s et donc est non vide. Montrons maintenant que l'on a :

$$\bigcap_{\tau \in T'} \tau \mathcal{M} = \bigcap_{\tau \in T_1} \tau \mathcal{M},$$

ce qui terminera la démonstration :

Soit τ un élément de T'; d'après [5], 2.12, les idéaux Q et τQ appartiennent à la même G-orbite; soit γ un élément de G vérifiant $\gamma Q = \tau Q$. On a donc :

$$\tau(\tau^{-1} \gamma \tau) \in \tau G \cap T_1$$

et, puisque $\mathcal{M}$ est G-invariant, on a aussi :

$$\tau \mathcal{M} = \tau(\tau^{-1} \gamma \tau) \mathcal{M}$$

ce qui prouve l'assertion.

1.13. PROPOSITION. — *Soient T, T_1 des groupes vérifiant les hypothèses* 1.11. *Définissons Φ comme dans l'introduction et Ψ' comme étant l'application qui à un sous-U-module de V associe le plus grand sous-U-module, T-invariant qu'il contient alors Φ et Ψ' sont des applications réciproques l'une de l'autre de l'ensemble des sous-U-modules de V qui sont de la forme $\bigcap_{\tau\in T}\tau\mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ vérifie les hypothèses (H_2) et l'ensemble des sous-U-modules de V qui sont T_1-invariants et qui vérifient les hypothèses (H_1).*

Soit M un sous-U-module de V qui vérifie les hypothèses (H_1) de l'introduction; on note par la même lettre un élément de V et son image dans V/P et on a :

- $$\mathrm{Ann}_U V/\bigcap_{\tau\in T_1}\tau M=\bigcap_{\tau\in T_1}(\mathrm{Ann}_U V/\tau M)=Q,$$

- soient $s\in S$ et $v\in V$ des éléments vérifiant :

$$v(\gamma s)\in\bigcap_{\tau\in T_1}\tau M/VP, \qquad \forall\gamma\in G,$$

d'où :

$$\tau(v(\gamma s))\in M, \qquad \forall\tau\in T_1, \quad \forall\gamma\in G,$$

c'est-à-dire :

$$\tau(v)(\tau\gamma\tau^{-1})\tau(s)\in M, \qquad \forall\tau\in T_1, \quad \forall\gamma\in G.$$

Puisque M vérifie (H_1) et que G est distingué dans T et que S est stable par T, l'élément τv de V appartient à M quel que soit τ dans T_1. D'où :

$$v\in\bigcap_{\tau\in T_1}\tau M.$$

On vient donc de montrer que le sous-U-module de V égal à $\bigcap_{\tau\in T_1}\tau M$ vérifie les hypothèses (H_1). Grâce aux lemmes 1.8 et 1.12 on voit que l'image par Φ de l'ensemble des sous-U-modules de V de la forme $\bigcap_{\tau\in T}\tau\mathcal{M}$ (où $\mathcal{M}$ vérifie (H_2)) est incluse dans l'ensemble des sous-U-modules de V qui vérifient (H_1) et qui sont T_1-invariants. D'après 1.9 et 1.12, on a :

$$\Psi'\Phi(\bigcap_{\tau\in T}\tau\mathcal{M})=\bigcap_{\tau\in T_1}\tau\Psi\Phi(\mathcal{M})=\mathcal{M}.$$

Réciproquement, soit M un sous-U-module de V qui vérifie (H_1) et qui est T_1-invariant; on pose :

$$\mathcal{M}=\Psi(M).$$

C'est un sous-U-module de V qui vérifie (H_2) et on a, d'après 1.12 et 1.9 :

$$\Phi(\bigcap_{\tau \in T} \tau \mathcal{M}) = M$$

c'est-à-dire :

$$\Psi'(M) = \bigcap_{\tau \in T} \tau \mathcal{M} \qquad \text{et} \qquad \Phi \circ \Psi'(M) = M.$$

D'où la proposition.

2.

2.1. Ce chapitre va servir à démontrer le théorème annoncé dans l'introduction. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie; on note $U(\mathfrak{a})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$ et $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{a})$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$; on note $\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ l'unique automorphisme de $U(\mathfrak{b})$ qui à $x \in \mathfrak{b}$ associe $1/2 \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{b}}(x) + x$.

2.2. On reprend les notations $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$, G, I, P, du théorème de l'introduction; comme nous l'avons déjà dit grâce à [5], 4.7, il suffit de démontrer l'unicité de Ω'. On fixe Q (et donc H et $\mathfrak{h}$) comme dans l'énoncé du théorème. On pose :

$$V = U(\mathfrak{g}),$$
$$U = U(\mathfrak{t});$$

on note S l'ensemble des non-diviseurs de 0 de U/P.

L'action adjointe de G dans U et V est rationnelle et respecte les structures algébriques de U et de V. En outre, comme V est un U-module libre, il est clair que l'on a :

$$\bigcap_{\gamma \in G} \gamma VQ = V(\bigcap_{\gamma \in G} \gamma Q) = VP.$$

Les hypothèses générales de la proposition de l'introduction sont donc vérifiées et on adopte ses notations.

2.3. Lemme (*notations de* 2.2). — *Soit E un idéal de $U(\mathfrak{h})$; on suppose que l'on a :*

$$E \cap U = Q.$$

(i) *Le U/Q-module V/VE est fidèle.*

(ii) *On suppose que E est une intersection d'idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$, coupant chacun U en Q, alors VE vérifie (C).*

On pose :

$$W = U(\mathfrak{h}).$$

Et faisons d'abord la remarque suivante :

Le théorème de Poincaré-Birkov-Witt [2], 2.1, montre que V est un W-module libre à droite ayant une base contenant 1 et que W est un U-module libre à droite ayant une base contenant 1.

(i) Soit F un idéal de U; on suppose que l'on a :

$$VF \subset VE.$$

D'après ce qui précède, on obtient :

$$F = FU, \qquad VE \cap U = E \cap U = Q.$$

Cela démontre (i).

(ii) On note avec $\bar{}$ l'image d'un élément ou d'un sous-ensemble de U, V ou W dans le quotient U/P, V/P ou W/P.

Soient $\{\overline{E}_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ un ensemble d'idéaux primitifs de $\overline{W}$ dont l'intersection est $\overline{E}$. D'après la remarque préliminaire, on a : $\bigcap_{i\in\mathscr{I}} \overline{VE_i} = \overline{VE}$, et on suppose que l'on a $\overline{E}_i \cap U = \overline{Q}$, $\forall i \in \mathscr{I}$. Soient s et $\bar{v}$ des éléments de S et $\overline{V}$ respectivement; il est clair que l'on a l'équivalence des deux assertions suivantes :

$$\bar{v}(\gamma s) \in \overline{VE}, \qquad \forall \gamma \in G,$$

$$\bar{v}(\gamma s) \in \overline{VE_i}, \qquad \forall \gamma \in G \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathscr{I}.$$

Cela montre que l'on peut supposer, pour démontrer (ii) que E est un idéal primitif. En outre, utilisant encore une fois la remarque préliminaire, on voit que la propriété (C) résulte du résultat suivant :

soient $\bar{w} \in \overline{W}$, $s \in S$; on suppose que E est un idéal prmitif de W et que l'on a :

$$(\star) \qquad \bar{w}(\gamma s) \in \overline{E}, \qquad \forall \gamma \in G.$$

Alors, $\bar{w}$ est un élément de $\overline{E}$.

Or, appliquons 1.5 (ii) en y faisant $V=\overline{W}$ et $U=\overline{U}$. On en tire d'une part que l'élément $\mu_{\overline{W}}^{-1}(s)$ n'est pas dans $\bar{E}\otimes K(G)$ et d'autre part que la relation (∗) s'exprime par le fait que $\bar{w}\mu_{\overline{W}}^{-1}(s)$ est un élément de $\bar{E}\otimes K(G)$. Remarquons alors que $\mu_{\overline{W}}$ est un isomorphisme d'algèbres (*cf.* 1.2).

Comme nous avons supposé le corps de base algébriquement clos, l'idéal $\bar{E}\otimes K(G)$ de $\overline{W}\otimes K(G)$ est premier et les deux propriétés précédentes prouvent que l'idéal $\bar{E}\otimes K(G)$ ne coupe pas l'ensemble multiplicatif oréen de non-diviseur de 0, $\mu_{\overline{W}}^{-1}(S)$. Grâce à [2], 3.6.17, on voit que sous l'hypothèse (∗) l'élément $\bar{w}$ est dans $\bar{E}\otimes K(G)$; il est clair que cela démontre le résultat voulu et donc (ii).

2.4. Démonstration du théorème de l'introduction (notations de 2.2).

Soit $\mathscr{I}$ un idéal primitif de $U(\mathfrak{h})$ induisant I et on suppose que l'on a :

$$\mathscr{I}\cap U(\mathfrak{t})=Q.$$

On pose :

$$E=\bigcap_{\gamma\in H}\gamma\mathscr{I}.$$

Ainsi, l'idéal E de $U(\mathfrak{h})$ vérifie les hypothèses de 2.3 (ii). Comme il est clair que l'idéal E est stable par H, on en déduit que le U-module à droite VE vérifie les hypothèses (H_1). En outre, manifestement, le U-module à droite I vérifie les hypothèses (H_2) et la définition de l'induction montre alors que l'on a :

$$I=\Psi(VE).$$

La proposition de l'introduction montre alors que l'on a :

$$VE=\Phi(I).$$

Ainsi l'idéal E est égal à l'intersection $\Phi(I)\cap U(\mathfrak{h})$ et est donc uniquement déterminé par l'idéal I. On utilise alors [5], 2.12, où on fait $U=U(\mathfrak{h})$ et $P=E$ pour obtenir l'unicité de Ω'.

Remarque. — Le cas de l'induction tordue se déduit de ce qui précède en utilisant l'automorphisme élémentaire $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ (*cf.* 2.1) et on peut remplacer dans le théorème ind par $\widetilde{\text{ind}}$ (*cf.* [2], 5.2.6) en remplaçant :

$$\mathscr{I}\cap U(\mathfrak{t})=P \quad \text{par} \quad \mathscr{I}\cap U(\mathfrak{t})=\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}P.$$

3.

3.1. Ce chapitre est destiné à démontrer la conjecture de DUFLO annoncée dans l'introduction. Fixons les notations suivantes : $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique noté G, on note $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$; soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$, on pose :

$$\mathfrak{g}(f)=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,f([\mathfrak{g},x])=0\},\ {}^u\mathfrak{g}(f) \text{ le radical unipotent de } \mathfrak{g}(f).$$

On note $\mathfrak{g}^*_{tu}$ l'ensemble des formes linéaires de type unipotent (*cf.* [3], I.10 pour la définition). Comme en [3], IV.1, on pose :

$$Z^{\text{prim}}(f)=\{\xi\in\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}(f))\,|\,\forall x\in{}^u\mathfrak{g}(f),\ x-f(x)\in\xi\}.$$

Les éléments de $Z^{\text{prim}}(f)$ s'identifient naturellement à des sous-espaces vectoriels de $U(\mathfrak{g})$ et on note $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$ l'ensemble des couples (f,ξ) où f est un élément de $\mathfrak{g}^*_{tu}$ et où ξ est un élément de $Z^{\text{prim}}(f)$; l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ et dans $U(\mathfrak{g})$ induit naturellement une action de G dans $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$.

DUFLO définit en [3], IV.6, une application surjective à fibre finie de l'ensemble des G-orbites dans $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$ sur l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$; soit (f,ξ) un élément de $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$. On note $I_{f,\xi}$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ associé par DUFLO à la G-orbite de (f,ξ).

3.2. THÉORÈME. — *L'application de* DUFLO *de l'ensemble des G-orbites de* $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$ *dans* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ *est bijective.*

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

1er *cas.* — $\mathfrak{g}$ est réductive (*cf.* [3], IV.6); dans ce cas $\mathfrak{g}^*_{tu}$ est réduit à l'élément $\{0\}$, $Z^{\text{prim}}(0)$ est égal à $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ et l'application de DUFLO est l'identité; le théorème est donc évident.

2e *cas.* — $\mathfrak{g}$ n'est pas réductive; on note N le radical unipotent de G et $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie. Soient (f_1,ξ_1) et (f_2,ξ_2) des éléments de $Z^{\text{prim}}(\mathfrak{g}^*_{tu})$; soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ et on suppose que l'on a :

$$I=I_{f_1,\xi_1}=I_{f_2,\xi_2}.$$

On note Q_1 et Q_2 les idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ associés par l'application de DIXMIER aux éléments du dual de $\mathfrak{u}$ égaux aux restrictions de f_1 et de f_2 à $\mathfrak{u}$, et on a [3], IV.5 :

$$I\cap U(\mathfrak{u})=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G}\gamma Q_1=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G}\gamma Q_2.$$

D'après DIXMIER (*cf.* aussi [3], IV.5 et [3], II.9), on sait qu'il y a un élément γ de G tel que l'on ait :

la restriction de f_1 à $\mathfrak{u}$ coïncide avec la restriction de f_2 à $\mathfrak{u}$. On note δ cette restriction commune, $I(\delta)$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{u})$ associé à δ par DIXMIER et (f_3, ξ_3) le couple $(\gamma f_2, \gamma\xi_2)$. On pose :

$$H=\{\gamma\in G \mid \gamma\delta=\delta\}.$$

C'est un groupe algébrique éventuellement non irréductible dont on note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie. Si l'on a $H=G$, le théorème est facile (*cf.* 1[er] cas); on suppose que l'on a $H\neq G$; on note $\mathscr{J}(\delta)$ l'idéal de $U(\mathfrak{h})$ engendré par l'ensemble des éléments $x-\delta(x)$ où x appartient à $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{u}$. Le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de l'idéal $I(\delta)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}+\mathfrak{u}$ et on a :

$$I(\delta)\cap U(\mathfrak{h})=\mathscr{J}(\delta).$$

On note r le scindage de DUFLO (*cf.* [2], 10.1.5) :

$$r:\quad U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})/U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})\,J(\delta)\xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{h})/J(\delta)\otimes U(\mathfrak{u})/I(\delta).$$

Soit $\mathscr{J}$ un idéal de $U(\mathfrak{h})$ contenant $\mathscr{J}(\delta)$; en suivant [3], IV.4, on note $\mathscr{J}\circ I(\delta)$ l'idéal de $U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})$ dont l'image dans $U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})/U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})\,I(\delta)$ est égale à $r^{-1}(\mathscr{J}/\mathscr{J}(\delta)\otimes U(\mathfrak{u})/I(\delta))$. Soit γ un élément de H, remarquons que l'on a :

$$\gamma(\mathscr{J}\circ I(\delta))=(\gamma\mathscr{J})\circ I(\delta).$$

On note h_1 et h_3 les restrictions de f_1 et f_3 à h; d'après [3], I.18, ce sont des éléments de $\mathfrak{h}^*_{\text{tu}}$. Soit i égal à 1 ou 3, (les notations sont celles de 3.1, où l'on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{h}$ ou par $\mathfrak{u}$); on définit dans $U(\mathfrak{h})$ le sous-espace vectoriel :

$$\xi_i'=\xi+\textstyle\sum_{x\in\mathfrak{u}(\delta)} U(\mathfrak{h}(h_i))(x-\delta(x)),$$

et en utilisant [3], I.16, on a :

$$\mathfrak{h}(h_i)=\mathfrak{g}(f_i)+\mathfrak{u}(\delta), \tag{1}$$

$$\xi_i'\in Z^{\text{prim}}(h_i), \tag{2}$$

$$\xi_i=\xi_i'\cap U(\mathfrak{g}(f_i)). \tag{3}$$

On note l'idéal primitif de $U(\mathfrak{h})$ associé par DUFLO à (h_i, ξ_i') par $I_{h_i, \xi_i'}$ et on pose :

$$\mathscr{I}_i = I_{h_i, \xi_i'} \circ I(\delta).$$

D'après [3], IV.9, on a :

$$I = \operatorname{ind}^{\sim}(\mathscr{I}_i, \mathfrak{h}+\mathfrak{u} \uparrow \mathfrak{g}).$$

D'après 2.4 et 2.5, il existe au moins un élément, noté γ, du sous-groupe HN de G qui a la propriété suivante :

$$\gamma \mathscr{I}_1 = \mathscr{I}_3.$$

Les éléments de N laissent stables les idéaux de $U(\mathfrak{h}+\mathfrak{u})$, ce qui nous permet de supposer que γ est un élément de H. Grâce à cette hypothèse, on voit facilement que l'on a :

$$I_{h_1, \xi_1'} = \gamma I_{h_3, \xi_3'}.$$

D'après [3], IV.6, on a aussi :

$$\gamma I_{h_3, \xi_3'} = I_{\gamma h_3, \gamma \xi_3'}.$$

Par hypothèse de récurrence, l'égalité de $I_{h_1, \xi_1'}$ et de $I_{\gamma h_3, \gamma \xi_3'}$ entraîne l'existence d'un élément γ' de H tel que l'on ait :

(4) $$h_1 = \gamma' \gamma h_3,$$

(5) $$\xi_1' = \gamma' \gamma \xi_3'.$$

En outre, il est clair, par définition de H, que l'on a toujours :

(6) δ est la restriction de f_1 et de $\gamma' \gamma f_3$ à u.

D'après [3], I.16, (4) et (6) entraînent l'existence d'un élément γ'' de $H \cap U$ vérifiant :

$$f_1 = \gamma'' \gamma' \gamma f_3.$$

Remarquons que le groupe $H \cap N$ est irréductible d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(\delta)$ et que grâce à (1), (2) et (5), on a aussi :

$$\xi_1' = \gamma'' \gamma' \gamma \xi_3'.$$

Utilisant (3), on en déduit les égalités suivantes :

$$\xi_1=\gamma''\gamma'\gamma\xi'_3\cap U(\mathfrak{g}(f_1))=\gamma''\gamma'\gamma(\xi'_3\cap U(\mathfrak{g}(f_3))=\gamma''\gamma'\gamma\xi_3.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

4.

4.1. Ce chapitre sert à donner une application réciproque à l'application de DUFLO (*cf.* chapitre 3), et quelques propriétés de la topologie de Jacobson de Prim $U(\mathfrak{g})$ à l'aide des idéaux induits de DUFLO; pour la définition de ces idéaux, on renvoit à [2], 10.3, où ils sont notés $I(f)$. On note $\mathfrak{g}^*_{PR}$ l'ensemble des formes linéaires de $\mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation résoluble. En outre, soient λ un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{n}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, alors on note $\lambda|\mathfrak{n}$ la restriction de λ à $\mathfrak{n}$ et $I_{\mathfrak{n}}(\lambda|\mathfrak{n})$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{n})$ associé par DIXMIER à $\lambda|\mathfrak{n}$ (*cf.* [2], 6.1.5).

4.2. Soient H un sous-groupe algébrique de G et $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie; l'algèbre de Lie du plus grand sous-groupe distingué et unipotent de H est dite le radical unipotent de $\mathfrak{h}$, on le note ${}^u\mathfrak{h}$, et un idéal de $\mathfrak{h}$ est dit unipotent s'il est inclus dans ${}^u\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{u}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{h}$. La demi-trace de l'opération adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un caractère de $\mathfrak{h}$ et on note $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ l'automorphisme élémentaire de $U(\mathfrak{h})$ qu'il définit (*cf.* 2.1); on remarque que la restriction de $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ à $U(\mathfrak{u})$ est triviale. Reformulons aussi les lemmes 1.10(ii) et 1.13 sous la forme qui nous servira dans la suite :

On suppose que $\mathfrak{u}$ est stable par H. Soit Q un idéal primitif de $U(\mathfrak{u})$ et on note H_1 le sous-groupe de H qui stabilise Q et h_1 l'algèbre de Lie de H_1. Prenons pour U l'algèbre (*cf.* chapitre 1) $U(\mathfrak{u})$ et pour V l'algèbre $U(\mathfrak{h})$ sur lesquelles le groupe H agit. Tout idéal primitif $\mathscr{I}$ de $U(\mathfrak{h})$ qui vérifie :

$\mathscr{I}\cap U(\mathfrak{u})=\bigcap_{\gamma\in H^0}\gamma Q$ où H^0 est la composante neutre de H est induit par un idéal $\mathscr{I}_1$ de $U(\mathfrak{h}_1)$ qui contient Q et on a d'après 1.10(ii), 1.9 et 2.4 :

$$\mathscr{I}+U(\mathfrak{h})Q=\Phi(\mathscr{I})=U(\mathfrak{h})(\textstyle\bigcap_{\gamma\in H_1\cap H^0}\gamma\mathscr{I}_1)$$

et d'après 1.10(ii) et 1.12, on en tire :

$$(\textstyle\bigcap_{\gamma\in H}\gamma\mathscr{I})+U(\mathfrak{h})Q=\Phi(\bigcap_{\gamma\in H}\gamma\mathscr{I})=U(\mathfrak{h})(\bigcap_{\gamma\in H_1}\gamma\mathscr{I}_1).$$

L'application de l'ensemble des H-orbites d'idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ dont un élément coupe $U(\mathfrak{u})$ en $\bigcap_{\gamma \in H^0} \gamma Q$ dans l'ensemble des H_1-orbites d'idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ contenant Q, définie par :

$$\bigcap_{\gamma \in H} \gamma \mathscr{J} \mapsto ((\bigcap_{\gamma \in H} \gamma \mathscr{J}) + U(\mathfrak{h}) Q) \cap U(\mathfrak{h}_1)$$

est bijective; son application réciproque est donnée par :

$$\bigcap_{\gamma \in H_1} \gamma \mathscr{J}_1 \mapsto \bigcap_{\gamma \in H} \gamma \operatorname{ind}(J_1, \mathfrak{h}_1 \uparrow \mathfrak{h}).$$

En outre, d'après [2], 10.3.1 et 2.4, *J est un idéal induit de* DUFLO *dans $U(\mathfrak{h})$ si et seulement si $\mathscr{J}_1$ en est un dans $U(\mathfrak{h}_1)$.*

Cela résulte de ce qui précède et de 1.13.

4.3. Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}$ dont on note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent, Q un idéal primitif de $U(\mathfrak{u})$ et I un idéal de $U(\mathfrak{g})$; on dit que $(\mathfrak{b}, Q)$ est une donnée de récurrence relativement à I si les conditions suivantes sont réalisées :

il existe une suite d'idéaux emboîtés de $\mathfrak{u}$, notés $\mathfrak{u}_{-1} = 0 \subsetneq \mathfrak{u}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{u}_t$ (éventuellement $t = -1$) et une suite de sous-k-espaces vectoriels de $U(\mathfrak{u})$, notés $Q_{-1} = 0 \subsetneq Q_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Q_t$ tels que l'on ait :

- si $t \neq -1$, pour $i = 0, \ldots, t$ chaque Q_i est un idéal primitif de $U(\mathfrak{u}_i)$;
- de proche en proche, pour $i = -1, \ldots, t$, on note G_{i+1} le sous-groupe de G qui stabilise Q_i et $\mathfrak{g}_{i+1}$ son algèbre de Lie; alors si $\mathfrak{u}_i$ est égal à ${}^u\mathfrak{g}_{i+1}$, on a $t = i$, sinon $\mathfrak{u}_{i+1}$ est un idéal unipotent de $\mathfrak{g}_{i+1}$ contenant strictement $\mathfrak{u}_i$ et stable par le groupe G_{i+1}. (Il faut remarquer que cette propriété de stabilité entraîne que G_{i+1} est un sous-groupe de G_i et que $\mathfrak{g}_{i+1}$ contient $\mathfrak{u}_i$.)

Et l'idéal primitif Q_{i+1} de $U(\mathfrak{u}_{i+1})$ vérifie :

$$(I + U(\mathfrak{g}) Q_i) \cap U(\mathfrak{u}_{i+1}) = \bigcap_{\gamma \in G_{i+1}} \gamma Q_{i+1}.$$

- On a $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_{t+1}$ et on notera dans la suite par B le sous-groupe de G stabilisant Q, c'est-à-dire G_{t+1}.

Remarquons que l'idéal I étant donné, il n'existe pas toujours de données de récurrence relativement à I, mais que si $(\mathfrak{b}, Q)$ est une donnée B et $\mathfrak{u}$ sont imposés et pour alléger les énoncés, on utilisera ces notations B et $\mathfrak{u}$ sans rappeler leur définition.

4.4. LEMME. — *Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$.*

(i) *Il existe au moins une donnée de récurrence relativement à I.*

(ii) *Soit* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à* I; *alors il existe un idéal primitif de* $U(\mathfrak{b})$, *noté* $\mathcal{J}$, *contenant* Q *et vérifiant :*

$$I+U(\mathfrak{g})Q=U(\mathfrak{g})(\bigcap_{\gamma\in B}\gamma\mathcal{J}) \qquad \text{et} \qquad I=\operatorname{ind}(\mathcal{J}, \mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g}).$$

La B-orbite de l'idéal $\mathcal{J}$ *est uniquement déterminée et l'idéal* $\tilde{\mathcal{J}}$ *égal par définition à* $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}\mathcal{J}$ *vérifie :*

$$I+U(\mathfrak{g})Q=U(\mathfrak{g})\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\bigcap_{\gamma\in B}\gamma\tilde{\mathcal{J}}) \qquad \text{et} \qquad I=\widetilde{\operatorname{ind}}(\tilde{\mathcal{J}}, \mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g}).$$

(iii) *Sous les hypothèses et les notations de* (ii), *l'idéal* I *est un idéal induit de* DUFLO *dans* $U(\mathfrak{g})$ *si et seulement si* $\mathcal{J}$ *est un idéal induit de* DUFLO *dans* $U(\mathfrak{b})$. (*Rappelons que* $\mathcal{J}$ *est un idéal induit de* DUFLO *dans* $U(\mathfrak{b})$ *si et seulement si* $\tilde{\mathcal{J}}$ *en est un* (cf. [2], 5.2)).

(i) On pose $\mathfrak{u}_{-1}=Q_{-1}=0$ et $\mathfrak{g}_{-1}=\mathfrak{g}$, $\mathcal{J}_{-1}=\mathcal{J}_0=I$, $G_{-1}=G$.

On suppose avoir démontrer l'existence des j premiers termes des suites $\mathfrak{u}_{-1},\ldots,\mathfrak{u}_t$ et $Q_{-1},\ldots,Q_t$ (on reprend aussi les notations g_i, G_i de 4.3, et on note G_i^0 la composante neutre de G_i), ainsi que l'existence d'idéaux primitifs $\mathcal{J}_{i+1}$ de $U(\mathfrak{g}_{i+1})$ où $-1\leqq i\leqq j-2$ contenant Q_i et vérifiant :

$$(1) \qquad \bigcap_{\gamma\in G_i}\gamma\mathcal{J}_i+U(\mathfrak{g}_i(\bigcap_{\gamma\in G_{i+1}}\gamma\mathcal{J}_{i+1}).$$

$$(2) \qquad \operatorname{ind}(\mathcal{J}_{i+1}, \mathfrak{g}_{i+1}\uparrow\mathfrak{g})=I.$$

Si $j=t+1$, on a terminé sinon on construit $\mathfrak{u}_{j+1}$, Q_{j-1} et $\mathcal{J}_j$ vérifiant les conditions de 4.3 et l'analogue de (1) et (2). On prend pour $\mathfrak{u}_{j-1}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}_{j-1}$. Comme nous l'avons rappelé en [5], 3.9, l'idéal $\mathcal{J}_{j-1}$ étant un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{j-1})$, il existe une unique G_{j-1}^0-orbite dans Prim $U(\mathfrak{u}_{j-1})$ dont on note Q_{j-1} un élément, vérifiant :

$$(3) \qquad \mathcal{J}_{j-1}\cap U(\mathfrak{u}_{j-1})=\bigcap_{\gamma\in G_{j-1}^0}\gamma Q_{j-1}.$$

En particulier, l'idéal Q_{j-1} contient l'idéal Q_{j-2} de $U(\mathfrak{u}_{j-2})$. En itérant (1) de $i=1$ à $i=j-2$ et en utilisant les inclusions de Q_{-1} dans $Q_0,\ldots$ dans Q_{j-2}, on obtient :

$$(4) \qquad I+U(\mathfrak{g})Q_{j-2}=U(\mathfrak{g})(\bigcap_{\gamma\in G_{j-1}}\gamma\mathcal{J}_{j-1}),$$

d'où avec (3) :

$$(5) \qquad (I+U(\mathfrak{g})Q_{j-2})\cap U(\mathfrak{u}_{j-1})=\bigcap_{\gamma\in G_{j-1}}\gamma Q_{j-1}$$

ce qui est la propriété voulue pour Q_{j-1}. Il reste à construire l'idéal $\mathscr{I}_j$, ce que nous allons faire sous les seules hypothèses que $\mathfrak{u}_{-1}, \ldots, \mathfrak{u}_{j-1}$ et $Q_{-1}, \ldots, Q_{j-1}$ sont les $j+1$ premiers termes d'une suite de récurrence relativement à I (cela nous servira pour la démonstration de (i) et (iii)), et que les idéaux $\mathscr{I}_{-1}, \ldots, \mathscr{I}_{j-1}$ ont déjà été construits vérifiant (1) et (2).

On applique 4.2 à $H=G_{j-1}$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_{j-1}$ et $Q=Q_{i-1}$. On note $\mathscr{I}_j$ un élément de la G_j-orbite définie par :

$$(6) \qquad (\textstyle\bigcap_{\gamma\in G_{j-1}} \gamma\mathscr{I}_{j-1} + U(\mathfrak{g}_{j-1})Q_{j-1}) \cap U(\mathfrak{g}_j).$$

D'après 4.2 et les propriétés d'induction par étage, on a l'analogue de (1) et (2) pour $i=j-1$. Il est alors clair que l'analogue de (4) et (5) est vrai pour tout $i\in\{-1,\ldots,t\}$:

$$(7) \qquad I+U(\mathfrak{g})Q_i = U(\mathfrak{g})(\textstyle\bigcap_{\gamma\in G_{i+1}} \gamma\mathscr{I}_{i+1}).$$

$$(8) \qquad (I+U(\mathfrak{g})Q_i)\cap U(\mathfrak{g}_{i+1}) = \textstyle\bigcap_{\gamma\in G_{i+1}} \gamma\mathscr{I}_{i+1}.$$

Avec (6), nous avons terminé la démonstration de (i).

(ii) On reprend la démonstration de (i) qui fournit des idéaux primitifs $\mathscr{I}_{-1}=I, \ldots, \mathscr{I}_{t+1}$ et on pose $\mathscr{I}=\mathscr{I}_{t+1}$. D'après (7) et (2) (pour $i=t$) l'idéal $\mathscr{I}$ répond aux conditions de (ii). L'unicité de la B-orbite de $\mathscr{I}$ est claire d'après (8) (ici $B=G_{t+1}$).

Le reste de (ii) est immédiat.

(iii) résulte de la fin de 4.2 et de la manière dont on a construit les idéaux $\mathscr{I}_i$ dans la démonstration de (i).

4.5. Lemme. — *Soit* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à un idéal* I. *On pose :*

$$\bar{Q}(\mathfrak{b}) = \{\mathscr{I}\in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{b}) \mid \mathscr{I}\cap U(\mathfrak{u}) = Q\},$$

$$Z(Q) = \{K\in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}) \mid (\mathfrak{b}, Q) \text{ est une donnée de récurrence relativement à } K\}.$$

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $K\in Z(Q)$;

(ii) $\exists\, \mathscr{I}\in\bar{Q}(\mathfrak{b}) \mid K+U(\mathfrak{g})Q = U(\mathfrak{g})(\bigcap_{\gamma\in B}\gamma\mathscr{I})$ *et* $K=\operatorname{ind}(\mathscr{I}, \mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g})$;

(iii) $K+U(\mathfrak{g})Q \neq U(\mathfrak{g})$ *et* $K\supset \operatorname{ind}(Q, \mathfrak{u}\uparrow\mathfrak{g})$.

Le lemme 4.4, (ii) prouve que (i) entraîne (ii); comme les idéaux de $\bar{Q}(b)$ contiennent Q, il est clair que (ii) entraîne (iii); montrons que (iii) entraîne (i).

Reprenons les notations de 4.3. On note G_i^0 la composante neutre de G_i; pour $i=-1, \ldots, t$, on pose :

$$I_i(Q)=\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{u} \uparrow \mathfrak{g}_i) \qquad (\text{où } \mathfrak{g}_{-1}=\mathfrak{g} \text{ et } G_{-1}=G).$$

Remarquons que l'idéal $I_i(Q)$ de $U(\mathfrak{g}_i)$ contient Q_{i-1}, qu'il est complètement premier et qu'il vérifie :

$$(1) \qquad I_i(Q) \cap U(\mathfrak{u}_i)=\bigcap_{\gamma \in G_i^0} \gamma Q_i.$$

Il est alors clair que l'idéal $I_i(Q)$ de $U(\mathfrak{g}_i)$ vérifie les hypothèses (H_2) de l'introduction (où $V=U(\mathfrak{g}_i)$, $U=U(\mathfrak{u}_i)$, $Q=Q_i$ et $G=G_i^0$). En outre $I_i(Q)$ est induit par l'idéal $I_{i+1}(Q)$ de $U(\mathfrak{g}_{i+1})$; on vérifie alors comme en 4.2, que l'on a l'égalité suivante :

$$(2) \qquad \left(\bigcap_{\gamma \in G_i} \gamma I_i(Q)\right)+U(\mathfrak{g}) Q_i=U(\mathfrak{g}_i)\left(\bigcap_{\gamma \in G_{i+1}} \gamma I_{i+1}(Q)\right).$$

Les idéaux $I_{-1}(Q)$, $I_0(Q)$ et $\operatorname{ind}(Q, \mathfrak{u} \uparrow \mathfrak{g})$ coïncident, on les note $I(Q)$. En itérant (2) de -1 à i et en utilisant les inclusions de Q_{-1} dans $Q_0 \ldots$, dans Q_i, puis en utilisant (1), on obtient les égalités (3) et (4) suivantes :

$$(3) \qquad I(Q)+U(\mathfrak{g}) Q_i=U(\mathfrak{g})\left(\bigcap_{\gamma \in G_{i+1}} \gamma I_{i+1}(Q)\right),$$

$$(4) \qquad (I(Q)+U(\mathfrak{g}) Q_i) \cap U(\mathfrak{u}_{i+1})=\bigcap_{\gamma \in G_{i+1}} \gamma Q_{i+1}.$$

Pour démontrer que (iii) entraîne (i), il faut vérifier que l'on a :

$$(*) \qquad (K+U(\mathfrak{g}) Q_{i-1}) \cap U(\mathfrak{u}_i)=\bigcap_{\gamma \in G_i} \gamma Q_i.$$

Or, l'idéal à gauche $K+U(\mathfrak{g}) Q$ de $U(\mathfrak{g})$ ne contient pas $U(\mathfrak{u}_i)$ puisqu'il est propre par hypothèse, mais il contient l'idéal suivant de $U(\mathfrak{u}_i)$:

$$((K+U(\mathfrak{g}) Q_{i-1}) \cap U(\mathfrak{u}_i))+Q_i.$$

Comme Q_i est un idéal maximal de $U(\mathfrak{u}_i)$, on en déduit l'inclusion suivante :

$$(5) \qquad (K+U(\mathfrak{g}) Q_{i-1}) \cap U(\mathfrak{u}_i) \subset Q_i.$$

En utilisant d'une part la stabilité de $K+U(\mathfrak{g})Q_{i-1}$ pour l'action du groupe G_i et d'autre part l'inclusion de $I(Q)$ dans K (*cf.* hypothèse), on déduit de (4) et (5) que l'on a :

$$\bigcap_{\gamma\in G_i}\gamma Q_i\subset(K+U(\mathfrak{g})Q_{i-1})\cap U(\mathfrak{u}_i)\subset\bigcap_{\gamma\in G_i}\gamma Q_i,$$

ce qui prouve évidemment (*) et termine la démonstration du lemme.

4.6. COROLLAIRE (*notations de* 4.5). — *Les applications suivantes :*

$$I\in Z(Q)\to(I+U(\mathfrak{g})Q)\cap U(\mathfrak{b}),$$
$$\bigcap_{\gamma\in B}\gamma\mathscr{I}\qquad\text{où}\quad\mathscr{I}\in\bar{Q}(\mathfrak{b})\to\operatorname{ind}(\mathscr{I},\mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g}),$$

sont des bijections réciproques de $Z(Q)$ *sur l'ensemble des B-orbites de* $\bar{Q}(\mathfrak{b})$. *Il en est de même des applications suivantes :*

$$I\in Z(Q)\to\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}((I+U(\mathfrak{g})Q)\cap U(\mathfrak{b})),$$
$$\bigcap_{\gamma\in B}\gamma\tilde{\mathscr{I}}\quad\text{où}\ \tilde{\mathscr{I}}\in Q(\mathfrak{b})\to\widetilde{\operatorname{ind}}\ (\tilde{\mathscr{I}},\mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g}).$$

C'est immédiat à partir de 4.4 (ii).

4.7. PROPOSITION. — *Soit* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à un idéal I de* $U(\mathfrak{g})$. *On note X le sous-ensemble de* $\mathfrak{g}^*$ *formé des éléments* λ *de* $\mathfrak{g}^*$ *vérifiant* $I_{\mathfrak{u}}(\lambda\,|\,\mathfrak{u})=Q$, *et Y le plus petit sous-ensemble G-stable de* $\mathfrak{g}^*$ *contenant X.*

(i) *L'intersection de l'ensemble des éléments de type unipotent de* $\mathfrak{g}^*$ *avec X* (*resp. Y*) *est une unique B-orbite* (*resp. G-orbite*) *notée* $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{O}$).

(ii) *Soit f un élément de* $\mathscr{B}$; *on note N* (*resp.* $G(f)$) *le sous-groupe de G unipotent d'algèbre de Lie* $\mathfrak{u}$ (*resp. stabilisant f*) *et* $\mathfrak{g}(f)$ *l'algèbre de Lie de* $G(f)$. *Alors on a :*

$$B=G(f)N\qquad\text{et}\qquad\mathfrak{b}=\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{u}.$$

(iii) *Soit* μ *un élément de X, alors il existe une composante de Lévi, notée* $\mathfrak{r}$, *de* $\mathfrak{b}$ *qui vérifie :*

$$\mu([\mathfrak{r},\mathfrak{u}])=0.$$

(i) On fixe un élément λ de X et on note $\mathfrak{u}^\perp$ (resp. $\mathfrak{b}^\perp$) l'orthogonal de $\mathfrak{u}$ (resp. $\mathfrak{b}$) dans $\mathfrak{g}^*$. Pour $i=-1,\ldots,t$, on note par $G_{i+1}(\lambda)$ le sous-groupe de G stabilisant la restriction de λ à $\mathfrak{u}_i$ et N_i le sous-groupe irréductible de $\mathfrak{g}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_i$. En utilisant de proche en proche le lemme [3], I.16 on voit que l'on a :

$$(1) \qquad G_{i+1}=G_{i+1}(\lambda)N_i \qquad \text{et} \qquad G_{t+1}(\lambda)\subset B.$$

On note $\mathfrak{g}'(\lambda)$ l'algèbre de Lie de $G_{t+1}(\lambda)$ et on a donc :

$$(2) \qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{g}'(\lambda)+\mathfrak{u}.$$

Soit $\mathfrak{r}$ une composante de Lévi de $\mathfrak{g}'(\lambda)$; c'est aussi une composante de Lévi de $\mathfrak{b}$ d'après (2) d'où l'égalité (3) :

$$(3) \qquad \mathfrak{b}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{u}.$$

Soit μ un élément de $\lambda+\mathfrak{u}^\perp$; alors μ est de type unipotent si et seulement si la restriction de μ à $\mathfrak{r}$ est nulle (*cf.* [3], 1.18 appliqué de proche en proche à $\mathfrak{u}_i$, puis [3], I.11); de proche en proche, on prouve l'égalité suivante grâce à [3], I.16 :

$$(4) \qquad \begin{aligned} N\cap G_{i+1}(\lambda)&=\mu+\mathfrak{g}_i^\perp \quad \text{où} \quad i=-1,\ldots,t,\\ N\cap G_{t+1}(\lambda)&=\mu+\mathfrak{b}^\perp. \end{aligned}$$

Il est alors clair que l'intersection de $\lambda+\mathfrak{u}^\perp$ avec l'ensemble des éléments de type unipotent de $\mathfrak{g}^*$ est une unique $G_{t+1}(\lambda)$-orbite. Rappelons l'inclusion de $G_{t+1}(\lambda)$ dans B (*cf.* (1)). Comme X et $B(\lambda+\mathfrak{u}^\perp)$ d'une part et Y et GX d'autre part coïncident, l'existence et l'unicité de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{O}$ sont alors claires.

(ii) Reprenons les notations de la démonstration de (i); puisque $\mathscr{B}$ coïncide avec l'ensemble des éléments de type unipotent appartenant à $B(\lambda+\mathfrak{u}^\perp)$, on suppose que f est dans $\lambda+\mathfrak{u}^\perp$. D'après (4), puis (i) et (1), on a :

$$(N\cap G_{t+1}(\lambda))\,G(f)\,f=f+\mathfrak{b}^\perp=(f+\mathfrak{u}^\perp)\cap Bf=G_{t+1}(\lambda)\,f.$$

C'est-à-dire, $G_{t+1}(\lambda)$ et $(N\cap G_{t+1}(\lambda))\,G(f)$ coïncident. Grâce à (1) pour $i=t$, on voit que G_{t+1} c'est-à-dire B coïncident avec $NG(f)=G(f)N$. L'assertion (ii) du lemme est alors claire.

(iii) Grâce à (i), on fixe un élément f de $\mathscr{B}$ tel que les restrictions de f et de μ à $\mathfrak{u}$ coïncident. Soit $\mathfrak{r}$ une composante de Lévi de $\mathfrak{g}(f)$ (notations de (ii)); on a évidemment :

$$\mu([\mathfrak{r},\mathfrak{u}])=f([\mathfrak{r},\mathfrak{u}])=0$$

d'où (iii).

4.8. LEMME (*notations de* 4.7). — *Soit* f *un élément de* $\mathscr{B}$; *on note* $\mathfrak{u}(f)_f$ *le sous-espace vectoriel de* $U(\mathfrak{g})$ *formé de l'ensemble des éléments* $u-f(u)$ *où* u *est dans* $\mathfrak{u}\cap\mathfrak{g}(f)$ *et* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}(f))_f$ *l'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g}(f))$ *contenant* $\mathfrak{u}(f)_f$. *On note* r *le scindage de* DUFLO (*cf.* [2], 10.15).

$$r:\quad U(\mathfrak{g}(f))/U(\mathfrak{g}(f))\,\mathfrak{u}(f)_f\otimes U(\mathfrak{u})/Q \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b})\,Q.$$

Soit ξ *un idéal de* $U(\mathfrak{g}(f))$ *contenant* $\mathfrak{u}(f)_f$, *alors en suivant* DUFLO, *on note* $\xi\circ Q$ *l'idéal de* $U(\mathfrak{b})$ *contenant* Q, *dont l'image dans* $U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b})\,Q$ *est* $r(\xi/U(\mathfrak{g}(f))\,\mathfrak{u}(f)_f\otimes U(\mathfrak{u})/Q)$. *Alors l'application* $\xi\mapsto\xi\circ Q$ *de* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}(f))_f$ *dans* $\bar{Q}(\mathfrak{b})$ (cf. 4.5) *est bijective et l'on a :*

$$\left(\bigcap\nolimits_{\gamma\in G(f)}\gamma\xi\right)\circ Q=\bigcap\nolimits_{\gamma\in B}\gamma(\xi\circ Q).$$

En utilisant [2], 10.1.5, puis 4.7 (ii), le lemme est immédiat.

4.9. LEMME. — *Soit* K *un idéal primitif de* $U(\mathfrak{g})$ *et on suppose que* K *est de la forme* $I_{f,\,\xi}$ (cf. *chapitre* 3) (*resp. est un idéal induit de* DUFLO *de la forme* $I(\lambda)$ *où* $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{PR}$ *Soit* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à un idéal* I *de* $U(\mathfrak{g})$. *Avec les notations de* 4.3, *on suppose que* $\mathfrak{u}_{-1},\ldots,\mathfrak{u}_j$ *et* $Q_{-1},\ldots,Q_j$ *sont les* $j+2$ *premiers termes d'une donnée de récurrence relativement à* K. *Alors il existe un élément* γ' *de* G *tel que l'on ait :*

$$Q_i=I_{\mathfrak{u}_i}((\gamma' f)\,|\,\mathfrak{u}_i)\qquad (\textit{resp.}\ =I_{\mathfrak{u}_i}((\gamma'\lambda)\,|\,\mathfrak{u}_i))\quad \textit{où}\ i=1,\ldots,j.$$

L'élément γ' *de* G *vérifiant ces conditions, on a alors, pour :*

$$i\leqq\inf(j,\,t-1),$$
$$(K+U(\mathfrak{g})\,Q_i)\cap U(\mathfrak{u}_{i+1})=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_{i+1}}\gamma I_{\mathfrak{u}_{i+1}}((\gamma' f)\,|\,\mathfrak{u}_{i+1}).$$
$$(\text{resp.}\ =\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_{i+1}}\gamma I_{\mathfrak{u}_{i+1}}((\gamma'\lambda)\,|\,\mathfrak{u}_{i+1})).$$

Avant de commencer la démonstration, rappelons que d'après [3], 4.9 et 4.5(ii) (resp. [2], 10.3.1), pour tout idéal unipotent noté $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, on a l'égalité suivante :

$$(*)\qquad K\cap U(\mathfrak{a})=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G}\gamma I_{\mathfrak{a}}(f\,|\,\mathfrak{a}).$$
$$(\text{resp.}\ =\bigcap\nolimits_{\gamma\in G}\gamma I_{\mathfrak{a}}(\lambda\,|\,\mathfrak{a})).$$

Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et γ un élément de G; on suppose que $\mathfrak{h}$ contient la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ stabilisant l'élément γf de $\mathfrak{g}^*$; et que la restriction de f à $\mathfrak{h}$ est de type unipotent (*cf.* [3], I) et on note $I_{f\,|\,\mathfrak{h},\,\xi}$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{h})$ associé par DUFLO au couple $(f\,|\,\mathfrak{h},\,\xi)$. On suppose que la restriction de λ à $\mathfrak{h}$ (notée $\lambda\,|\,\mathfrak{h}$) admet une polarisation résoluble, on note alors $I(\lambda\,|\,\mathfrak{h})$ l'idéal primitif induit de DUFLO de $U(\mathfrak{h})$ associé à $\lambda\,|\,\mathfrak{h}$.

Démontrons maintenant le lemme; dans le cas où $j=-1$, il résulte de $(*)$. Supposons maintenant que $j \geqq 0$; soit $h \leqq j$ et supposons que nous avons déjà démontré l'existence d'un élément, noté ici γ'', de G vérifiant, pour $i=1, \ldots, h-1$:

(1) $$Q_i = I_{\mathfrak{u}_i}((\gamma'' f)\,|\,\mathfrak{u}_i) \qquad (\text{resp. } I_{\mathfrak{u}_i}((\gamma''\lambda)\,|\,\mathfrak{u}_i)).$$

Grâce à ces relations et [3], 1.18 (resp. [2], 1.12.13) de proche en proche, $\mathfrak{g}_{i+1}$ contient la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ stabilisant $\gamma'' f$ et la restriction de $\gamma'' f$ à $\mathfrak{g}_{i+1}$ est de type unipotent (resp. $\gamma''\lambda\,|\,\mathfrak{g}_{i+1}$ admet une polarisation résoluble). On pose, pour $i=0, \ldots, h$:

$$I_i = I_{\gamma'' f\,|\,\mathfrak{g}_i\,\gamma\xi} \qquad (\text{resp. } = I(\gamma''\lambda\,|\,\mathfrak{g}_i)) \quad \text{et} \quad I_{-1} = K.$$

Grâce à [3], IV.9 (resp. [2], 10.1.3), on vérifie de proche en proche que l'on a, pour les mêmes valeurs de i :

(2) $$I_{i-1} = \operatorname{ind}^{\sim}(I_i,\, \mathfrak{g}_i \uparrow \mathfrak{g}).$$

On applique alors 4.2 à G_{i-1}, $\mathfrak{u}_{i-1}$, Q_{i-1} et on obtient, grâce à (2) les égalités (3) (ici $G_{-1}=G$) :

(3) $$\left(\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_{i-1}} \gamma I_{i-1}\right) + U(\mathfrak{g})\,Q_{i-1} = U(\mathfrak{g}_i)\,\tau_{\mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i}\left(\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_i} \gamma I_i\right).$$

En itérant (3) de $i=0$ à $i=h$, on obtient la relation suivante :

(4) $$K + U(\mathfrak{g})\,Q_{h-1} = U(\mathfrak{g})\,\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_h}\left(\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_h} \gamma I_h\right).$$

Par hypothèse, on a, puisque $h \leqq j$:

(5) $$(K + U(\mathfrak{g})\,Q_{h-1}) \cap U(\mathfrak{u}_h) = \bigcap\nolimits_{\gamma\in G_h} \gamma Q_h.$$

Or, la restriction de $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_h}$ à $U(\mathfrak{u}_h)$ est triviale (*cf.* 4.2), et alors (4), (5) et $(*)$ prouvent l'égalité suivante :

(6) $$\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_h} \gamma Q_h = \bigcap\nolimits_{\gamma\in G_h} \gamma I_{\mathfrak{u}_h}(\gamma'' f\,|\,\mathfrak{u}_h) \qquad (\text{resp. } \bigcap\nolimits_{\gamma\in G_h} \gamma I_{\mathfrak{u}_h}(\gamma''\lambda\,|\,\mathfrak{u}_h)).$$

Soit γ''' un élément de G_h, pour lequel les idéaux $\gamma''' I_{\mathfrak{u}_h}(\gamma'' f\,|\,\mathfrak{u}_h)$ (resp. $\gamma''' I_{\mathfrak{u}_h}(\lambda\,|\,\mathfrak{u}_h)$) et Q_h coïncident; on note $\gamma' = \gamma'''\gamma''$, et on remarque, grâce à l'inclusion de G_h dans tous les groupes G_i où $i=-1, \ldots, h-1$ que les relations (1) restent exactes en y remplaçant γ'' par γ'. Ainsi, γ' répond aux conditions du lemme. Soit un tel élément γ' et supposons que nous avons déjà démontré que l'on a, pour $i=0, \ldots, h-1$.

$$(7) \qquad \begin{cases} (K+U(\mathfrak{g})\,Q_{i-1}) \cap U(\mathfrak{u}_i) = \bigcap_{\gamma \in G_i} \gamma\, I_{\mathfrak{u}_i}(\gamma' f \mid \mathfrak{u}_i) \\ \qquad\qquad (\text{resp. } \bigcap_{\gamma \in G_i} \gamma\, I_{\mathfrak{u}_i}(\gamma\lambda \mid \mathfrak{u}_i)). \end{cases}$$

Grâce à l'analogue de (1) pour $i=h$ qui est maintenant connu, on en déduit, comme dans ce qui précède, l'analogue de (4) avec $h-1$ remplacé par h. On prend l'intersection avec $U(\mathfrak{u}_{h+1})$, en remarquant que la restriction de $\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{h+1}}$ à $U(\mathfrak{u}_{h+1})$ est triviale (*cf.* 4.2), on utilise (*) et on obtient la relation cherchée analogue de (7) en remplaçant i par $h+1$. Cela termine la démonstration du lemme.

4.10. THÉORÈME. — *Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$; on suppose que $I=I_{f,\,\xi}$ et que* $(\mathfrak{b}, Q)$ *est une donnée de récurrence relativement à I; soit $\mathscr{B}$ la B-orbite formée de l'ensemble des éléments de* $\mathfrak{g}^*$ *de type unipotent, vérifiant* $I_{\mathfrak{u}}(\lambda \mid \mathfrak{u}) = Q$ (cf. 4.7).

(i) *La G-orbite de f coïncide avec $G\mathscr{B}$.*

(ii) *On suppose que f est un élément de $\mathscr{B}$ et on note $G(f)$ le sous-groupe de G stabilisant f. Alors, on a, avec les notations de 4.8 :*

$$\left(\bigcap_{\gamma \in G(f)} \gamma\xi\right) \circ Q = \bigcap_{\gamma \in B} \gamma(\xi \circ Q) = \tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}^{-1}\left((I+U(\mathfrak{g})\,Q) \cap U(\mathfrak{b})\right),$$

ce qui détermine uniquement la $G(f)$-orbite de ξ.

(i) Reprenons les notations du lemme 4.9; on remarque qu'ici l'hypothèse assure que $j=t$; il existe donc un élément γ' de G tel que les idéaux $Q=Q_t$ et $I_{\mathfrak{u}}(\gamma' f \mid \mathfrak{u}) = I_{\mathfrak{u}_t}(\gamma' f \mid \mathfrak{u}_t)$ coïncident. Il est alors clair que $\gamma' f$ appartient à $\mathscr{B}$ ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) On reprend les notations de 4.3 et on remarque que la restriction de f à $\mathfrak{g}_i$ pour $i=0, \ldots, t$ est une forme linéaire de type unipotent, et on note $I_{f \mid \mathfrak{g}_i,\,\xi}$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_i)$ associé par DUFLO à la restriction de f à $\mathfrak{g}_i$ et à ξ. Grâce à [3], IV.9 on vérifie que l'on a :

$$\xi \circ Q = I_{f \mid \mathfrak{g}_t,\,\xi}$$

$$\operatorname{ind}^{\sim}(I_{f \mid \mathfrak{g}_{i+1},\,\xi} \circ \mathfrak{g}_{i+1} \uparrow \mathfrak{g}_i) = I_{f \mid \mathfrak{g}_i,\,\xi} \qquad \text{pour} \quad i=0, \ldots, t-1.$$

On voit donc que les idéaux $I_{f,\,\xi}$ et $\operatorname{ind}^{\sim}(\xi\circ Q,\, \mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g})$ coïncident. Grâce à 4.6, on obtient alors l'égalité suivante :

$$\bigcap\nolimits_{\gamma\in B}\gamma(\xi\circ Q)=\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}((I+U(\mathfrak{g})\,Q)\cap U(\mathfrak{b}))$$

et la démonstration du théorème se termine grâce à 4.8.

4.11. Proposition. — *Soient I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ et $(\mathfrak{b}, Q)$ une donnée de récurrence relativement à I. On note X l'ensemble des éléments λ de $\mathfrak{g}^*$ vérifiant $I_{\mathfrak{u}}(\lambda\,|\,\mathfrak{u})=Q$ et $\mathscr{B}$ l'unique B-orbite de X formée d'éléments de type unipotent. On fixe un élément f de $\mathscr{B}$ et on note $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ de la forme $I_{f,\,\xi}$.*

(i) *L'ensemble $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$ coïncide avec l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ qui admettent $(\mathfrak{b}, Q)$ comme donnée de récurrence, c'est-à-dire :*

$$Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)=\{K\in\operatorname{Prim}U(\mathfrak{g})\,|\,K\supset\operatorname{ind}(Q,\,\mathfrak{u}\uparrow\mathfrak{g})$$

et

$$K+U(\mathfrak{g})\,Q\neq U(\mathfrak{g})\}.$$

(ii) *On note GX par Y; soit λ un élément de $Y\cap\mathfrak{g}_{PR}^*$ alors l'idéal induit de* Duflo *$I(\lambda)$ appartient à $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$. Et réciproquement, tout idéal primitif induit de* Duflo *et appartenant à $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$ est associé à un élément de $Y\cap\mathfrak{g}_{PR}^*$.*

(iii) *Soit K un élément de $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$; alors il existe un unique idéal primitif induit de* Duflo *inclus dans K et appartenant à $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$.*

(iv) *On a :*

$$\operatorname{ind}(Q,\,\mathfrak{u}\uparrow\mathfrak{g})=\bigcap\nolimits_{\lambda\in Y\cap\mathfrak{g}_{PR}^*}I(\lambda)=\bigcap\nolimits_{K\in Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)}K.$$

(i) Soit K un élément de $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$ et on suppose que K est de la forme $I_{f,\,\xi}$. Tenant compte de 4.10(i), nous supposons que les idéaux $I_{\mathfrak{u}}(f\,|\,\mathfrak{u})$ et Q coïncident. Reprenons les notations de 4.3, pour $i=1,\ldots,t$, on a :

$$I_{\mathfrak{u}_i}(f\,|\,\mathfrak{u}_i)=I_{\mathfrak{u}}(f\,|\,\mathfrak{u})\cap U(\mathfrak{u}_i)=Q\cap U(\mathfrak{u}_i)=Q_i.$$

Revenons au lemme 4.9 et supposons que pour $j\geqq -1$, nous avons déjà démontré que $\mathfrak{u}_{-1},\ldots,\mathfrak{u}_j$ et $Q_{-1},\ldots,Q_j$ sont les $j+2$ premiers termes d'une suite de récurrence relativement à K. D'après le lemme 4.9, on a :

$$(K+U(\mathfrak{g})\,Q_j)\cap U(\mathfrak{u}_{j+1})=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G_{j+1}}\gamma\, I_{\mathfrak{u}_{j+1}}(f\,|\,\mathfrak{u}_{j+1}).$$

En utilisant l'égalité de $I_{\mathfrak{u}_{j+1}}(f|\mathfrak{u}_{j+1})$ et de Q_{j+1}, cela démontre que $\mathfrak{u}_{-1}, \ldots, \mathfrak{u}_{j+1}$ et $Q_{-1}, \ldots, Q_{j+1}$ sont les $j+3$ premiers termes d'une donnée de récurrence relativement à K. On déduit immédiatement de cela l'inclusion de $Z_{\mathfrak{g}}^{\text{prim}}(f)$ dans l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ admettant $(\mathfrak{b}, Q)$ comme donnée de récurrence. L'inclusion inverse est une reformulation de 4.10(i). Et on termine la démonstration de (i) grâce à 4.5.

(ii) Soit λ un élément de $Y \cap \mathfrak{g}_{PR}^*$; en changeant éventuellement λ en un élément de la B-orbite de λ, on suppose que les restrictions de λ et de f à $\mathfrak{u}$ coïncident. On reprend les notations de 4.3 et on vérifie de proche en proche, grâce à [2], 1.12.13 que la restriction de λ à $\mathfrak{g}_i$ (où $i=0, \ldots, t$) admet une polarisation résoluble puis, grâce à [2], 10.3.1 que la restriction de λ à $\mathfrak{g}(f)$ admet une polarisation résoluble; on note ξ l'idéal de $U(\mathfrak{g}(f))$ induit de Duflo associé à $\lambda|\mathfrak{g}(f)$ et on vérifie facilement que ξ contient $\mathfrak{u}(f)_f$ (notation de 4.9); remontant les étapes en sens inverse, on constate que les idéaux $I(\lambda)$ et $\mathrm{ind}^{\sim}(\xi \circ Q, \mathfrak{b} \uparrow \mathfrak{g})$ coïncident (*cf.* [2], 10.2.1 et [2], 10.3.1). Alors 4.6 et 4.10 montrent que les idéaux $I(\lambda)$ et $I_{f,\,\xi}$ sont égaux; cela démontre la première partie de (ii); la deuxième partie résulte de 4.9 pour $j=t$.

(iii) Soient K_1 et K_2 des idéaux de $Z_{\mathfrak{g}}^{\text{prim}}(f)$, c'est-à-dire d'après (i), des idéaux admettant $(\mathfrak{b}, Q)$ comme donnée de récurrence, pour $j=1$ ou 2. On fixe des idéaux primitifs $\mathscr{I}_j$ de $\bar{Q}(\mathfrak{b})$ (*cf.* 4.6) vérifiant :

$$\bigcap\nolimits_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}_j = (K_j + U(\mathfrak{g})\, Q) \cap U(\mathfrak{b}).$$

Il est facile de voir que dans $\bar{Q}(\mathfrak{b})$, il existe une et une seule B-orbite formée d'idéaux induit de Duflo de la forme $\bigcap_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}'$ et vérifiant :

$$\bigcap\nolimits_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}' \subset \bigcap\nolimits_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}_2.$$

Grâce à 4.4 (iii) et 4.6, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- $K_1 \subset K_2$ et K_1 est un idéal induit de Duflo;
- $\bigcap_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}_1 = \bigcap_{\gamma \in B} \gamma \mathscr{I}'$.

Cela termine la démonstration de (iii).

(iv) On note $\mathfrak{b}_{PR}^*(Q)$ l'ensemble des formes linéaires admettant une polarisation résoluble définies sur $\mathfrak{b}$ dont la restriction à $\mathfrak{u}$ notée ν vérifie

$I_{\mathfrak{u}}(\nu)=Q$. Soit μ un élément de $\mathfrak{b}^*_{PR}(Q)$, on note $I_{\mathfrak{b}}(\mu)$ l'idéal primitif induit de DUFLO associé à μ. On a :

$$U(\mathfrak{b})\,Q=\bigcap_{\mu\in\mathfrak{b}^*_{PR}(Q)} I_{\mathfrak{b}}(\mu).$$

En utilisant les propriétés de l'induction, puis (ii) et 4.6 (iii), on obtient :

$$\operatorname{ind}(Q,\mathfrak{u}\uparrow\mathfrak{g})=\operatorname{ind}^{\sim}(U(\mathfrak{b})\,Q,\mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g})=\bigcap_{\mu\in\mathfrak{b}^*_{PR}(Q)}\operatorname{ind}^{\sim}(I_{\mathfrak{b}}(\mu),\mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{g})$$
$$=\bigcap_{\lambda\in Y\cap\mathfrak{g}^*_{PR}} I(\lambda).$$

La démonstration de (iv) se termine alors grâce à (iii).

4.12. PROPOSITION. — *Soient* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à un idéal* I *de* $U(\mathfrak{g})$, *et* λ *un élément de* $\mathfrak{g}^*_{PR}$ *vérifiant* $I_{\mathfrak{u}}(\lambda\,|\,\mathfrak{u})=Q$; *on fixe un élément de type unipotent, noté* f, *dont la restriction à* $\mathfrak{u}$ *coïncide avec celle de* λ *et une composante de Lévi de* $\mathfrak{b}$, *notée* $\mathfrak{r}$, *vérifiant* $f([\mathfrak{r},\mathfrak{g}])=0$ (cf. 4.7). *Soit* $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* λ; *on note* $\mathfrak{p}_\lambda$ *le sous-espace vectoriel de* $U(\mathfrak{g})$ *formé de l'ensemble des éléments* $P-(\lambda+1/2\ \mathrm{trace}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}})(P)$ *où* $P\in\mathfrak{p}$.

Il existe une polarisation résoluble de λ, *notée* $\mathfrak{p}$, *vérifiant les conditions suivantes :*

$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{u}$ *est une polarisation de la restriction de* λ *à* $\mathfrak{u}$;

$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{r}$ *est une sous-algèbre de Borel de* $\mathfrak{r}$ *telle que la restriction de* λ *à* $\mathfrak{r}$ *est dominante relativement à* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{r}$.

Soient $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* λ *vérifiant ces conditions et* K *un idéal primitif de* $U(\mathfrak{g})$ *contenant* $I(\lambda)$; *alors l'idéal* K *appartient à* $Z^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{g}}(f)$ *si et seulement si l'idéal à gauche* $K+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$ *de* $U(\mathfrak{g})$ *est propre; l'application* $K\mapsto K+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$ *de l'ensemble des idéaux de* $Z^{\mathrm{prim}}_{\mathfrak{g}}(f)$ *contenant* $I(\lambda)$ *dans l'ensemble des idéaux à gauche de* $U(\mathfrak{g})$ *est injective.*

On démontre d'abord l'existence de $\mathfrak{p}$; utilisant [2], 1.12.13, le proche en proche, on voit que la restriction de λ à $\mathfrak{b}$ admet une polarisation résoluble qui, considérée comme sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, est aussi une polarisation résoluble de λ. Rappelons que nous avons $\mathfrak{b}=\mathfrak{r}+\mathfrak{u}$; on fixe une sous-algèbre de Borel, notée $\mathfrak{b}^+$, de $\mathfrak{r}$ telle que la restriction de λ à $\mathfrak{r}$ soit dominante relativement à $\mathfrak{b}^+$ et on note B^+ le sous-groupe irréductible de B d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}^+$. Puisque l'on a $\lambda([\mathfrak{r},\mathfrak{u}])=f([\mathfrak{r},\mathfrak{u}])=0$, le groupe B^+ agit dans la variété complète formé des polarisations de la restriction de λ à $\mathfrak{u}$; soit $\mathfrak{n}$ un point fixe pour cette action de B^+; il résulte alors de [2], 10.3.1, que $\mathfrak{b}^++\mathfrak{n}$ est une polarisation résoluble de la restriction de λ à $\mathfrak{b}$ (donc de λ d'après le début de la démonstration) elle satisfait, évidemment, aux conditions voulues.

Avant de terminer la démonstration de la proposition, donnons quelques notations.

On note r le scindage de DUFLO [2], 10.1.5, suivant :

$$r: \quad U(\mathfrak{r})\otimes U(\mathfrak{u})/Q \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b})\,Q \qquad (\text{où } Q = I_{\mathfrak{u}}(\lambda/u)).$$

Soit p une polarisation de λ satisfaisant aux conditions de l'énoncé, on pose $\mathfrak{b}_\lambda^+$ (resp. $\mathfrak{n}_\lambda$) le sous-k-espace vectoriel de $U(\mathfrak{r})$ (resp. $U(\mathfrak{u})$) engendré par l'ensemble des éléments $P-(\lambda+1/2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{n}/\mathfrak{b}^+})(P)$ où $P\in\mathfrak{p}\cap\mathfrak{u}$ (resp. $P-\lambda(P)$ où $P\in\mathfrak{p}\cap\mathfrak{u}$).

On remarque que l'idéal à gauche $U(\mathfrak{b})$ (resp. $U(\mathfrak{u})\,\mathfrak{n}_\lambda$) de $U(\mathfrak{b})$ (resp. $U(\mathfrak{u})$) contient l'idéal $U(\mathfrak{b})\,Q$ (resp. Q) de $U(\mathfrak{b})$ (resp. $U(\mathfrak{u})$) et d'après [2], 10.2.1, démonstration c), on a :

$$(1) \qquad r(U(\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}_\lambda^+\otimes U(\mathfrak{u})\,\mathfrak{n}_\lambda/Q) = \tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(U(\mathfrak{b})\,\mathfrak{p}_\lambda/U(\mathfrak{b})\,Q).$$

On note $G(f)$ le sous-groupe de G stabilisant f et $\mathfrak{g}(f)$ l'algèbre de Lie de $G(f)$; on sait (*cf.* 4.7(ii)) que $G(f)$ est inclus dans B et que $\mathfrak{r}$ est une composante de Lévi de $\mathfrak{g}(f)$. On note $G''(f)$ le sous-groupe de $G(f)$ qui laisse stable $\mathfrak{r}$, puis $G'(f)$ le sous-groupe de $G''(f)$ qui laisse stable $\mathfrak{b}^+$. En notant $G(f)^0$ la composante neutre de $G(f)$, les théorèmes de conjugaison pour les composantes de Lévi et pour les sous-algèbre de Borel montrent que l'on a :

$$(2) \qquad G(f) = G''(f)\,G(f)^0 = G'(f)\,G(f)^0.$$

En outre, on identifiera naturellement un idéal propre de $U(\mathfrak{g}(f))$ contenant $\mathfrak{u}(f)_f$ (*cf.* 4.8) noté ξ en un idéal de $U(\mathfrak{r})$ noté par la même lettre ξ et $\bigcap_{\gamma\in G(f)}\gamma\xi$ à $\bigcap_{\gamma\in G'(f)}\gamma\xi$. Soit K un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ et on suppose que K est un élément de $Z_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{prim}}(f)$; on note dans ce cas $\bigcap_{\gamma\in G'(f)}\gamma\xi(K)$, l'unique $G'(f)$ orbite de $\mathrm{Prim}\,U(\mathfrak{r})$ obtenue grâce à 4.10(ii). Remarquons, aussi, que si K est l'idéal $I(\lambda)$, en notant $I(\lambda|\mathfrak{r})$ l'idéal primitif induit de DUFLO de $U(\mathfrak{r})$ associé à la restriction de λ à $\mathfrak{r}$, on a :

$$\bigcap_{\gamma\in G'(f)}\gamma\xi(I(\lambda)) = \bigcap_{\gamma\in G'(f)}\gamma I(\lambda\,|\,\mathfrak{r}).$$

Supposons, en outre, que l'idéal K contient $I(\lambda)$, alors on supposera aussi que l'idéal $\xi(K)$ contient $I(\lambda\,|\,\mathfrak{r})$. On note $G(f)_\lambda$ le sous-groupe de $G'(f)$ qui laisse stable l'idéal $I(\lambda\,|\,\mathfrak{r})$ et prouvons l'assertion suivante :

(3) Soit ξ un idéal primitif de $U(\mathfrak{r})$ contenant $I(\lambda\,|\,\mathfrak{r})$, alors on a :

$$\bigcap\nolimits_{\gamma\in G'(f)}\gamma\xi+U(\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}_\lambda^+=\bigcap\nolimits_{\gamma\in G(f)_\lambda}\gamma\xi+U(\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}_\lambda^+.$$

En effet, soient $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ des éléments de $G'(f)$ tels que l'ensemble des idéaux $\gamma_1\xi,\ldots,\gamma_m\xi$ coïncide avec l'ensemble des idéaux $\gamma\xi$ où $\gamma\in G(f)$ qui ne contiennent pas $I(\lambda\,|\,\mathfrak{r})$; alors il existe un élément, noté z, du centre de $U(\mathfrak{r})$ qui vérifie :

$$z\in(\bigcap\nolimits_{i=1}^m(\gamma_i\xi))-I(\lambda\,|\,\mathfrak{r}).$$

Or, on sait que l'on a :

$$z\in k+U(\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}_\lambda^+.$$

Cela prouve l'assertion :

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. Soit K un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$; en utilisant l'inclusion de $U(\mathfrak{g})\,Q$ dans $U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$, on écrit $K+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$ sous la forme $(K+U(\mathfrak{g})\,Q)+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$. Il est alors clair que si $K+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda$ est un idéal à gauche propre de $U(\mathfrak{g})$, il en est de même de $K+U(\mathfrak{g})\,Q$ et, d'après 4.11, dans ce cas, K est un élément de $Z_\mathfrak{g}^{\mathrm{prim}}(f)$. Supposons maintenant que K appartient à $Z_\mathfrak{g}^{\mathrm{prim}}(f)$; alors d'après 4.6, 4.11 (ii) et (1), (2), (3), on a :

$$\begin{aligned}&(K+U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{p}_\lambda)/U(\mathfrak{g})\,Q\\&\qquad=U(\mathfrak{g})\,\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}^{-1}\,r\,((\bigcap\nolimits_{\gamma\in G(f)_\lambda}\gamma\xi(K)+U(\mathfrak{r})\,\mathfrak{b}_\lambda^+)\otimes U(\mathfrak{u})\,\mathfrak{n}_\lambda/Q).\end{aligned}$$

Alors la proposition résulte de [4], 4. 3.

Remarquons que nous avons aussi démontré la proposition suivante :

4.13. PROPOSITION. — *Soient* $(\mathfrak{b}, Q)$ *une donnée de récurrence relativement à un idéal* I *de* $U(\mathfrak{g})$ *et* λ *un élément de* $\mathfrak{g}_{PR}^*$ *vérifiant* $I_\mathfrak{u}(\lambda\,|\,\mathfrak{u})=Q$; *on fixe un élément de type unipotent noté* f *dont la restriction à* $\mathfrak{u}$ *coïncide avec celle de* λ *et une composante de Lévi de* $\mathfrak{b}$, *notée* $\mathfrak{r}$, *vérifiant* $f([\mathfrak{r},\mathfrak{g}])=0$. *On choisit une sous-algèbre de Borel de* $\mathfrak{b}$ *notée* $\mathfrak{b}^+$ *et on note* $G(f)_\lambda$ *le sous-groupe de* B *qui laisse invariant* f, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{b}^+$ *et l'idéal induit de* DUFLO *associé à la restriction de* λ *à* $\mathfrak{r}$.

On note r *le scindage de* DUFLO *suivant :*

$$r:\quad U(\mathfrak{r})\otimes U(\mathfrak{u})/Q\xrightarrow{\sim}U(\mathfrak{b})/U(\mathfrak{b})\,Q\qquad \text{où}\quad Q=I_\mathfrak{u}(\lambda\,|\,\mathfrak{u}).$$

On note $Z_{\mathfrak{g}}^{\text{prim}}(f)_\lambda$ *(resp.* $U(\mathfrak{r})_\lambda$*) l'ensemble des éléments de* $Z_{\mathfrak{g}}^{\text{prim}}(f)$ *(resp.* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{r})$*) contenant* $I(\lambda)$ *(resp.* $I(\lambda\,|\,\mathfrak{r})$*) et alors l'application de* $Z_{\mathfrak{g}}^{\text{prim}}(f)_\lambda$ *dans l'ensemble des* $G(f)_\lambda$*-orbites de* $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{r})_\lambda$ *définie par :*

$$K \mapsto r^{-1}(\tau_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}^{-1}((K+U(\mathfrak{g})\,Q)\cap U(\mathfrak{b})))/U(\mathfrak{b})\,Q,$$

est bijective.

4.14. PROPOSITION. — *Soit* Λ *une* G*-orbite de* $\mathfrak{g}_{PR}^*$ *on note* $I(\Lambda)$ *l'idéal induit de* DUFLO *associé à* Λ *et* $I(\Lambda)^0$ *l'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *qui contiennent* $I(\Lambda)$ *et admettent une donnée de récurrence qui en soit aussi une pour* $I(\Lambda)$.

(i) *L'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *est une réunion disjointe des ensembles* $I(\Lambda)^0$ *où* Λ *parcourt l'ensemble des* G*-orbites de* $\mathfrak{g}_{PR}^*$.

(ii) *L'ensemble* $I(\Lambda)^0$ *a un unique plus grand élément noté* $I(\Lambda)^{\max}$ *et on a :*

$$I(\Lambda)^0 = \{\,K \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}) \,|\, I(\Lambda) \subset K \subset I(\Lambda)^{\max}\,\},$$

(i) Soient Λ une G-orbite de $\mathfrak{g}_{PR}^*$ et K un élément de $I(\Lambda)^0$. On note λ un élément de $\mathfrak{g}_{PR}^*$ et on suppose que K contient $I(\lambda)$ et que K et $I(\lambda)$ admettent une même donnée de récurrence, notée $(\mathfrak{b}, Q)$. D'après 4.10(i) on sait qu'il existe une forme linéaire de type unipotent, notée f, et des idéaux primitifs notés ξ_1, ξ_2, ξ_3 de $U(\mathfrak{g}(f))$ vérifiant :

$$K = I_{f,\,\xi_1}, \qquad I(\lambda) = I_{f,\,\xi_2}, \qquad I(\Lambda) = I_{f,\,\xi_3}.$$

Reprenons les notations de 4.3; comme $(\mathfrak{b}, Q)$ est une donnée de récurrence pour K, grâce à 4.9, on peut supposer que l'on a :

$$Q_i = I_{\mathfrak{u}_i}(f\,|\,\mathfrak{u}_i) \qquad \text{pour } i=1,\ldots,t.$$

Il est alors clair que $(\mathfrak{b}, Q)$ est une donnée de récurrence pour $I(\Lambda)$. D'après 4.10(ii), puis 4.4(ii), on a :

(1) $$\bigcap\nolimits_{\gamma\in G(f)} \gamma\xi_1 \supset \bigcap\nolimits_{\gamma\in G(f)} \gamma\xi_i \qquad \text{où } i=2 \text{ ou } 3.$$

(2) ξ_i est un idéal induit de DUFLO dans $U(\mathfrak{g}(f))$ pour $i=2$ ou 3.

On note $\mathfrak{u}(f)$ l'intersection de $\mathfrak{g}(f)$ et de $\mathfrak{u}$; c'est le radical unipotent de $\mathfrak{g}(f)$ d'après 4.7(iii), et l'on a :

(3) $$Q \cap U(\mathfrak{u}(f)) = \xi_i \cap U(\mathfrak{u}(f)) \qquad \text{où } i=1, 2, 3,$$

(4) $$U(\mathfrak{u}(f))/Q \cap U(\mathfrak{u}(f)) = k.$$

Grâce aux relations (1)...(4), on déduit l'égalité suivante :

$$\bigcap_{\gamma \in G(f)} \gamma\xi_2 = \bigcap_{\gamma \in G(f)} \gamma\xi_3,$$

c'est-à-dire :

$$I(\lambda) = I(\Lambda).$$

(ii) Reprenons la démonstration de (i); il existe un unique, à conjugaison près par $G(f)$, idéal primitif maximal de $U(\mathfrak{g}(f))$ noté $\xi^{\max}$ et vérifiant :

$$\xi^{\max} \cap U(\mathfrak{u}(f)) = Q \cap U(\mathfrak{u}(f)),$$

$$\bigcap_{\gamma \in G(f)} \gamma\xi^{\max} \supset \bigcap_{\gamma \in G(f)} \gamma\xi_1.$$

Cela montre que l'idéal primitif $I_{f,\,\xi^{\max}}$ de $U(\mathfrak{g})$ est l'unique élément maximal de $I(\Lambda)^0$. Soit maintenant L un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ et on suppose que l'on a :

$$I(\Lambda) \subset L \subset I(\Lambda)^{\max}.$$

Ces inclusions entraînent les inclusions suivantes :

$$I(\Lambda) + U(\mathfrak{g})\,Q \subset L + U(\mathfrak{g})\,Q \subset I(\Lambda)^{\max},$$

et (ii) résulte alors de 4.11 (i).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, chapitre 8, Hermann, Paris, 1973.

[2] DIXMIER (J.). — *Algèbres Enveloppantes*, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[3] DUFLO (M.). — *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques* (à paraître) in *Acta Mathematica.*

[4] JOSEPH (A.). — Dixmier's problem for Verma and principal series submodules, *J. London Math. Soc.*, 120, 1979, p. 193 à 204.

[5] MOEGLIN (C.) et RENTSCHLER (R.). — Orbites d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux rationnels d'une algèbre enveloppante, *Bull. Soc. Math. France*, t. 109, 1981, p. 403-426.

[6] MOEGLIN (C.). — Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, *J. Math. pures et appl.*, t. 59, 1980, p. 265 à 336.