BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHAEL R. HERMAN

Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 93-142

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__93_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 93-142.

EXEMPLES DE FRACTIONS RATIONNELLES AYANT UNE ORBITE DENSE SUR LA SPHÈRE DE RIEMANN

PAR

Michael. R. HERMAN (*)

RÉSUMÉ. — En utilisant le théorème de Sullivan de non-existence de domaine errant, nous proposons de donner une méthode générale de construction de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann. Cette méthode illustre une possibilité de disparition de domaines singuliers de fractions rationnelles (disques ou anneaux) quand « les nombres de rotation deviennent des nombres très Liouville ». Dans l'annexe nous donnons une démonstration simple de l'existence locale des anneaux (théorème de Arnold) et des disques (théorème de Siegel) de nombre de rotation de type constant. Nous obtenons aussi très simplement le résultat de Arnold de dépendance analytique par rapport à des paramètres analytiques.

ABSTRACT. — Using Sullivan's non wandering domain theorem, we give a general method to construct rational functions having a dense orbit on the Riemann sphere. This method illustrates one possibility of how singular domains of rational functions (rings or disks) can vanish when "the rotation numbers become very Liouville numbers". In the annex we give a simple proof of the local existence of rings (Arnold's theorem) and disks (Siegel's theorem) when the rotation number is of constant type. We also obtain Arnold's result on analytic dependance on analytic parameters.

Notations, introduction

NOTATIONS

On pose $\mathbb{T}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qu'on identifie à $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}$ par l'application $t\to e^{2\pi i t}$. Si $f: X\to X$ est une application, on dit que $x\in X$ est un point fixe de f, périodique de période q de f, prépériodique par f; si $f(x)=x$,

(*) Texte reçu le 25 novembre 1983, révisé le 26 janvier 1984.

M. R. HERMAN, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Laboratoire Associé au C.N.R.S., n° 169, 91128 Palaiseau Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1984/01 93 50/$ 7,00

$f^q(x)=x$ et q est le plus petit entier $\geqslant 1$ vérifiant cette condition, s'il existe un entier $k\geqslant 1$, tel que $f^k(x)$ soit périodique. (Dans la suite, si $n\in\mathbb{N}$, $f^n=f\circ\ldots\circ f$ n fois.)

Un sous-ensemble $Y\subset X$ est dit sous-invariant si $f(Y)\subset Y$, invariant si $f(Y)=Y$, totalement invariant si $f(Y)=Y$ et $f^{-1}(Y)=Y$. Un sous-ensemble $Y\subset X$ est dit périodique par f, prépériodique par f (parmi les sous-ensembles de X) s'il existe un entier $q\geqslant 1$ tel que X soit invariant par f^q, s'il existe un entier $k\geqslant 1$, tel que $f^k(Y)$ soit périodique par f.

Si X est une variété complexe de dimension 1, $f: X\rightarrow X$ une application holomorphe et x un point de période q, on appelle multiplicateur en x de f, la valeur de $Df^q(x)$ (qui ne dépend pas de la carte holomorphe qu'on choisit), où D désigne la dérivée, par rapport à $\mathbb{C}$, dans une carte. Le point périodique x est dit attractif (resp. répulsif) (resp. elliptique) si $|Df^q(x)|<1$ (resp. $|Df^q(q)|>1$) (resp. $|Df^q(x)|=1$).

Un nombre $\alpha\in\mathbb{R}$ satisfait à une condition diophantienne s'il existe $\gamma>0$ et $\beta\geqslant 0$ tel que pour tout $p/q\in\mathbb{Q}$ on ait $|\alpha-(p/q)|\geqslant\gamma/q^{2+\beta}$.

Un nombre α est de type constant s'il existe $\gamma>0$, tel que pour tout $p/q\in\mathbb{Q}$, on ait $|\alpha-(p/q)|\geqslant\gamma\, q^{-2}$.

L'ensemble des nombres de type constant est noté par TC.

Un nombre $\alpha\in\mathbb{R}$ est un nombre de Liouville si $\alpha\notin\mathbb{Q}$ et α ne satisfait pas à une condition diophantienne.

Un nombre est dit « très » Liouville s'il satisfait à la conclusion de la proposition de VIII. 15.

$\alpha\in TC \Leftrightarrow$ le développement en fractions continues de α vérifie :

$$\alpha=a_0+1/(a_1+1)/(a_2+\ldots),\qquad a_0\in\mathbb{Z},\quad a_i\in\mathbb{N}^*,$$
$$\sup_{1\leqslant i} a_i=M<+\infty$$

et on a :

$$\frac{1}{M+2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{1}{M}\qquad\text{avec}\quad \gamma=\mathrm{Inf}_{p/q}\, q^2\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

INTRODUCTION

En utilisant le théorème de D. Sullivan [S] sur la non-existence des domaines errants nous proposons de démontrer l'existence d'un ensemble non dénombrable de fractions rationnelles de $\mathbb{S}^2$ de degré 3, ayant sur $\mathbb{S}^2$

une orbite dense [1], et non 2 à 2 topologiquement conjuguées. De plus, aucun de ces exemples n'est topologiquement conjugué aux exemples de Lattès. Ces exemples de fractions rationnelles que nous construisons laissent invariant le cercle $\mathbb{S}^1$ et ont deux points fixes elliptiques en 0 et ∞. Par une perturbation aussi petite qu'on veut, on peut obtenir une fraction rationnelle ayant trois domaines singuliers : 2 disques au voisinage de 0 et de ∞ et un anneau autour de $\mathbb{S}^1$. Ces exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$, sont une manifestation de la disparition des théorèmes des petits diviseurs et le triomphe des nombres « très » Liouville, ce qui s'accompagne, ainsi qu'il est bien connu [F-H], de comportements chaotiques.

En VII, nous construisons d'autres exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$. Le principe en est le même (et plus simple) et illustre la « disparition » du théorème de Siegel.

Dans l'appendice VIII, nous avons inclus, pour la commodité du lecteur, la démonstration de l'existence des anneaux de nombres de rotation constant, ainsi que la démonstration du corollaire III.10. Nous avons aussi inclus de nombreux corollaires et nous renvoyons le lecteur à l'introduction de VIII.

REMERCIEMENTS

Je remercie Adrien Douady, John Hamal Hubbard, ainsi que Dennis Sullivan pour de nombreuses et fructueuses discussions. Je remercie Bruce Knight de m'avoir signalé en 1973 que Jürgen Moser avait introduit des fractions rationnelles qui laissent invariant $\mathbb{S}^1$ et qui sont des difféomorphismes $\mathbb{R}$-analytiques de $\mathbb{S}^1$ et ceci en vue de donner des exemples de difféomorphismes du cercle qui ont la propriété A_0 (*cf.* III.6). Je remercie Raphaël Douady de m'avoir aidé à relire la version préliminaire, ainsi que Marie-Jo Lécuyer d'avoir tapé avec grand soin le manuscrit.

I. Rappels sur les fractions rationnelles

1. On désigne par $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann avec sa structure complexe canonique ($\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$). Soit f une fraction rationnelle, ou

[1] Adrien Douady et Hamal Hubbard ont obtenu de nombreux exemples en degré 2 par la méthode d'accouplement.

application holomorphe de $\mathbb{S}^2$ dans lui-même, de degré $d \geqslant 2$ (le degré de f étant aussi le degré topologique de $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$).

On désigne par $J(f)$ l'ensemble de Julia de $f(x \notin J(f)$ s'il existe un ouvert $U \ni x$ tel que la suite $(f^n{}_{|U})_{n \in \mathbb{N}}$ soit une famille normale, ou, ce qui revient au même, est d'adhérence compacte pour la topologie compacte ouverte sur $C^0(U, \mathbb{S}^2)$).

G. Julia et P. Fatou ([F], § 26 et 27) ont montré (*voir* aussi Brolin [B]) :

(*a*) L'ensemble compact $J(f)$ est non vide, sans point isolé et si $J(f) \neq \mathbb{S}^2$ alors $J(f)$ est sans point intérieur dans $\mathbb{S}^2$.

(*b*) $J(f^n) = J(f)$, si $n \geqslant 1$.

(*c*) L'ensemble fermé $J(f)$ est totalement invariant par f (i. e. $f(J(f)) = J(f)$ et $f^{-1}(J(f)) = J(f)$).

(*d*) L'ensemble $J(f)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs.

(*e*) Pour tout $x \in J(f)$ l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(x)$ est dense dans $J(f)$. Par II cela implique que pour x appartenant à un G_δ dense de $J(f)$, l'orbite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $J(f)$.

2. D. Sullivan [S] a montré que si C est une composante connexe de $\mathbb{S}^2 - J(f)$ non vide, alors C est une composante prépériodique (i. e. il existe $k \geqslant 0$, $q > 0$, tel que si $n \geqslant 0$, $f^{nq+k}(C) = f^k(C)$). P. Fatou ([F], § 30, p. 60-61) avait déjà montré le cas particulier suivant : si on désigne par E'_c l'ensemble dérivé [2] de l'orbite $E_c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathrm{Crit}(f))$ où $\mathrm{Crit}(f)$ désigne l'ensemble des points critiques de f (l'ensemble des $z \in \mathbb{S}^2$ tels que l'application tangente $T_z f$ de $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ne soit pas un isomorphisme) alors, si E'_c est fini et si f n'a pas de point périodique elliptique non linéarisable de multiplicateur $e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, toute composante C est prépériodique.

3. Classification des composantes de $\mathbb{S}^2 - J(f)$ prépériodiques par f

Soit C une composante connexe non vide de $\mathbb{S}^2 - J(f)$ périodique de période q.

Il y a deux possibilités pour la suite $(f^{nq}{}_{|C})_{n \in \mathbb{N}}$:

(*a*) *Domaine de Fatou*

Toutes les fonctions limites de la suite $(f^{nq}{}_{|C})_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes ($\in \bar{C}$). Alors Fatou montre ([F], § 30 et 58) que la suite $(f^{nq}{}_{|C})_{n \in \mathbb{N}}$ converge

---

[2] E'_c est l'ensemble ω-limite par f des points critiques de f.

localement uniformément sur C vers $x \in \bar{C}$, qui est un point fixe de f^q et le multiplicateur de x, $m = Df^q(x)$, vérifie $|m| \leqslant 1$ et de plus, si $|m| = 1$, alors $m = 1$ ([F], § 58 et 56) (pour une autre démonstration de ce résultat de Fatou, *voir* [S_1], prop. 4). Il résulte de [F], § 30, qu'il existe un point critique c de f^q (i. e.

$$c \in \bigcup_{0 \leqslant j \leqslant q-1} f^{-j}(\mathrm{Crit}(f)))$$

tel que $c \in C$, et si $n \to +\infty$, $f^{nq}(c) \to x$. (Fatou montre qu'il existe une valeur critique de f^q appartenant à C. En utilisant le fait que, si $f^q_{|C}$ est sans point critique, alors $f^q_{|C} : C \to C$ est un revêtement, les mêmes démonstrations que Fatou montrent qu'un point critique de f^q appartient à C.)

De plus pour tout ouvert $U \neq \varnothing$ vérifiant $U \subset C$ et $\bar{U} \subset C$, où $\bar{U}$ est l'adhérence de U dans $\mathbb{S}^2$, alors si $n \to +\infty$, $f^{nq}(U) \to x$.

Si le multiplicateur $Df^q(x) = m$ vérifie $|m| < 1$, alors $x \in C$ et x est l'unique point fixe de $f^q : C \to C$. Si $m \neq 0$, il existe un point critique c de f^q tel que $c \in C$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{nq}(c) \neq x$ (*voir* [B], la démonstration du théorème 3.1).

Tout point périodique x de f de multiplicateur m, de module < 1, donne lieu à une composante avec les propriétés ci-dessus. Il en est de même si m est une racine de l'unité, à cette différence près que, même si x est un point fixe, il peut y avoir plusieurs composantes associées à f (*voir* [F], § 10 et 11).

Attention. — f^q peut avoir un point fixe $y \in \bar{C}$ de multiplicateur de module 1, non racine de l'unité, mais y n'a pas toutes les propriétés ci-dessus.

Exemple. — $f(z) = \lambda z + z^2$ avec $|\lambda| = 1$, $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et vérifiant VIII.15. Alors 0 est un point fixe elliptique qui appartient à l'adhérence du bassin d'attraction de ∞ (puisque $0 \in J(f)$).

Remarques. — 1. Il se peut qu'un point critique c soit un point périodique de f (i. e. $c = x$) ainsi que le montre l'exemple $z \mapsto z^2$.

2. L'exemple $f : z \mapsto \lambda z(1-z)^2$, $|\lambda| < 1$, montre que le point critique $z = 1$ vérifie $f(1) = 0$, bien que 0 soit un point fixe attractif. L'autre point critique de f, $c = 1/3$, vérifie $c \in C$ où C est la composante connexe contenant 0 du bassin d'attraction de 0 (i. e. $\{z \mid f^n(z) \to 0$, si $n \to +\infty\}$).

3. Si $f(z) = z + z^p + \ldots, p \geqslant 2$ est une fraction rationnelle, alors au point fixe 0 sont associés $p-1$ domaines de Fatou paraboliques.

(*b*) *Domaines singuliers*

La suite $(f^{nq}{}_{|C})_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence non constante. Il résulte de Fatou ([F], § 30) (*voir* Cremer [C_2] et [B], § 5-6) que l'adhérence de la suite $(f^{nq}{}_{|C})_{n\in\mathbb{N}}$ est un groupe compact isomorphe à $\mathbb{S}^1$ de difféomorphisme $\mathbb{C}$-analytiques de C.

Ceci implique que C est $\mathbb{C}$-difféomorphe à l'un des exemples suivants :

(i) $\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ domaine appelé disque.

(ii) $\{z\in\mathbb{C},\ r<|z|<1\}$ où $r>0$ (les cas $\mathbb{C}^*$ et $r=0$ ne se produisant pas). Ce domaine est appelé un anneau.

De plus f est $\mathbb{C}$-analytiquement conjugué à $z\mapsto e^{2\pi i\alpha}z$, $\alpha\in\mathbb{T}^1$, ($\alpha\notin\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ car si $f^q{}_{|U}=\mathrm{Id}_U$ sur l'ouvert $U\neq\varnothing$, alors f est de degré 1).

Le nombre α est appelé le nombre de rotation de $f^q{}_{|C}$. Par III.3, $\pm\alpha$ est un invariant de conjugaison topologique de $f^q{}_{|C}$ (attention $z\mapsto 1/z$, sur $\mathbb{S}^1$, renverse l'orientation) α est un invariant de conjugaison de $f^q{}_{|C}$ par des homéomorphismes de C homotope à l'identité de C.

De plus Fatou montre (*voir* [B], th. 6.3 et 6.4) que E'_c contient la frontière de C dans $\mathbb{S}^2$. Il en résulte que, si E'_c est fini, alors f n'a pas de domaine singulier. (Il n'est pas difficile de voir que C est l'intérieur de son adhérence.)

4. L'existence des domaines singuliers qui sont des disques a été démontrée pour la première fois par C. L. C. Siegel [Si]. Nous renvoyons le lecteur à H. Rüssmann [R_1] pour une démonstration particulièrement élégante et valable, ce qui est un résultat de Brjuno, pour une classe de nombre contenant des nombres de Liouville : soit $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ tel que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des dénominateurs des réduites vérifie $\sum_{n\geq 1} q_n^{-1}\operatorname{Log} q_{n+1}<\infty$. Alors si g est un germe en 0 de difféomorphisme holomorphe de $\mathbb{C}$ laissant fixe 0 et si $Dg(0)=e^{2\pi i\alpha}$ alors g est conjugué à sa partie linéaire en 0 par un germe de difféomorphisme holomorphe laissant fixe 0 (*voir* [R_2] et [B_1]).

Nous incluons dans l'appendice VIII.12 une démonstration, particulièrement simple, du théorème de Siegel, si le multiplicateur $=e^{2\pi i\alpha}$, où α est un nombre de type constant.

Pour la généralisation à n variables (*voir* Zehnder [Z]).

5. L'existence des anneaux résulte de la proposition suivante. Pour cela on considère une fraction rationnelle f de degré $d\geq 2$ (en fait, on a $d\geq 3$) tel que $f(\mathbb{S}^1)=\mathbb{S}^1$, que $f_{|\mathbb{S}^1}$ soit un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ et $\alpha=\rho(f_{|\mathbb{S}^1})$ satisfait à une condition A. (Pour des exemples, *voir* IV.6.) Pour la

définition des nombres $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ satisfaisant une condition A, nous renvoyons le lecteur à [H].

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses ci-dessus, f laisse invariant un anneau contenant* $\mathbb{S}^1$.

Démonstration. — Par l'application revêtement $z \in \mathbb{C} \to \exp(2\pi iz) \in \mathbb{C}$, on peut relever f sur un voisinage de $\mathbb{S}^1$ en un plongement holomorphe $\tilde{f}$ de $B_\delta = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \delta\}$ dans $\mathbb{C}$ pour un $\delta > 0$. $\tilde{f}$ vérifie, $\tilde{f}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\tilde{f}(z+1) = 1 + \tilde{f}(z)$ si $z \in B_\delta$, et $\rho(\tilde{f}_{|\mathbb{R}}) = \alpha$. Par le théorème fondamental de [H], IX, il existe $h \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $f \circ h(x) = h(x+\alpha)$, si $x \in \mathbb{R}$. h se complexifie en un plongement holomorphe, $\tilde{h}$: Int $B_{\delta_1} \to \mathbb{C}$ pour un $\delta_1 > 0$ et vérifiant $\tilde{h}(z+1) = \tilde{h}(z) + 1$, si $z \in B_{\delta_1}$, et $\tilde{f} \circ \tilde{h}(z) = \tilde{h}(z+\alpha)$, si $z \in B_{\delta_2}$ pour un $\delta_2 > 0$. Par passage au quotient, l'existence d'un domaine singulier $B \supset \mathbb{S}^1$ pour f en résulte. B est un anneau (et non un disque associé à un point périodique elliptique), car si B était un disque, il en suivrait que f serait de degré 1 (puisque f serait un $\mathbb{C}$-difféomorphisme de $\{z, |z| < 1\}$ ou de $\{z, |z| > 1\}$ et donc dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$). De plus le nombre de rotation de $f_{|B}$ est α (i.e. $f_{|B}$ est conjugué à $z \to e^{2\pi i\alpha} z$, $R < z < 1$, pour un $0 < R < 1$). ■

Nous verrons en VIII.10 que l'existence d'anneaux de nombre de rotation de type constant est une condition de codimension complexe $\leqslant 1$ pour les fractions rationnelles.

De plus, nous montrerons en VIII.14 que pour tout $p \geqslant 1$, il existe une fraction rationnelle ayant un anneau périodique de période p.

6. P. Fatou ([F], § 30) a montré qu'une fraction rationnelle f de degré d a au plus $4(d-1)$ cycles elliptiques (et $2(d-1)$ cycles attractifs puisque f a au plus $2d-2$ points critiques).

D. Sullivan [S_1] a montré qu'il existe au plus $2(d-1)$ cycles de composantes périodiques de $\mathbb{S}^2 - J(f)$ qui sont des anneaux périodiques ou associés à des points périodiques attractifs et au plus $8(d-1)$ cycles de composantes périodiques distinctes.

II. Généralités sur les orbites denses

1. Soit $X \neq \varnothing$ un espace métrique complet sans point isolé et ayant une base dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On suppose que pour tout i, $U_i \neq \varnothing$.

On se donne $f : X \to X$ une application continue.

Nous supposons que X est sans point isolé pour éviter les exemples suivants : $X=\{x_1, x_2\}$, $f(x_1)=x_2$, $f(x_2)=x_2$, etc.

On dit que $x\in X$ est un point d'orbite dense par f, si la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est dense dans X.

Soit $D=\{x\in X, (f^n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est dense$\}$.

Puisque X est sans point isolé, on a :

$$f(D)\subset D \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(D)\subset D \qquad \text{d'où} \quad f(D)=f^{-1}(D)=D.$$

2. Proposition. — *Sous les hypothèses ci-dessus, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $D\neq\varnothing$;

(ii) *Pour tout ouvert U_k, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^n(U_k)$ est dense dans X;*

(iii) *Pour tout ouvert U_k, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^{-n}(U_k)$ est dense dans X;*

(iv) *D est un G_δ dense.*

Démonstration. — Si $D\neq\varnothing$, l'ensemble D est dense dans X, et donc (i) $\Rightarrow$ (ii). On a (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). En effet les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes à quels que soient i et j $(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^n(U_i))\cap U_j\neq\varnothing$. Pour voir que (ii) $\Rightarrow$ (iv), on remarque que $D=\bigcap_k \bigcup_n f^{-n}(U_k)$ et on applique le théorème de Baire. Enfin (iv) $\Rightarrow$ (i) puisque X n'est pas vide. ■

3. Remarques. —(1) Si de plus l'application continue f *est ouverte, alors :*

(i) $D\neq\varnothing$;

$\Downarrow$

(v) *il existe $x\in X$, tel que l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^{-n}(x)$ soit dense.* En effet, soit $O_k=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^n(U_k)$ qui est un ouvert. (i) implique que $\bigcap_k O_k$ est un G_δ dense, et si on choisit $x\in\bigcap_k O_k$ alors (v) est vérifiée.

(2) Sous les mêmes hypothèses qu'en 1, on a par ce qui précède :

(vi) *pour tout x, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^{-n}(x)$ est dense dans X;*

$\Updownarrow$

(vii) *pour tout k, $O_k=X$, où $O_k=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} f^n(U_k)$.*

4. On suppose que $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est une fraction rationnelle de degré $\geqslant 2$, et on considère $f_{|X} : X \to X$, où $X=J(f)$, qui est un espace compact métrique non vide sans point isolé. L'application continue $f_{|X}$ est ouverte puisque f est ouverte et $J(f)$ est totalement invariant par f.

G. Julia et P. Fatou ([F], § 26, [B], th. 4.3) montrent que la condition (vii) est vérifiée : pour tout $x \in J(f)$ et tout voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{S}^2$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$ couvre $\mathbb{S}^2$ moins au plus 2 points exceptionnels. Chaque point exceptionnel a, s'il existe, vérifie $f^{-1}(a)=a$ ou $f^{-2}(a)=a$. Il suit que si le point a existe, a est un point périodique super attractif et donc $a \notin J(f)$. Il en résulte qu'il existe un G_δ dense de $J(f)$, d'orbites denses par $f_{|X}$ dans $J(f)$.

Par ce qui précède, et la classification de I.3 (on n'a pas besoin, ici, du théorème de D. Sullivan de non-existence de domaines errants I.2), on obtient le scolie suivant (*voir* [F], § 28).

Scolie. — *Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *la fraction rationnelle f a une orbite dense dans* $\mathbb{S}^2$;

$\Updownarrow$

(2) $J(f)=\mathbb{S}^2$.

5. Exemples de Lattès [LA]

Nous allons rappeler les exemples de Lattès : soit Γ un réseau de $\mathbb{C}$ (i.e. un groupe sous-discret à quotient compact), alors $T_\Gamma=\mathbb{C}/\Gamma$ est un groupe de Lie sur $\mathbb{C}$, abélien (i.e. une courbe elliptique). $T_\Gamma/x\sim -x$ a une unique structure complexe qui peut s'obtenir ainsi : on désigne par :

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Gamma-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right),$$

la fonction elliptique de Weierstrass associée au réseau. On a $\wp(-z)=\wp(z)$ et $\wp : T_\Gamma \to \mathbb{S}^2 \cong T_\Gamma/x\sim -x$.

Soit $A : T_\Gamma \to T_\Gamma$ un endomorphisme complexe (i.e. A est un endomorphisme de groupe, holomorphe de la variété complexe T_Γ).

Alors A définit par passage au quotient une application continue $\bar{A} : T_\Gamma/x\sim -x \to T_\Gamma/x\sim -x$ et holomorphe (puisque $\bar{A}$ est holomorphe sauf en un nombre fini de points, continue, et donc se prolonge en une fonction holomorphe).

$\bar{A}$ définit donc une fraction rationnelle de $\mathbb{S}^2$. Si on relève A en $\tilde{A} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on a nécessairement $\tilde{A}(z)=\alpha z$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

On vérifie que le degré de $\bar{A}=\det_{\mathbb{R}}(\tilde{A})=\alpha\bar{\alpha}$.

Pour obtenir les exemples de Lattès, il suffit de remarquer que l'endomorphisme complexe $A : T_\Gamma \to T_\Gamma$ est ergodique pour la mesure de Haar si et seulement si $\alpha\bar{\alpha}2$ (puisque $\hat{A}$ sur le groupe dual de T_Γ est sans orbite périodique autre que 0). Sous l'hypothèse ci-dessus, il en résulte que la fraction rationnelle $\bar{A} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ a une orbite dense dans $\mathbb{S}^2$ (et que $\bar{A}$ est ergodique pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^2$).

6. Exemples

Pour tous les réseaux Γ on peut choisir $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geqslant 2$. Le degré de $\bar{A}$ est un carré parfait $= n^2 \in \mathbb{N}$.

1. Comme n et $-n$ donnent la même fraction rationnelle, on obtient, si on fixe le degré n^2, modulo conjugaison par un homéomorphisme absolument continu de $\mathbb{S}^2$, une seule fraction rationnelle $\bar{A}$.

2. Si on varie le réseau Γ (i. e. la structure complexe de T_Γ) on obtient une famille de fractions rationnelles qui modulo la conjugaison par $SL(2, \mathbb{C})$ dépendent d'un paramètre complexe (i. e. le bi-rapport des 4 points $\wp(I)$, où I est l'ensemble des involutions de T_Γ :

$$I = \{ a \in T_\Gamma \mid 2a = 0 \}).$$

3. Les exemples $\bar{A} : z \mapsto nz$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, ont de gros centralisateurs dans le groupe d'homéomorphismes de $\mathbb{S}^2$: tout automorphisme $B \in GL(2, \Gamma)$ de T_Γ passe au quotient sur $T_\Gamma / x \sim -x$ et commute avec $\bar{A}$. On obtient ainsi qu'un groupe isomorphe à $GL(2, \mathbb{Z}) / \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$, est contenu dans le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{S}^2$ qui commutent avec $\bar{A}$.

4. Bien que les exemples $\bar{A}$ ci-dessus agissent ergodiquement pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^2$ (et préservent une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}^2$) ces exemples n'agissent pas ergodiquement sur les directions de droite du fibré tangent de $\mathbb{S}^2$.

5. On peut écrire explicitement les formules de $\bar{A}$ (ce que fait Lattès) en écrivant $\wp(2u) = R(\wp(u))$, où R est une fraction rationnelle. Or, par [L] :

$$\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)}\right)^2$$

et

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

où $g_2=69\,s_4$, $g_3=140\,s_6$, et $s_m=\sum_{\omega\in\Gamma-\{0\}} 1/\omega^m$, d'où

$$R(z)=-2\,z+\frac{1}{16}\,\frac{(12\,z^2-g_2)^2}{4\,z^3-g_2\,z-g_3}.$$

(Lattès choisit $g_2=4$, $g_3=0$.)

7. Multiplications complexes

Les seuls autres exemples d'endomorphismes $A: T_\Gamma \to T_\Gamma$ complexes sont obtenus ainsi (*voir* Lang [L]) :

Γ est l'anneau des entiers algébriques de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ avec $d\in\mathbf{Z}$, $d<0$, $-d$ est sans facteur carré (i. e. $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est un corps quadratique imaginaire) et $\alpha\in\Gamma$ où $\tilde{A}\,z=\alpha\,z$.

On rappelle que les entiers algébriques de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ s'écrivent :

$$si\ d\equiv 2 \text{ ou } d\equiv 3 \text{ mod. } 4,\ \Gamma=\{\,a+b\sqrt{d}\,|\,a, b\in\mathbf{Z}\,\}$$

$$\text{si } d\equiv 1 \text{ mod. } 4,\ \Gamma=\left\{\frac{u+v\sqrt{d}}{2}\,\middle|\,u, v\in\mathbf{Z},\ u\equiv v \text{ mod. } 2\right\},$$

(*voir* par exemple [Sa], § 2.5).

– Si on fixe $\det_{\mathbf{R}}\tilde{A}=\alpha\bar{\alpha}=p\in\mathbf{N}^*$, alors il existe un nombre fini d'entiers d et d'entiers algébriques α vérifiant $\alpha\bar{\alpha}=p$.

– Par exemple, si $p=3$ (6 n'est pas possible) on obtient $d=-2$, $\alpha=\pm(1\pm i\sqrt{2})$, $d=-3$, $\alpha=\pm i\sqrt{3}$.

– On obtient tous les degrés $p\geqslant 2$ (il suffit d'écrire $p=b^2\,d$, où d est sans facteur carré, de prendre Γ l'anneau des entiers algébriques de $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ et $\alpha=b\sqrt{-d}$).

On a finalement :

Scolie. – *Modulo conjugaison topologique, il existe seulement un nombre fini d'exemples de fractions rationnelles de Lattès de degré p fixé.*

8. Fractions rationnelles a points critiques prépériodiques

Soit f une fraction rationnelle de degré $d\geqslant 2$, telle que tout point critique est prépériodique et non périodique. Alors $J(f)=\mathbf{S}^2$. Cela vient d'une part du résultat de Fatou I. 2 sur la non-existence de composantes errantes de $\mathbb{S}^2 - J(f)$ (le résultat de Fatou suffit puisque E_c' est fini) et d'autre part qu'il ne peut exister de domaine de Fatou ni de domaine singulier, sinon on contredirait la description faite en I.3 des orbites des points critiques.

Tout exemple de Lattès est une fraction rationnelle à points critiques prépériodiques puisque pour un exemple de Lattès f associé au réseau Γ, si c est un point critique, on a $f(c) \in \mathfrak{p}(I)$.

Toute fraction rationnelle à points critiques prépériodiques a tous ses points périodiques répulsifs et plus généralement toute fraction rationnelle qui a tous ses points périodiques répulsifs et qui ne laisse pas invariant de domaines singuliers qui soit un anneau périodique, a une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$, *cf.* I. (Le fait qu'une fraction rationnelle à points critiques prépériodiques ait une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$ a été suggéré par J. Guckenheimer en 1969, puis démontré par D. Sullivan [S] et ensuite par A. Douady, *voir* aussi [R].)

9. Récurrence par chaîne

Soient $X \neq \varnothing$ un espace métrique compact avec la métrique d et $f : X \to X$ une application continue. Sur l'ensemble des applications continues de X dans X, noté $C^0(X, X)$, on met la topologie de la convergence uniforme.

Définition. — *Soit* $\varepsilon > 0$. *Les éléments x et y de X sont sur une ε-chaîne de f (ou encore sur une ε-orbite de f) s'il existe une suite* $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$, $N \geqslant 1$, *telle que l'on ait* $x_0 = x$, $x_N = y$ *et, pour tout* $0 \leqslant i < N$, $d(f(x_i), x_{i+1}) \leqslant \varepsilon$.

On dit que x est ε-récurrent par f si x et $y = x$ sont sur une ε-chaîne.

On définit l'ensemble de récurrence par chaîne de f (qui ne dépend pas de la métrique choisie) :

$$R(f) = \{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, x \text{ est } \varepsilon\text{-récurrent par } f \text{ à } x \}.$$

On a les propriétés élémentaires :

(*a*) $f(R(f)) \subset R(f)$;

(*b*) si la suite $(f_i)_{i \geqslant 0}$ de $C^0(X, X)$ converge uniformément vers f et si la suite $(x_i)_{i \geqslant 0}$, $x_i \in R(f_i)$, converge vers $y \in X$, alors $y \in R(f)$.

Il en résulte que :

— L'ensemble $R(f)$ est fermé dans X.

— L'ensemble $\{ (f, x) \in C^0(X, X) \times X \mid x \in R(f) \}$ est fermé dans $C^0(X, X) \times X$.

10. Cas d'une fraction rationnelle

Soit $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ une fraction rationnelle de degré $d \geqslant 2$, alors on a :

$$J(f) \subset R(f).$$

Proposition. — *Supposons $J(f) \neq \mathbb{S}^2$ et soit C une composante connexe de $\mathbb{S}^2 - J(f)$.*

Si C est une composante prépériodique de Fatou ayant un point éventuellement périodique attractif (i. e. *$f^i(C)$, pour un $i \geqslant 0$, est une composante périodique et il existe un point périodique $y \in f^i(C)$ de multiplicateur de module <1*) *alors $C \cap R(f) = \varnothing$, sauf si C contient un point périodique attractif x, auquel cas $C \cap R(f) = \{x\}$.*

Dans tous les autres cas de la classification I.3, *on a : $C \subset R(f)$.*

Démonstration. — La première affirmation de la proposition est presque immédiate. Nous allons montrer la seconde.

Si, pour un $i \geqslant 0$ et un $q \geqslant 1$, $f^i(C)$ est un domaine singulier pour f^q, en utilisant I.3(b), il n'est pas difficile de voir que tout $z \in f^i(C)$ et tout y situé sur la frontière de $f^i(C)$ sont sur une ε-chaîne de f pour tout $\varepsilon > 0$.

Or si $y \in J(f)$, alors pour tout voisinage ouvert V de y, l'ensemble $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V)$ est égal à $\mathbb{S}^2$ sauf peut-être deux points (*voir* [B]). (On a même $U = \mathbb{S}^2$ dans ce cas, *voir* [B], mais ce n'est pas nécessaire pour la suite du raisonnement).

Il suit que tout point de C et tout point de $\mathbb{S}^2$ sont sur une ε-chaîne pour tout $\varepsilon > 0$, donc $C \subset R(f)$.

Si C est une composante prépériodique de Fatou associé à un point périodique y de multiplicateur une racine de l'unité alors on remarque (*cf.* I.3) qu'il existe des entiers $q \geqslant 1$ et $i \geqslant 0$ tels que, pour tout $x \in C$, $\lim_{n \to +\infty} f^{i+qn}(x) = f^i(y)$.

Le reste du raisonnement est analogue au cas des domaines singuliers puisque $f^i(y) \in J(f)$.

Si on suppose que C est un domaine errant (sans utiliser le théorème de Sullivan), on a $C \subset R(f)$ puisqu'il existe un $y \in J(f)$ et une suite $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $n_j < n_{j+1}$, tels que l'on ait $f^{n_j}(C) \to y$ quand $i \to +\infty$ (*cf.* [F], § 30). Le reste du raisonnement est alors identique aux cas considérés ci-dessus. ■

Il suit de la proposition précédente que l'ensemble $R(f) - A$, où A est l'ensemble des points périodiques attractifs, est totalement invariant par f.

11. Exemples de domaines errants pour des fonctions entières

I. N. Baker a construit dans [B_2] un exemple de fonction entière d'ordre $<1/2$ ayant un domaine errant. Nous allons donner un exemple explicite, basé sur un autre principe. Nous allons nous appuyer sur le théorème de Siegel, mais on peut aussi utiliser les domaines de Fatou (*cf.* l'exemple cité [S], § 9). Soit la fonction entière de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$g(z)=z+\lambda\sin(2\pi z)+1,$$

où $1+2\pi\lambda=e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha\in TC$.

Soit $A=\mathbb{C}/\mathbb{Z}$, g définit une application holomorphe $\bar{g}: A\to A$. L'application $\bar{g}$ laisse fixe 0 et on peut appliquer le théorème de Siegel (I. 4) pour conclure que $\bar{g}$ laisse invariant un domaine $\bar{D}$ ($\mathbb{C}$-analytiquement difféomorphe au disque). Une composante D de l'image réciproque de $\bar{D}$ dans $\mathbb{C}$ est un disque errant par g.

12. On désigne par Fr_d l'espace des fractions rationnelles de degré $d\geqslant 2$ et on met sur cet espace la topologie induite par la convergence uniforme sur $C^0(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ (équivalente à la C^∞-topologie induite).

13. On considère un espace métrique Λ.

Remarques. — (1) Soit $\lambda\in\Lambda\mapsto f_\lambda\in\mathrm{Fr}_d$ une application continue. Comme $\{(f,x)\,|\,f\in C^0(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)$ et $x\in R(f)\}$ est fermé dans $C^0(\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2)\times\mathbb{S}^2$, l'ensemble :

$$G_1=\{\lambda\in\Lambda\,|\,R(f_\lambda)=\mathbb{S}^2\}$$

est fermé dans Λ. (Cela résulte aussi de 10 car si $R(f)\neq\mathbb{S}^2$ alors f a un point périodique attractif.)

(2) L'ensemble $G=\{\lambda\in\Lambda\,|\,J(f_\lambda)=\mathbb{S}^2\}$ est un G_δ de Λ et on a $G\subset G_1$. Pour voir que G est un G_δ, on remarque que si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{S}^2$, alors $G=\bigcap_{i,j}V_{i,j}$, où $V_{i,j}$ est l'ouvert :

$$V_{i,j}=\{\lambda\in\Lambda\,|\,\exists\, n\geqslant 0,\ \exists\, x\in U_i \text{ tels que } f_\lambda^n(x)\in U_j\}.$$

On a $G\subset G_1$ car $J(f)\subset R(f)$.

Dans les exemples que nous construisons en V et VII, les familles que nous choisirons vérifieront $G_1=\Lambda$ et G est un G_δ dense de G_1.

14. Continuité de l'ensemble $J(f)$

Sur l'espace $\mathscr{K}$ des ensembles fermés de $\mathbb{S}^2$ on met la topologie de Hausdorff. Cet espace est alors métrique compact et l'ensemble vide est un point isolé.

Proposition. — *Soit $f \in \mathrm{Fr}_d$ $(d \geqslant 2)$ vérifiant $J(f)=R(f)$, alors l'application :*

$$g \in \mathrm{Fr}_d \mapsto J(g) \in \mathscr{K}$$

est continue en f.

Démonstration. — Puisque Fr_d est métrique et que $\mathscr{K}$ est compact, il suffit de démontrer que si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Fr_d qui tend vers f telle que $J(f_i)$ converge vers $K \in \mathscr{K}$, alors $K=J(f)$.

Comme $J(f_i) \subset R(f_i)$, par 9 (b), on a $K \subset R(f)=J(f)$.

Si $K \neq J(f)$, dans l'ouvert $J(f)-K$, on peut trouver un point périodique répulsif y de f (*voir* I.1 (d)).

Pour i assez grand, il existe un point périodique répulsif y_i de f_i, et, si $i \to +\infty$, $y_i \to y$. Or $y_i \in J(f_i)$, donc $y \in K$, ce qui contredit $y \in J(f)-K$. ■

15. Exemples

(1) Si $J(f)=\mathbb{S}^2$, la proposition 14 s'applique.

(2) Il existe un ensemble au plus dénombrable [3] $D \subset \mathbb{T}^1$ tel que, si $\alpha \in \mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cup D)$ et si $f_\alpha(z)=e^{2i\pi\alpha}(z+z^2)$ n'est pas holomorphiquement conjugué au voisinage de 0 à sa partie linéaire (par VIII.13, il existe un G_δ dense de $\alpha \in \mathbb{T}^1$ vérifiant ces conditions) alors, on ait :

$$J(f_\alpha)=R(f_\alpha).$$

Démonstration. — On remarque que si $\alpha=p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, toute composante connexe de $\mathbb{S}^2-J(f_\alpha)$ est une composante prépériodique de Fatou associée au point fixe elliptique 0. En effet, d'après I.3, le bassin d'attraction de 0 contient l'unique point critique $-1/2$ et, de ce fait, son orbite par f_α tend vers zéro. Il n'y a pas d'autre point périodique elliptique y, même non

---

[3] A. Douady et J. H. Hubbard ont montré en utilisant leur théorie des applications à allure polynomiale qu'un polynôme de degré $d \geqslant 2$ a au plus $d-1$ cycles périodiques de multiplicateur de module $\leqslant 1$ (*voir* [D]). Par conséquent D est vide.

linéarisable, sinon la famille $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où g est la détermination de f_α^{-1} au voisinage de y telle que y soit un point périodique elliptique de g serait normale donc linéarisable.

Il en résulte qu'il existe un ensemble au plus dénombrable D tel que si $\alpha\in\mathbb{T}^1-D$ alors f n'a pas de point périodique elliptique $x_\alpha\neq 0$ de multiplicateur $m(x_\alpha)\in\mathbb{S}^1-\{1\}$. En effet, si $y_{\alpha_0}\neq 0$ est un point périodique de f_{α_0} de période fixée q de multiplicateur $m(y_{\alpha_0})\neq 1$ alors, pour α voisin de α_0, on peut trouver un point périodique y_α de f_α, de période q, voisin de y_{α_0} et l'application $\alpha\to m(y_\alpha)$ est $\mathbb{R}$-analytique au voisinage de α_0. On conclut facilement en utilisant le fait que si $\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ alors $m(y_\alpha)\notin\mathbb{S}^1$ (et il n'est pas difficile de voir que pour tout point périodique $y_\alpha\neq 0$ de f_α, on a $m(y_\alpha)\neq 1$).

Soit maintenant $\alpha\in\mathbb{T}^1-(D\cup\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme dans les hypothèses. Nous allons utiliser la classification I.3, ainsi que le résultat de Sullivan I.2.

Il n'existe pas de domaine singulier dans $\mathbb{S}^2-J(f_\alpha)$ car, d'autre part, un polynôme ne laisse jamais invariant un vrai anneau, d'autre part, f_α n'a pas, par hypothèse, de domaine singulier au voisinage de 0 et, puisque $\alpha\notin D$, f_α n'a pas d'autre point fixe elliptique.

Il ne peut exister de composante de Fatou périodique; en effet, 0 est valeur d'adhérence de l'orbite par f_α du point critique $-1/2$ (car dans le cas contraire la famille $(f_\alpha^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ serait normale sur un voisinage de 0 et f serait linéarisable, ce qui est contraire à l'hypothèse). Comme $-1/2$ est l'unique point critique, il ne peut exister d'autres composantes de Fatou (*voir* I.3(*a*)).

Par suite, d'après I.3 et I.2, on a :

$$J(f_\alpha)=R(f_\alpha).$$

De plus, $J(f_\alpha)\neq\mathbb{S}^2$, puisque $\infty\notin J(f_\alpha)$.

(3) D'après le théorème de Siegel, pour tout $\alpha_0\in CD$ (i.e. diophantien et donc pour presque tout α), l'application $\alpha\to J(f_\alpha)$ n'est pas continue en α_0 (si $\alpha\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $0\in J(f_\alpha)$ et si $\alpha_0\in CD$, $0\notin J(f_{\alpha_0})$).

(4) Il serait très intéressant de connaître les points de continuité de l'application $g\in\mathrm{Fr}_d\mapsto J(g)\in\mathscr{K}$. Cette application est semi-continue inférieurement [4] (i.e. si $y\in J(f)$ et U est un voisinage de y alors :

$$\{g\in\mathrm{Fr}_d\mid J(g)\cap U\neq\emptyset\}\text{ est un voisinage de } f).$$

[4] Ce résultat m'a été communiqué par Adrien Douady.

Cela résulte facilement de la densité des points périodiques répulsifs dans $J(f)$ (*voir* I. 1 (*d*)). Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble des points de continuité de l'application $f \to J(f)$ est un G_δ dense de Fr_d, puisque cette application est de 1^{re} classe de Baire (*voir* [CH], 7. 10).

Une réponse très optimiste serait que les points de continuité de cette application sont ceux donnés par la proposition 14. (*Voir* à ce propos la question soulevée en VIII. 11 sur la stabilité des anneaux.)

Ainsi que le montre le travail de Mañé-Sad-Sullivan [M-S], les choses sont encore plus compliquées si l'on considère des familles $\lambda \mapsto f_\lambda \in \mathrm{Fr}_d$ $\mathbb{C}$-analytiques, puisqu'en utilisant par exemple VIII. 10 et [M-S], on voit qu'il existe des familles $\mathbb{C}$-analytiques de fractions rationnelles de degré 3 ayant de façon stable un anneau de nombre de rotation un nombre de type constant fixé (i. e. pour un ouvert de paramètres).

16. Dans la suite tous les exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$ que nous construirons (en V et VII) seront de mesure de Lebesgue nulle dans l'espace des paramètres que nous considérons (cela provient du théorème de Siegel I. 4 et du fait que les nombres de Liouville sont de mesure de Lebesgue nulle). De plus les propriétés ergodiques (pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}^2$ qui est quasi invariante) des exemples qui seront construits me sont totalement inconnues.

Pour la construction d'exemples de fractions rationnelles, ergodique pour la mesure de Lebesgue, et généralisant les fractions rationnelles à points critiques prépériodiques, nous renvoyons le lecteur au travail de Mary Rees [R].

III. Rappels sur les difféomorphismes du cercle

1. Si $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ on définit les groupes :

$$D^r(\mathbb{T}^1) = \{ f = \mathrm{Id} + \varphi \in \mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{R}) \mid \varphi \in C^r(\mathbb{T}^1) \},$$

où $C^r(\mathbb{T}^1)$ est identifié aux fonctions $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^r, $\mathbb{Z}$-périodiques. On utilise la notation C^ω pour $\mathbb{R}$-analytique et $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{R})$ désigne le groupe des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}$, préservant l'orientation. On note les translations par $\alpha \in \mathbb{R}$: $R_\alpha : x \to x+\alpha$. Sur $D^0(\mathbb{T}^1)$, on met la topologie uniforme. $D^0(\mathbb{T}^1)$ est alors un groupe topologique. Le groupe des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{T}^1$ préservant l'orientation s'identifie à $D^r(\mathbb{T}_1)/C$, où $C = \{R_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ est le centre du groupe $D^r(\mathbb{T}^1)$. Le groupe $D^r(\mathbb{T}^1)$ est le groupe de revêtement universel de $D^r(\mathbb{T}^1)/C$ (sur le groupe $D^r(\mathbb{T}^1)$, on met la C^r-topologie).

2. Si $f \in D^0(\mathbf{T}^1)$, $f = \mathrm{Id} + \varphi$ et si $n \in \mathbf{N}$, on a $f^n = \mathrm{Id} + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$.

On montre que, si $n \to +\infty$, $(f^n - \mathrm{Id})/n$ converge uniformément vers un nombre $\rho(f) \in \mathbf{R}$. *La fonction* $\rho(f)$ *est appelée le nombre de rotation* [H], II.

3. On a les propriétés suivantes ([H], II et III) :

(1) L'application $\rho : D^0(\mathbf{T}^1) \to \mathbf{R}$ est continue.

(2) $\rho(f+1) = \rho(f) + 1$.

(3) $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

(4) $\rho(f) = \rho(g^{-1} \circ f \circ g)$ pour tout élément g de $D^0(\mathbf{T}^1)$.

ρ est donc invariant de conjugaison dans le groupe $D^0(\mathbf{T}^1)$.

(5) Si $\rho(f) = \alpha$ et $n \in \mathbf{Z}$ l'homéomorphisme $f^n \circ R_{-n\alpha}$ a un point fixe sur $\mathbf{R}$.

D'après la propriété 2, ρ définit par passage au quotient sur $D^0(\mathbf{T}^1)/C$ un invariant de conjugaison à valeur dans $\mathbf{T}^1$, que l'on appelle nombre de rotation (et que l'on note encore ρ).

(6) Soit $g \in D^0(\mathbf{T}^1)/C$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

— $\rho(g) \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$;

— g n'admet pas de point périodique sur $\mathbf{T}^1$.

En outre $\rho(g) = p/q$ mod. 1, $(p, q) = 1$, $q \geqslant 1$, est équivalent à ce que q est le plus petit entier 0 tel que g^q ait un point fixe sur $\mathbf{T}^1$ (*cf.* (5)).

(7) Si $\alpha \in \mathbf{T}^1 - (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et si $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f) = \alpha$, alors $\lambda = 0$, (*voir* [H], III).

Remarque. — Si $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, $\alpha \in \mathbf{R}$, si g vérifie $\rho(g) = \alpha$, alors par conjugaison en utilisant (5), il en résulte que $g \circ f^{-1}$ a un point fixe sur $\mathbf{R}$, ce qui implique dans ce cas particulier (7).

(8) Soit $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, si $f = g_1^{-1} \circ R_\alpha \circ g_1 = g_2^{-1} \circ R_\alpha \circ g_2$, avec $g_i \in D^0(\mathbf{T}^1)$ alors $g_1 = R_\lambda \circ g_2$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$ (i. e. le centralisateur d'une translation irrationnelle est une translation).

(9) Soit h un homéomorphisme de $\mathbf{T}^1$ renversant l'orientation et f un homéomorphisme préservant l'orientation, alors on a :

$$\rho(f) = -\rho(h \circ f \circ h^{-1}).$$

4. Fermés F_α^r et la fonction λ_α, $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$; $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$

Si $\alpha \in \mathbf{R}$, soit l'ensemble fermé :

$$F_\alpha^r = \{ g \in D^r(\mathbf{T}^1) \mid \rho(g) = \alpha \}.$$

3. (7) montre que, si $\alpha \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$, en un certain sens F_α^r est de codimension 1; on définit la fonction :

$$\lambda_\alpha : D^0(\mathbb{T}^1) \to \mathbb{R},$$

où $\lambda_\alpha(f)$ est l'unique nombre (unique par 3 (7)) tel que $\rho(R_{\lambda_\alpha(f)} \circ f)=\alpha$. On vérifie sans peine que $f \in D^0(\mathbb{T}^1) \to \lambda_\alpha(f) \in \mathbf{R}$ est continue (*cf.* [H], III).

5. Fermés $F_{p/q}^r$, $F_{(p/q)+}^r$, $F_{(p/q)-}^r$ et les fonctions $\lambda_{(p/q)+}$

L'intérieur de $F_{p/q}^r$ dans $D^0(\mathbb{T}^1)$ est égale à $U_{p/q}^r=\{f \in D^r(\mathbb{T}^1) \,|\, f^q-R_p$ s'annule en changeant de signe$\}$.

La frontière de $U_{p/q}^r=F_{(p/q)+}^r \cup F_{(p/q)-}^r$ (et pour tout r et p/q, $U_{p/q}^r \neq \emptyset$), où $F_{(p/q)+}^r=\{g \in D^r(\mathbb{T}^1) \,|\, f^q-R_p \geqslant 0$ et s'annule en au moins un point$\}$ les semi-stables en arrière et $F_{(p/q)-}^r$ en remplaçant $\geqslant 0$ par $\leqslant 0$ (les semi-stables en avant); on a $F_{(p/q)+}^r \cap F_{(p/q)-}^r=\{g \in D^r(\mathbb{T}^1) \,|\, g^q=R_p\}$.

Si $f \in F_{(p/q)+}^r$ et si $\lambda>0$, alors on a $\rho(R_\lambda \circ f)>\rho(f)$.

On définit *les fonctions* $\lambda_{(p/q)+}$, $\lambda_{(p/q)-}$ ainsi. Si $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$, $\lambda_{(p/q)+}(f)$ (resp. $\lambda_{(p/q)-}(f)$) est l'unique nombre tel que $R_{\lambda_{(p/q)+}(f)} \circ f \in F_{(p/q)+}^0$ (resp. $R_{\lambda_{(p/q)-}} \circ f \in F_{(p/q)-}^0$), et on montre que les fonctions $\lambda_{(p/q)+} : D^0(\mathbb{T}^1) \to \mathbb{R}$ sont continues (*voir* [H], III).

On montre [H], III que l'ouvert $U^r=\bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} U_{p/q}^r$ est, pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, dense dans $D^r(\mathbb{T}^1)$ pour la C^r-topologie. Si $r \geqslant 1$, U^r contient l'ouvert C^r-dense $V^r=\{f \in U^r \,|$ les points périodiques de f sont hyperboliques$\}$ et tout $g \in V^r$ est structurellement stable.

6. Soit $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$, alors la fonction $\lambda \to \rho(R_\lambda \circ f)=k(\lambda) \in \mathbb{R}$ vérifie :

(1) elle est continue;

(2) $k(\lambda+1)=k(\lambda)$;

(3) elle est monotone non décroissante;

(4) si $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, l'ensemble $k^{-1}(\alpha)$ est un point (*cf.* 3 (7));

(5) si $p/q \in \mathbb{Q}$, l'ensemble $k^{-1}(p/q)$ est un point $\Leftrightarrow f^q=R_p$ (*cf.* 5).

De plus on montre que si f vérifie *la propriété* A_0 suivante : *pour tout* $p/q \in \mathbb{Q}$, $f^q \neq R_p$; alors l'adhérence K de l'ensemble $k^{-1}(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ mod. 1 est un ensemble de Cantor de $\mathbb{T}^1$. De plus $k^{-1}(\mathbb{Q}) \cap K$ mod. 1 est dense dans K et si $\lambda \in k^{-1}(\mathbb{Q}) \cap K$, alors $R_\lambda \circ f$ est semi-stable (*voir* [H], III).

Ceci s'applique aux fractions rationnelles que nous considérons en IV.5 (pour d'autres exemples, *voir* [H], III).

7. Résultats sur la conjugaison. Cas $\rho(f)=p/q$

On a la proposition très simple [H], II suivante :

Proposition. — *Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

— $f \in D^r(\mathbb{T}^1)$ *est* C^r*-conjugué à la translation* $R_{p/q}$.

— $f^q = R_p$.

C'est un phénomène rare (*cf.* 5).

8. Cas $\rho(f)=\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

On a le théorème de Denjoy (*voir* [H], IV).

Théorème. — *Si* $f \in D^2(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f)=\alpha$, *alors il existe* $h \in D^0(\mathbb{T}^1)$, *tel que* $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$.

Comme h est unique, si on impose que $h(0)=0$, sa classe de différentiabilité est bien déterminée (*cf.* 3.8). On montre [H], XII, que, si $0<a<1/2\pi$ est fixé (et on pourrait aussi prendre les exemples de IV.5), il existe un G_δ dense $\subset \mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que si $\rho(f_b)=\alpha \in G$, où $f_b(x)=x+a\sin(2\pi x)+b$, alors l'homéomorphisme h du théorème de Denjoy est singulier : $Dh=0=Dh^{-1}$ presque-partout pour la mesure de Lebesgue.

9. On montre dans [H], IX, qu'il existe un ensemble de mesure de Haar égal à 1, $A \subset \mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, tel que :

Théorème. — *Si* $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ *et si* $\rho(f)=\alpha \in A$, *alors* $f=h^{-1} \circ R \circ h$, *où* $h \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$.

On montre que les nombres de type constant TC sont inclus dans A, et tout nombre de A satisfait à une condition diophantienne.

Jean-Christophe Yoccoz a simplifié la démonstration du théorème et généralisé la classe des nombres pour lesquels le théorème ci-dessus est vrai (*voir* [Y_1] et [Y_2]).

Dans l'annexe, nous montrerons pour $\alpha \in TC$, la version locale en classe C^∞ (théorème de Arnold), ainsi que l'analyticité par rapport aux paramètres (*voir* [A]). Ces résultats sont aussi valables pour les nombres satisfaisant à une condition diophantienne, voire pour la même classe de nombres pour lesquels le théorème de Siegel est connu.

10. Pour $\alpha \in TC$ ou plus généralement si $\alpha \in A$, on considère la fonction $f \to \lambda_\alpha(f)$ définie en 4.

Corollaire. — *Soit* $s \in M \to f_s \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ *une famille* $\mathbb{R}$*-analytique de difféomorphismes* $\mathbb{R}$*-analytiques, où* M *est une variété de dimension finie,* $\mathbb{R}$*-analytique, alors* $s \in M \to \lambda_\alpha(f_s) \in \mathbb{R}$ *est une fonction* $\mathbb{R}$*-analytique.*

Ce corollaire résulte de 9 et de l'analyticité par rapport aux paramètres [A]. Si $\alpha \in TC$, en utilisant le théorème énoncé en 9 nous donnerons en VIII.9 une démonstration complète.

IV. Fractions rationnelles laissant invariant $\mathbb{S}^1$

1. Une fraction rationnelle f de degré 1 laisse invariant $\mathbb{S}^1$ si et seulement si :

$$f(z)=e^{2\pi i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \qquad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{T}^1 \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{C}-\mathbb{S}^1.$$

On obtient toutes les *fractions rationnelles laissant invariant* $\mathbb{S}^1$ en multipliant un nombre fini de fractions rationnelles comme ci-dessus. (On les obtient toutes en remarquant qu'en divisant une telle fraction rationnelle par un des exemples, on obtient une fraction rationnelle g, holomorphe sur un voisinage de $D=\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ sans zéro sur D, il suit de la formule de Jensen et du principe du maximum que $g=\lambda \in \mathbb{S}^1$).

Soit H une représentation conforme de $\{z \mid |z|<1\}$ sur $\{z \mid \operatorname{Im} z>0\}$. Alors la fraction rationnelle préserve $\mathbb{S}^1$ si et seulement si $H \circ f \circ H^{-1}$ préserve l'axe réel.

2. Les fractions rationnelles g *laissant invariant* $\mathbb{S}^1$ qui sont de *degré topologique* $=1$ *sur* $\mathbb{S}^1$ *sont de la forme :*

$$f_{\alpha,s} : z \mapsto e^{2\pi i\alpha}\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}\cdots\frac{z-a_{n+1}}{1-\bar{a}_{n+1} z}\,\frac{1-\bar{b}_1 z}{z-b_n}\cdots\frac{1-\bar{b}_n z}{z-b_n},$$
$$s=(a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_n),$$

où les $|a_j|<1$, $|b_j|<1$, $\alpha \in \mathbb{T}^1$ et $a_k \neq b_j$.

Le degré de f est $p=2n+1$.

On obtient un espace de dimension réelle $2p+1$ dans l'espace de toutes les fractions rationnelles de degré p, dont la dimension réelle est $2(2p+1)$.

3. Toute fraction rationnelle laissant invariant $\mathbb{S}^1$ commute avec l'involution S : $z \mapsto 1/\bar{z}$ de conjugaison (et réciproquement).

4. Les fractions rationnelles de degré p qui laissent invariant au moins un cercle métrique C (i.e. $C=g(\mathbb{S}^1)$ avec $g \in SL(2, \mathbb{C})$) s'obtiennent par conjugaison de $SL(2, \mathbb{C})$. La dimension réelle de cet espace est $2p+4$ et on a, si $p \geqslant 3$, $2p+4<2(2p+1)-2$ (et $=$ si $p=2$).

5. Soit f comme en 2, alors $f_{|\mathbb{S}^1}$ est un difféomorphisme si et seulement si Df ne s'annulle pas sur $\mathbb{S}^1$. Cela est le cas si a_j et b_j sont assez petits : si $s \to 0$, alors $f_{\alpha,s} \to (z \to e^{2\pi i\alpha} z)$ sur un voisinage de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^2$ en restant holomorphe sur ce voisinage. Il suit que, si les a_j et b_j sont assez petits, $(\alpha, s) \to f_{\alpha,s}$ est une famille R-analytique de difféomorphismes R-analytiques de $\mathbb{S}^1$ s'étendant en des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\mathbb{S}^1$ et ceci même si $a_k \to b_j$ pour un k et un j.

6. Si $f_{|\mathbb{S}^1}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$, alors il en est de même de $e^{2\pi i\alpha} f$, si $\alpha \in \mathbb{T}^1$.

Il suit de III.6 que la fonction continue $\alpha \in \mathbb{T}^1 \to \rho(e^{2\pi i\alpha} f) \in \mathbb{T}^1$ est continue, monotone non décroissante (et donc surjective). Par III.6, si f est de degré $\geqslant 2$, alors pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $I_{p/q} = \{\alpha \mid \rho(e^{2\pi i\alpha} f) = p/q\}$ est un intervalle et $K = \mathbb{T}^1 - \bigcup_{p/q} \operatorname{Int}(I_{p/q})$ est un ensemble de Cantor. De plus, $\rho^{-1}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cap K$ est un ensemble dénombrable dense dans K.

7. Soit une fraction rationnelle f laissant invariant $\mathbb{S}^1$ et de degré topologique 1 sur $\mathbb{S}^1$. Si c est un point critique, alors il en est de même, en utilisant 3, de $1/\bar{c}$. (Attention, si $c \in \mathbb{S}^1$, c n'est pas nécessairement une racine double).

La frontière, parmi les fractions rationnelles comme ci-dessus, de celles qui sont des difféomorphismes sur $\mathbb{S}^1$ est contenue dans l'ensemble des fractions rationnelles qui ont un point critique double sur $\mathbb{S}^1$.

Exemples de bifurcation. — Soit $a > 0$, $a \in \mathbf{R}$ et $f_a(x) = x + (a/(x^2+1))$. f_a est une fraction rationnelle de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ laissant invariant $\mathbf{R} \cup \{\infty\} = C$. Si $a > 0$ est petit $f_{a|C}$ est un difféomorphisme R-analytique. Si a croît, soit a_0 la plus petite valeur telle que Df_{a_0} s'annule en un point. Alors $f_{a_0} : C \to C$ est un homéomorphisme et c'est une application R-analytique (mais non un difféomorphisme). Le point ∞ est fixe par f_a, mais si $0 \leqslant a \leqslant a_0$, on peut obtenir tous les nombres de rotation sur C en composant f_a par des homographies réelles.

On peut aussi utiliser le résultat de Helson et Sarason ([H_1], Lemma, p. 9) qui montre que l'ensemble des fractions rationnelles qui laissent invariant $\mathbb{S}^1$ (on ne fixe pas le degré) est dense dans $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ pour la C^∞-topologie et cet ensemble est localement connexe par arcs.

(On peut montrer ce résultat de la façon suivante : puisque $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ est, avec la C^∞-topologie, un groupe topologique pour la multiplication des fonctions, et, puisque on peut réaliser chaque degré $n \in \mathbf{Z}$ par $z \to z^n$, on est ramené à montrer qu'on peut approcher dans la C^∞-topologie chaque $g \in \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \mid \| \varphi - 1 \|_{C^0} < 1 \}$ par une suite (g_i) de fractions rationnelles laissant invariant $\mathbb{S}^1$. On considère la représentation conforme de $\{|z|<1\}$ sur $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, $H(z) = i(1-z)/(1+z)$. Alors $H \circ g$ est une fonction de $\mathbb{S}^1$ à valeur réelle de classe C^∞. On peut donc approcher dans la C^∞-topologie, $H \circ g$ par une suite (p_i) de polynômes trigonométriques à valeurs réelles et il suffit de considérer la suite $g_i = H^{-1} \circ p_i$. Ceci montre que les fractions rationnelles laissant invariant $\mathbb{S}^1$ sont denses dans $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ pour la C^∞-topologie et on voit même pour la C^ω-topologie.)

V. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense dans $\mathbb{S}^2$

1. Une famille

Pour $r \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ petit, et $\gamma \in \mathbb{S}^1$, on pose $b = (r, \gamma)$. On suppose que $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Soit la famille :

$$(\lambda, b) \to f_{\lambda, b} = \lambda\, z \frac{z-r}{1-rz} \frac{1-\bar{\gamma}\, rz}{z-\gamma\, r}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $f_{\lambda,b}$ induit une famille $\mathbb{R}$-analytique de difféomorphismes de $\mathbb{S}^1$ ($\mathbb{R}$-analytiques) (*voir* IV.5).

Si $r=0$ ou $\gamma = 1$, $f_{\lambda,b}(z) = \lambda\, z$.

La fraction rationnelle f commute avec l'involution $S : z \to 1/\bar{z}$. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, et si $r \neq 0$, $\gamma \neq 1$, $f_{\lambda,b}$ a pour points critiques c_1, $1/\bar{c}_1$, c_2, $1/\bar{c}_2$ avec $|c_j| \neq 1$, si $j = 1, 2$.

Si $r \neq 0$, $\gamma \neq 0$, les points 0 et ∞ sont fixes et leurs multiplicateurs sont égaux à $Df_{\lambda,b}(0) = m_0(\lambda, b) = \lambda/\gamma$, $m_\infty(\lambda, b) = \bar{\lambda}/\bar{\gamma}$. Ils sont donc des nombres complexes conjugués de module 1. On écrit aussi $m_0(\lambda, b) \equiv m_0(f_{\lambda,b})$.

La fonction $(\lambda, b) \to \lambda/\gamma$ est continue (et définie et continue, même si $r = 0$ ou $\gamma = 1$).

Si $(\lambda, b) \in \mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$, on pose $\rho(\lambda, b) \equiv \rho(f_{\lambda, b|\mathbb{S}^1})$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{T}^1$, on définit les ensembles :

$$F_\alpha = \{ (\lambda, b) \mid \rho(\lambda, b) = \alpha \}, \qquad F_{(p/q)+} = \{ (\lambda, b) \mid f_{\lambda, b|\mathbb{S}^1} \in F^\omega_{(p/q)+} \}.$$

Comme l'espace $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$ est connexe par arcs, compact, il en est de même des ensembles F_α, $F_{(p/q)+}$ (*cf.* III, III.4 et III.5).

Soit F_I l'adhérence de $\bigcup_{p/q \in \mathbf{Q}} F_{(p/q)+}$. Par III.6, F_I est sans point intérieur dans $\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$, et $\bigcup_{p/q} (F_{(p/q)+} \cup F_{(p/q)-})$ est un F_σ dense de F_I.

Pour $\gamma \neq 1$ fixé, on représente schématiquement sur la figure suivante F_I :

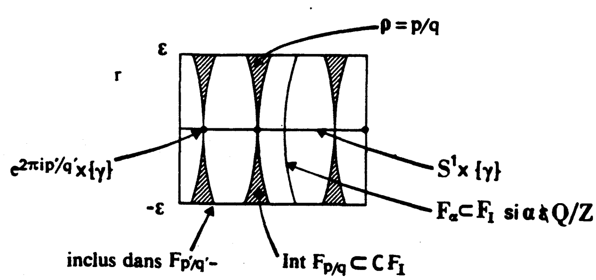


Figure pour γ fixé $\neq 1$, dans le plan $\{\lambda, (r, \gamma) \mid \lambda \in \mathbb{S}^1,\ -\varepsilon \leqslant r \leqslant \varepsilon\}$ des ensembles $\rho = \mathrm{Cte}$.

3. Soit $U = V \cap F_I$ un ouvert non vide de F_I avec V connexe. On a $\rho(U) = \rho(V)$, qui est un ensemble connexe de $\mathbf{T}^1$ non réduit à un point (*cf.* III.5).

PROPOSITION. — *Pour tout ouvert comme ci-dessus, il existe $p/q \in \mathrm{Int}(\rho(U))$ tel que la fonction $m_{0 \mid F_{(p/q)+} \cap U}$ soit non constante.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que pour tout $p/q \in \mathrm{Int}\, \rho(U)$ la fonction $m_{0 \mid F_{(p/q)+} \cap U}$ soit constante $= c_{p/q}$. Soit $(p_j/q_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite tendant vers $\alpha \in \mathbf{T}^1$ un nombre de type constant, $\alpha \in \mathrm{Int}\, \rho(U)$; et telle que $c_{p_j/q_j} \to l \in \mathbb{S}^1$, si $j \to +\infty$.

Il suit, que pour $b = (r, \gamma)$ appartenant à un ouvert non vide de $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$ on a :

$$(*) \qquad e^{2\pi i \lambda_\alpha(f_{1,b})} = l\, \gamma.$$

Comme la fonction $b \to \lambda_\alpha(f_{1,b})$ est $\mathbb{R}$-analytique (*voir* III.10) on a, pour tout $b \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$, l'égalité $(*)$.

Si $\gamma = 1$, on a $e^{2\pi i \alpha} = l$.

Si $r = 0$, on a $e^{2\pi i \alpha} = l\gamma$, pour tout $\gamma \in \mathbb{S}^1$, et donc l = constante est absurde. ■

Remarque. — On peut remplacer $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par n'importe quel ensemble dense dans $\mathbb{T}^1$ et par exemple les nombres de type constant.

4. Si $f_{\lambda,b}$ vérifie $\rho(\lambda, b) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $m_0(\lambda, b)$ est une racine de l'unité, alors $f_{\lambda,b}$ *est appelée birationnelle.* (Comme $m_\infty(\lambda, b) = m_0(\lambda, b)$, $m_\infty(\lambda, b)$ est aussi une racine de l'unité).

COROLLAIRE 1. — *Les fractions rationnelles $f_{\lambda,b}$ qui sont biractionnelles sont denses dans F_I.*

Démonstration. — Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert comme ci-dessus. Quitte à diminuer U, on peut supposer que $(r, 1) \notin U$, $(0, \gamma) \notin U$ et que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, $F_{(p/q)+} \cap U$ est connexe (à condition que $U \cap \{ b \mid r=0 \} = \emptyset$ et $U \cap \{ b \mid \gamma = 1 \} = \emptyset$). Il suit de la proposition que $m_0(F_{(p/q)+} \cap U)$ est un ensemble connexe de $\mathbb{S}^1$, non réduit à un point. ■

COROLLAIRE 2. — *Il existe un ensemble dense $T \subset F_I$ tel que si $(\lambda, b) \in T$, alors $\rho(\lambda, b)$ est un nombre de type constant ainsi que β où $m_0(\lambda, b) = e^{2\pi i \beta}$.*

5. PROPOSITION. — *On suppose que $b \neq (0, \gamma)$ ou $(r, 1)$. Soit $f_{\lambda,b}$ birationnelle, alors pour tout ouvert non vide $U \subset \mathbb{S}^2$, la fermeture de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$ contient soit 0, soit ∞, soit un point de $\mathbb{S}^1$.*

Démonstration. — Puisque $\rho(f_{\lambda,b}) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe un point périodique $x \in \mathbb{S}^1$ de multiplicateur dans l'intervalle $]0, 1]$ (et de multiplicateur $= 1$, si $f_{\lambda,b} \in F_I$). Par I.3(*a*), il existe un point critique de $f_{\lambda,b}$, disons c_1 tel que $\lim_{n \to +\infty} d(f^n_{\lambda,b}(c_1), \mathbb{S}^1) = 0$ où d désigne une métrique de $\mathbb{S}^2$ définissant la topologie de $\mathbb{S}^2$ et $d(z, \mathbb{S}^1) = \operatorname{Min}_{x \in \mathbb{S}^1} d(z, x)$. Puisque $f_{\lambda,b}$ commute avec l'involution S, on a aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} d(f^n_{\lambda,b}(1/\bar{c}_1), \mathbb{S}^1) = 0.$$

Il existe aussi un point critique c_2 de $f_{\lambda,b}$ ($\neq c_1$ ou $1/\bar{c}_1$) tel que $\lim_{n \to +\infty} d(f^n_{\lambda,b}(c_2), 0) = 0$, $\lim_{n \to +\infty} d(f^n_{\lambda,b}(1/\bar{c}_2), \infty) = 0$. (Puisque si $f_{\lambda,b}$ est birationnelle les points fixes 0 et ∞ de $f_{\lambda,b}$ ont pour multiplicateurs des racines de l'unité. Puisque E'_c est fini, $f_{\lambda,b}$ n'a ni domaine singulier ni domaine errant (cf. I.2 et I.3).

Soit U un ouvert non vide, comme $J(f_{\lambda,b}) \neq \mathbb{S}^2$, et donc sans point intérieur dans $\mathbb{S}^2$ quitte à diminuer U, on peut supposer que U est contenu dans la composante connexe de $\mathbb{S}^2 - J(f_{\lambda,b})$, C. Comme C est prépériodique et que nécessairement C tombe sur une composante de Fatou, il existe donc $x \in \bar{C}$ tel que x soit prépériodique, un ouvert $V \subset U$, k et $q \in \mathbb{N}$ tels que $f^{nq+k}_{\lambda,b}(V)$ tendent vers $f^k_{\lambda,b}(x)$, si $n \to +\infty$. On a nécessairement

$f^k_{\lambda,b}(x) \in \mathbb{S}^1 \cup \{\infty, 0\}$. Si ce n'était pas le cas, il existerait un point critique c de $f_{\lambda,b}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} d(f^{nq+k}_{\lambda,b}(c), f^k_{\lambda,b}(x))=0$ or $E'_c \subset \mathbb{S}^1 \cup \{0, \infty\}$. La proposition est donc démontrée. ■

Remarques. — La démonstration ci-dessus montre que si $(\lambda, b) \in F_I$, $r \neq 0$ et $\gamma \neq 1$ et $\rho(\lambda, b)=p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors $f_{\lambda,b}$ possède un unique cycle périodique d'ordre q.

Si $(\lambda, b) \notin F_I$, mais vérifie les conditions ci-dessus (avec $b \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$) alors $f_{\lambda,b}$ possède exactement deux cycles périodiques d'ordre q dont l'un est répulsif et l'autre est, en utilisant la description faite en I.3(a) des orbites des points critiques et le fait que $f_{\lambda,b}$ commute avec l'involution S, attractif. C'est la raison pour laquelle, dans le théorème suivant, pour trouver des $f_{\lambda,b}$ ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$, nous allons demander que $(\lambda, b) \in F_I$.

6. THÉORÈME. — *Il existe un G_δ dense $G \subset F_I$ tel que si $(\lambda, b) \in G$, alors on ait :*

(i) $\rho(\lambda, b) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;

(ii) $m_0(\lambda, b)$ *n'est pas racine de l'unité;*

(iii) $f_{\lambda,b}$ *a une orbite dense dans* $\mathbb{S}^2$.

Démonstration. — (i) est vraie sur un G_δ dense G_1 (*cf.* 2). Pour voir que (ii) est vraie sur un G_δ dense G_2, on remarque que si $p/q \in \mathbb{Q}$, alors $L_{p/q}=m_0^{-1}(e^{2\pi i p/q})$ est un fermé, sans point intérieur dans F_I par 3, et donc $\bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} L_{p/q}$ est un F_σ maigre dans F_I.

Nous allons maintenant démontrer (iii).

On pose, si $z \in \mathbb{S}^2$, $h(z)=d(z, \mathbb{S}^1).d(z, 0).d(z, \infty) \in \mathbb{R}_+$, où d est une métrique définissant la topologie de $\mathbb{S}^2$ et $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne une base (dénombrable) d'ouverts non vides de $\mathbb{S}^2$. On pose :

$$(\lambda, b) \in F_I \to g_j(\lambda, b)=\operatorname{Inf}_{n\geq 1} \operatorname{Inf}_{z\in U_j} h(f^n_{\lambda,b}(z)).$$

La fonction $(\lambda, b) \in F_I \to g_j(\lambda, b)$ est semi-continue supérieurement et donc $g_j^{-1}(0)$ est un G_δ, dense par 5. Il en résulte que $G_3=\bigcap_{j\in\mathbb{N}} g_j^{-1}(0)$ est un G_δ dense de F_I.

$$(*)\ \begin{cases} \text{Si } (\lambda, b) \in G_3, \text{ alors pour tout ouvert } U_j \text{ la fermeture de l'ensemble} \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n_{\lambda,b}(U_j) \text{ contient un point de } \mathbb{S}^1 \cup \{0, \infty\}. \end{cases}$$

Soit $G=G_1 \cap G_2 \cap G_3$.

Affirmation. — *Si* $(\lambda, b) \in G$, *alors* $J(f_{\lambda,b}) = \mathbb{S}^2$.

Démonstration. — Supposons que $J(f_{\lambda,b}) \neq \mathbb{S}^2$ et soit $C \neq \emptyset$ une composante de $\mathbb{S}^2 - J(f_{\lambda,b})$ périodique par $f_{\lambda,b}$ (*cf.* I.2).

Si C était un domaine singulier, il existerait un ouvert U_i tel que $(*)$ ne soit pas vérifiée.

Si C était une composante de Fatou, il existerait un point périodique $x \in \bar{C}$ et un ouvert $U_i \subset C$, tel que, si $n \to +\infty$, $f^n_{\lambda,b}(U_i) \to \bigcup_{p \in \mathbb{N}} f^p(x)$ et le multiplicateur de x est ou de module <1 ou égal à 1 (*cf.* I.3(a)).

Par $(*)$, $x \in \mathbb{S}^1 \cup \{0, \infty\}$. Par (i), $x \notin \mathbb{S}^1$, par (ii) $x \notin \{0, \infty\}$. On arrive donc à une absurdité et l'affirmation en résulte. ■

Le théorème résulte de l'affirmation et de II.4. ■

7. *Remarque.* — Par le corollaire 2, le théorème de Siegel et la proposition de I.5, tout $f_{\lambda,b}$ avec $(\lambda, b) \in G$ peut être approché par $f_{\lambda,b}$ ayant trois domaines singuliers; un anneau autour de $\mathbb{S}^1$ et deux disques aux voisinages de 0 et ∞.

VI. Existence d'une infinité de fractions rationnelles de degré 3 ayant une orbite dense et non topologiquement conjuguées deux à deux

1. On se donne une fraction rationnelle $f: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ de degré $d \geqslant 2$.

PROPOSITION. — *Il existe un entier* $n(d) > 0$ *tel que s'il existe un ensemble* $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *de cercles topologiques plongés vérifiant :*

— $C_i \cap C_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$;

— $f(C_i) \subset C_i$, *pour* $1 \leqslant i \leqslant p$;

— *chaque composante connexe* B_j *de* $\mathbb{S}^2 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} C_i$ *contient un point de* $J(f)$, *alors* $p \leqslant n(d)$.

2. LEMME. — *Pour chaque* j, $f(B_j)$ *contient au moins une composante connexe de* $\mathbb{S}^2 - \bar{B}_j$.

Démonstration. — Comme $f(\partial B_i) \subset \partial B_i$,

$$(\mathbb{S}^2 - \bar{B}_i) \cap f(B_i) = f(\bar{B}_i) \cap (\mathbb{S}^2 - \bar{B}_i),$$

il en résulte que l'ensemble $f(B_i) \cap (\mathbb{S}^2 - \bar{B}_i)$ est fermé, il est ouvert puisque f est ouverte. De plus, $f(B_i) \subset B_i$ n'est pas possible puisque $J(f) \cap B_i \neq \emptyset$, car sinon on contredirait le fait que $f_{|J(f)} : J(f) \to J(f)$ a un G_δ dense, d'orbites denses. ■

Remarque. — Par la même démonstration, on a : si D_1 et D_2 sont les composantes connexes de $\mathbb{S}^2 - C_i$, alors $f(D_1) = D_2$ ou $\mathbb{S}^2$.

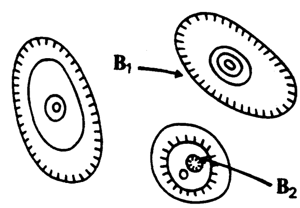
3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Nous allons, si $p \geqslant n(d)$, contredire le fait que $\operatorname{card}(f^{-1}(z)) \leqslant d$ (card voulant dire cardinal de l'ensemble considéré).

(1) Il existe au plus un nombre égal à d d'ensembles B_i qui sont des disques (i. e. difféomorphes à $\{z \mid |z| < 1\}$). En effet, si $B_1, \ldots, B_{d+1}$ sont des disques, par le lemme, si $y \in \mathbb{S}^2 - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant d+1} \bar{B}_i$, alors $f^{-1}(y)$ intersecte chacun des B_i, $1 \leqslant i \leqslant d+1$. Par l'absurde, l'affirmation en résulte.

(2) Chacun des B_i a une connectivité $\leqslant d$ (on appelle connectivité de B_i le nombre de composantes connexes de $\mathbb{S}^2 - \bar{B}_i$, chacune étant difféomorphe à un disque). Ceci résulte de la remarque de 2.

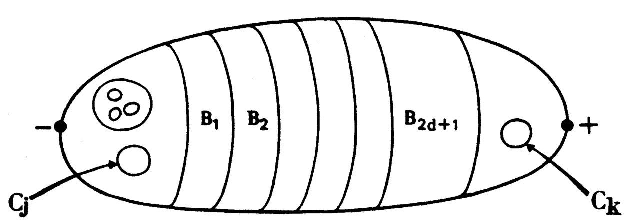
(3) Il n'est pas difficile de voir qu'il existe au plus d des B_i qui ont une connectivité $\geqslant 3$, car sinon on obtiendrait un nombre de disques $\geqslant d+1$, ce qui contredirait (1).



(4) Si p est assez grand, on obtient $2d+1$ des composantes B_i qui sont difféomorphes à $\{z, R < |z| < 1\}$, $R > 0$, et sont emboîtées comme dans la figure.

Par le lemme, $f(B_i)$ contient soit le point $-$, soit le point $+$. Il en résulte que, ou bien $\operatorname{Card}(f^{-1}(-)) \geqslant d+1$, ou bien $\operatorname{Card}(f^{-1}(+)) \geqslant d+1$.

Ceci démontre par l'absurde qu'il existe un entier $n(d)$ tel que $p \leqslant n(d)$. ■



4. Remarque

Par une démonstration analogue, il existe $n_1(d)>0$ telle que f laisse *invariant* au plus $n_1(d)$ domaines singuliers qui sont des anneaux.

5. Nous considérons les exemples que nous avons construits en V.6, $f_{\lambda,b}$, $(\lambda, b)\in G$, et donc vérifiant V.6, (i), (ii) et (iii). Remarquons que l'ensemble $\{\rho(\lambda, b)\,|\,(\lambda, b)\in G\}\subset \mathbb{T}^1-(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est non dénombrable (car s'il était dénombrable G serait contenu dans un F_σ de F_I sans point intérieur dans F_I, ce qui serait contraire à V.6).

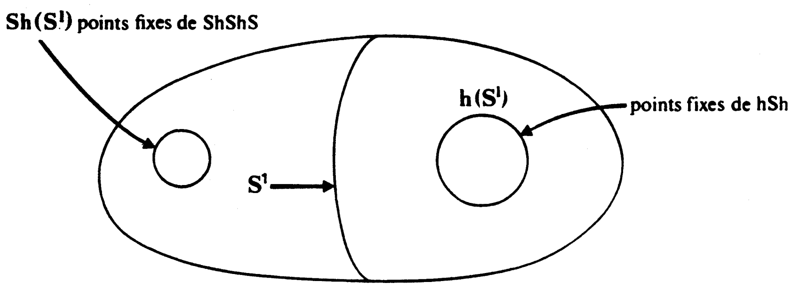
Si $(\lambda, b)\in G$, par le théorème de Denjoy, $f_{\lambda,b|\mathbb{S}^1}$ est un difféomorphisme minimal de $\mathbb{S}^1$ (i. e. toute orbite de $f_{\lambda,b|\mathbb{S}^1}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$).

Nous voulons caractériser le cercle $\mathbb{S}^1$ ainsi :

6. Proposition. — *Soit h une involution topologique de $\mathbb{S}^2$ renversant l'orientation telle que l'ensemble des points fixes de h soit un cercle topologique C. On suppose que h commute avec $f_{\lambda,b}$. Alors $C=\mathbb{S}^1=$ l'ensemble des points fixes de l'involution $S : z \to 1/\bar{z}$.*

Démonstration. — On a $f_{\lambda,b}(C)\subset C$, et si $C\cap\mathbb{S}^1\neq\varnothing$, $C=\mathbb{S}^1$.

La suite d'involutions S, hSh, $ShShS$, $hShShSh$, ... commute avec $f_{\lambda,b}$, et leurs points fixes sont des cercles topologiques deux à deux disjoints, sous-invariants par $f_{\lambda,b}$. Ceci contredit 1 (qui s'applique puisque $J(f_{\lambda,b})=\mathbb{S}^2$). ■



7. Corollaire. — *Il existe un ensemble non dénombrable de $f_{\lambda,b}$, $(\lambda, b)\in G$, et deux à deux non topologiquement conjugués.*

Démonstration. — Par la proposition ci-dessus, et le fait que $\pm$ le nombre de rotation est un invariant de conjugaison topologique (on met le signe $-$ pour permettre les homéomorphismes de $\mathbb{S}^1$ qui renversent l'orientation), le corollaire suit des remarques faites en 5. ■

8. REMARQUE

Si $(\lambda, b) \in G$, $f_{\lambda, b}$ n'est pas topologiquement conjugué à un des exemples de Lattès ou à une fraction rationnelle à points critiques prépériodiques. En effet, une fraction rationnelle à points critiques prépériodiques a tous ses points périodiques répulsifs et c'est une propriété invariante par conjugaison topologique (puisque, si un germe en 0 de fonction holomorphe g possède en 0 un point fixe topologiquement attractif, alors, puisque la suite $(g^n)_{n \geqslant 0}$ est normale sur un voisinage de 0, il suit que $|Dg(0)| < 1$).

9. REMARQUE

Les exemples de Lattès $A : z \to nz$, $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geqslant 2$, commutent avec une infinité d'involutions de $\mathbb{S}^2$ qui renversent l'orientation $\left(\text{i. e. par exemple } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ainsi que tous ses conjugués par } GL(2, \Gamma)/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}, \textit{cf. } \text{II}.6\right)$.

VII. Méthodes de construction de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$

1. Nous nous proposons dans ce paragraphe de dégager une méthode générale pour construire des fractions rationnelles ayant, sur $\mathbb{S}^2$, une orbite dense. La méthode sous-jacente est celle utilisée dans V, que nous allons illustrer ici par la disparition des domaines singuliers qui sont des disques (i. e. le théorème de Siegel). La méthode part de II. 13, remarques (1) et (2).

Nous allons d'abord illustrer la méthode sur des exemples particuliers.

2. On se donne un entier $d \geqslant 2$ et on considère la famille :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to f_{\lambda_1, \lambda_2} \equiv f_\lambda \text{ (i. e. } |\lambda_1| = |\lambda_2|),$$

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}(z) = \frac{\lambda_1 z + \lambda_2 z^d}{1 + z^{d-1}}.$$

La famille des fractions rationnelles f_λ a les propriétés suivantes :

(a) f_λ est de degré $d \Leftrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$.

(b) f_λ commute avec l'homothétie $h : z \mapsto e^{2i\pi/(d-1)} z$.

(c) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, f_λ a $2d-2$ points critiques.

(d) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 0 et ∞ sont des points fixes elliptiques de f_λ de multiplicateurs valant respectivement λ_1 et $\bar{\lambda}_2$.

(e) Par le théorème de Siegel pour presque tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, f_λ laisse invariant 2 domaines singuliers (qui sont des disques) aux voisinages de 0 et ∞.

3. THÉORÈME. — *Il existe un* G_δ *dense* $G \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *tel que, si* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in G$, *alors, on ait :*

(i) λ_1 *et* λ_2 *ne sont pas des racines de l'unité;*

(ii) f_λ *a une orbite dense sur* $\mathbb{S}^2$.

Démonstration. — Elle est presque identique à celle du théorème de V.

On note par $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{S}^2$ vérifiant pour tout i, $U_i \neq \varnothing$ et par $d(.,.)$ une métrique définissant la topologie de $\mathbb{S}^2$.

(a) Soit l'ensemble $F = \{ f_{(\lambda_1, \lambda_2)} \mid \lambda_1 \neq \lambda_2$ et λ_1 et λ_2 sont des racines de l'unité$\}$. L'ensemble F est un F_σ sans point intérieur dans $(\mathbb{S}^1)^2$. De plus F est dense dans $(\mathbb{S}^1)^2$.

(b) LEMME. — *Si* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in F$ *pour tout ouvert* $U \neq \varnothing$ *de* $\mathbb{S}^2$ *on a :*

$$\overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(U)} \cap \{0, \infty\} \neq \varnothing.$$

Démonstration. — Elle est presque la même que celle de V.5. On remarque si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in F$, alors l'ensemble $J(f_\lambda)$ est sans point intérieur puisque les points fixes elliptiques 0 et ∞ ont pour multiplicateurs respectivement λ_1 et $\bar{\lambda}_2$ qui sont des racines de l'unité. De plus, toute composante de $\mathbb{S}^2 - J(f_\lambda)$ est prépériodique et tombe sur une des composantes de Fatou associée à un des points fixes 0 ou ∞. (En effet, par I.3, il existe des points critiques c_1 et c_2 appartenant respectivement aux domaines de Fatou de 0 et ∞ tels que, si $n \to +\infty$, $f_\lambda^n(c_1) \to 0$ et $f_\lambda^n(c_2) \to \infty$. Puisque $f_\lambda \circ h = h \circ f_\lambda$ (*cf.* 2(b)) les points critiques $h^i(c_1)$ (resp. $h^i(c_2)$), $0 \leq i \leq d-2$, vérifient, si $n \to +\infty$,

$$f_\lambda^n(h^i(c_1)) \to 0 \qquad (\text{resp. } f_\lambda^n(h^i(c_2)) \to \infty).$$

Or f_λ a seulement $2d-2$ points critiques, et donc en utilisant la description des orbites des points critiques faite en I.3 il ne peut exister d'autres composantes périodiques de $\mathbb{S}^2-J(f_\lambda)$.)

Finalement on obtient que pour tout ouvert $U\subset\mathbb{S}^2$, $U\neq\emptyset$, il existe $U_1\subset U$, U_1 est un ouvert non vide, tel que, si $n\to+\infty$, alors $f^n(U_1)\to 0$ ou $f^n(U_1)\to\infty$ (*cf.* I.3). ■

(*c*) On définit, si $\lambda_1\neq\lambda_2$, et $i\in\mathbb{N}$ la fonction semi-continue supérieurement :

$$g_i:\quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1-\Delta\to\mathbb{R}_+,$$

où

$$\Delta=\{(x,y)\in(\mathbb{S}^1)^2,\ x=y\}$$

et

$$g_i(\lambda_1,\lambda_2)=\operatorname{Inf}_{n\in\mathbb{N}}\operatorname{Inf}_{z\in U_i} d(f_\lambda^n(z),\{0,\infty\}).$$

L'ensemble $g_i^{-1}(0)$ est un G_δ de $(\mathbb{S}^1)^2$. Par (*b*), pour tout *i*, l'ensemble $g_i^{-1}(0)$ est dense dans $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Soit $G_3=\bigcap_{i\in\mathbb{N}} g_i^{-1}(0)$ qui est un G_δ dense de $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$.

On a :

$(*)$ $\begin{cases}\text{si } \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in G_3, \text{ alors pour tout ouvert } U_j \text{ la fermeture de}\\ \text{l'ensemble } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(U_j) \text{ contient un point de l'ensemble } \{0,\infty\}.\end{cases}$

On pose $G_1=(\mathbb{S}^1)^2-(F\cup\Delta)$ et si $(\lambda_1,\lambda^2)\in G_1$ la conclusion (i) est vérifiée.

On définit $G=G_1\cap G_3$.

(*d*) Pour finir la démonstration, on montre la même affirmation que celle de V.6 par une démonstration identique et on conclut de la même façon que nous l'avons fait en V.6. ■

4. Remarques

(1) On peut approcher chaque $\lambda\in G$ par une suite $(l_i)_i$ telle que, pour chaque *i*, f_{l_i} ait deux disques singuliers au voisinage de 0 et ∞ (*cf.* 2(*e*)).

(2) Je ne sais pas montrer qu'il existe un ensemble non dénombrable $H\subset G$ tel que, si l_1 et $l_2\in H$ et si $l_1\neq l_2$, f_{l_1} ne soit pas topologiquement conjugué à f_{l_2} : bien que cela soit très probablement le cas.

5. Généralisation

On reprend les notations de II.12.

On suppose que $\lambda \in \Lambda \to f_\lambda \in \mathrm{Fr}_d$ est une famille continue de fraction rationnelle de degré $d \geqslant 2$ où Λ est un espace métrique complet (et donc un espace topologique de Baire).

On suppose qu'il existe $2d-d$ fonctions continues $\lambda \in \Lambda \to p_i(\lambda)$, $i=1, 2, \ldots, 2d-2$ telles que :

(a) Chaque $p_i(\lambda)$ est un point périodique elliptique de f_λ de multiplicateurs $m_i(\lambda) \in \mathbb{S}^1$ et de période $q_i \geqslant 1$ fixée.

(b) Tous les cycles périodiques associés à chaque $p_i(\lambda)$, $i=1, \ldots, 2d-2$, sont distincts.

(c) On suppose que l'ensemble :

$$F=\{\lambda \in \Lambda \mid \text{pour tout } i,\ m_i(\lambda) \text{ est une racine de l'unité}\}$$

est un F_σ sans point intérieur de Λ, dense dans Λ.

(d) De plus on fait l'hypothèse que l'ensemble :

$$I=\{\lambda \in \Lambda \mid \text{pour tout } i,\ m_i(\lambda) \text{ n'est pas une racine de l'unité}\}$$

est un G_δ dense de Λ.

Toutes ces conditions sont satisfaites, si $d=2$, par la famille définie en 2, f_λ avec $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$, $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe un G_δ dense G de Λ tel que, si $\lambda \in G$, f_λ ait une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$.*

Comme la démonstration est presque identique à celle de V.6 et de 3, nous la laissons au lecteur en indiquant seulement les points essentiels :

La fraction rationnelle f_λ a au plus $2d-2$ points critiques (distincts). Si $\lambda \in F$, chaque composante connexe périodique de $\mathbb{S}^2 - J(f_\lambda)$ est une composante de Fatou associée à un des points périodiques elliptiques $p_i(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant 2d-2$, de multiplicateur $m_i(\lambda)$ (une racine de l'unité).

6. Remarques

(1) Le point important en 5, 3 et V.6 est de contrôler tous les points critiques et de s'assurer qu'ils appartiennent, pour un F_σ dense et sans point intérieur de paramètre, aux bassins d'attraction des points périodiques elliptiques ayant pour multiplicateurs des racines de l'unité.

(2) La différence entre 5 et 3 est que dans 5, si $d \geqslant 3$, la condition $5(b)$ n'est pas vérifiée, mais on contrôle tous les points critiques (i. e. *voir* la remarque 1 ci-dessus) grâce à la symétrie $2(b)$.

(3) On peut facilement imaginer des propositions intermédiaires entre 3 et 5 (par exemple en imposant que certains des points critiques soient multiples) et même des propositions qui sont intermédiaires entre 5 et V. 5 (i. e. en ajoutant des anneaux périodiques). La principale difficulté est, me semble-t-il, de montrer qu'il existe des familles vérifiant les hypothèses (*voir* 7).

(4) Dans les exemples V. 6, 3 et 5, les familles $\lambda \in \Lambda \to f$ vérifient que pour tout λ, f_λ est récurrent par chaîne (*cf.* II. 13, remarque (1)). Ensuite le point important est II. 13, remarque (2).

7. Questions

(1) Montrer que, si $d \geqslant 3$, on peut construire des familles vérifiant les hypothèses de 5. De plus, il serait intéressant de connaître les périodes q_i que l'on peut obtenir (si f est une fraction rationnelle de degré d, alors f a $d+1$ points fixes et, si $d \geqslant 4$, on a, $d+1 < 2d-2$).

(2) Il serait aussi intéressant de construire des fractions rationnelles de degré d ayant k_1 anneaux périodiques et k_2 points périodiques elliptiques avec $2k_1+k_2=2d-2$ et de voir quelles périodes on peut obtenir ainsi que quels entiers k_1 et k_2 sont possibles. (Toutes les possibilités ne peuvent pas se réaliser puisque, en utilisant VI. 1, il n'est pas difficile de voir qu'une fraction rationnelle de degré 2 ne laisse pas d'anneau invariant. En contrepartie, il n'est pas clair qu'une fraction rationnelle de degré 2 ne puisse pas laisser invariant un anneau périodique de grande période.)

A ce propos le lecteur peut consulter l'article de Sullivan [S_1].

(3) Il serait utile, me semble-t-il, de comprendre dans l'optique de la question (1) les bifurcations au voisinage d'une fraction rationnelle à points critiques prépériodiques II. 8 (*voir* à ce propos [R]).

VIII. Appendice : les anneaux de nombre de rotation de type constant

0. Introduction

Pour la commodité du lecteur, nous donnons dans cet appendice une démonstration, qui nous semble particulièrement simple, du théorème local de conjugaison de Arnold ainsi que l'analyticité locale par rapport aux paramètres $\mathbb{R}$-analytiques (résultat aussi dû à Arnold) dans le cas particulier où le nombre de rotation est un nombre de type constant.

Ces résultats locaux restent valables pour les nombres satisfaisant à une condition diophantienne (*voir* [A]) et même pour une classe de nombres contenant des nombres de Liouville, i.e. les mêmes nombres pour lesquels l'on sache démontrer le théorème de Siegel, [R], [Si].

Pour voir ceci, le lecteur peut aussi adapter la démonstration de [H], annexe pour démontrer le théorème du paragraphe 6 pour les nombres satisfaisant à une condition diophantienne (de petites modifications sont nécessaires puisque [H], A.3.8.2 n'est pas vrai, car g ne préserve plus l'axe réel, il faut donc le remplacer par $|\operatorname{Im} g|_\nu \leqslant (1/2)\nu$, dans [H], A.5.1) il faut remplacer V^i_ν, W_ν par $\tilde{V}^i_\nu, \tilde{W}_\nu$ en ajoutant les conditions $|g-\mathrm{Id}|_\nu \leqslant (1/2)\nu$, $|\varphi|_\nu < 1/8$ et dans 5.2, il faut remplacer $|f-f_0|_h = \varepsilon\, h^{2\theta}$ par $|f-f_0|_h = \varepsilon\, h^a$, où a est plus grand que 2θ).

Le théorème du paragraphe 6, à ma connaissance, n'a jamais été énoncé, bien qu'il soit implicitement inclus dans la dépendance C^∞ de paramètres C^∞ dans le théorème local de Arnold.

Le théorème du paragraphe 6 a de très nombreux corollaires. Dans les paragraphes 9 et 11, nous avons utilisé le résultat global de [H], IX (ce qui est absolument indispensable) et les autres corollaires n'utilisent que le théorème du paragraphe 6. Tous les corollaires restent valables pour les nombres satisfaisant à une condition A.

En 12, nous déduisons le théorème de Siegel de 6. Pour les nombres de type constant, le lecteur peut aussi donner la même démonstration que celle de 6 en utilisant les espaces de Hardy-Sobolev, et la même observation qu'en 5 noter que l'inverse de l'équation linéarisée de conjugaison à $z \to e^{2\pi i\alpha} z$ en l'identité, pour α un nombre de type constant, ne perd qu'une unité sur les espaces de Hardy-Sobolev *ad hoc*.

Le paragraphe 14 montre l'existence d'anneaux périodiques pour les fractions rationnelles.

Le paragraphe 15 montre qu'il existe un G_δ dense de nombres irrationnels, baptisé nombres très Liouville, tel que toute fraction rationnelle de degré $\geqslant 2$ ne laisse pas invariant de domaine singulier de nombre de rotation très Liouville (ni de nombre de rotation rationnel).

On peut généraliser le théorème du paragraphe 6 au cas de n-variables complexes ainsi : soient $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\,\mathbb{R}^n$,

$$B_\delta = \{ z = (x_j + i y_j)_j \,|\, \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |y_j| \leqslant \delta \}, \qquad \delta > 0,$$

et $R_\alpha : z \mapsto z+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, où α satisfait à une condition diophantienne. Pour $\delta>0$ et α fixé, il existe $\varepsilon(\delta, \alpha)>0$ tel que si $f: B_\delta \to \mathbb{C}^n$ est continue sur B_δ et holomorphe sur l'intérieur de B_δ et vérifie $f \circ R_p = R_p \circ f$, si $p \in \mathbb{Z}^p$, ainsi que :

$$\| f-R_\alpha \|_{C^0(B_\delta)} < \varepsilon (\delta, \alpha),$$

alors il existe $\lambda_f \in \mathbb{C}^n$ et un plongement $g_f : B_{\delta/2} \mapsto \mathbb{C}^n$, où g_f est continue sur $B_{\delta/2}$ et holomorphe à l'intérieur de $B_{\delta/2}$ et tels que l'on ait :

$$\lambda_f + f \circ g_f (z) = g_f \circ R_\alpha (z), \qquad z \in B_{\delta/2}.$$

Si f est $\mathbb{R}$-analytique, i. e. $f(\mathbb{R}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^n$, c'est précisément l'objet de [H], annexe, si f ne préserve pas nécessairement $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ il faut apporter les modifications que nous avons indiquées ci-dessus à la démonstration de [H], annexe.

1. On pose, si $\delta>0$,

$$B_\delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leqslant \delta \}.$$

2. Espaces O_δ^k, $k \in \mathbb{N}$

On note par O_δ^k l'espace de Banach sur $\mathbb{C}$ des fonctions $\varphi : B_\delta \to \mathbb{C}$ de classe C^k, $\mathbb{Z}$-périodique (i. e. $\varphi(z+1)=\varphi(z)$) et holomorphe sur l'intérieur de B_δ.

Si $\varphi \in O_\delta^0$, on peut écrire de façon unique :

$$\varphi (z) = \textstyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi} (k)\, e^{2\pi i n z},$$

où $\hat{\varphi} (k) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, e^{-2\pi i k t}\, dt$, $t \in [0, 1]$, et la série converge uniformément sur $B_{\delta'}$ pour $\delta' < \delta$.

On pose :

$$\| \varphi \|_{C_\delta^0} \equiv \| \varphi \|_{C^0(B_\delta)} = \sup_{z \in B_\delta} | \varphi (z) |,$$

et si $\varphi \in O_\delta^k$.

$$\| \varphi \|_{C_\delta^k} \equiv \| \varphi \|_{O_\delta^k} = \operatorname{Sup} (\| \varphi \|_{C_\delta^0}, \| D^k \varphi \|_{C_\delta^0}).$$

La dérivée de φ sur B_δ est notée $D\varphi$ et on a :

$$D\varphi(z)=2\pi i \sum_{n\neq 0} n\, \hat{\varphi}(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Si $\varphi \in O_\delta^0$ et $\delta'<\delta$, on a l'inégalité de Cauchy :

$$\| D\varphi \|_{C_{\delta'}^0} \leqslant \frac{\| \varphi \|_{C_\delta^0}}{\delta-\delta'}.$$

(Pour voir ceci, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy en tout point de $B_{\delta'}$.)

3. Espaces $O_\delta^{k,2}$, $k \in \mathbb{N}$

Soit :

$$O_\delta^{k,2}=\{ \varphi=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n z} \mid a_n \in \mathbb{C} \text{ si } n \in \mathbb{Z},\ \| D^k\varphi \|_{O_\delta^{0,2}} < +\infty \},$$

où

$$\| D^k\varphi \|_{O_\delta^{0,2}}^2=(2\pi)^{2k} \sum_n (| n |^k \,| a_n |\, e^{2\pi |n| \delta})^2.$$

Pour la norme :

$$\| \varphi \|_{O_\delta^{k,2}}=(| a_0 |^2+\| D^k\varphi \|_{O_\delta^{0,2}}^2)^{1/2},$$

$O_\delta^{k,2}$ est un espace de Hilbert.

Il est élémentaire de voir que l'on a (*cf.* la théorie des espaces de Hardy) :

$$O_\delta^{k,2} \equiv \tilde{O}_\delta^{k,2}=\{ \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \in O_{\delta'}^{k,2}, \forall\, \delta'<\delta \text{ et } \sup_{|r|<\delta} \| D^k\tilde{\varphi} \mid \mathbb{T}^1 \times \{ r \} \|_{L^2(\mathbb{T}^1\times\{r\})} < +\infty \}.$$

Faits

(*a*) Il existe une constante $C_1>0$, indépendante de $\delta>0$, telle que l'on ait :

$$\| \varphi \|_{C_\delta^0} \leqslant C_1 \| \varphi \|_{O_\delta^{1,2}}.$$

(Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

(*b*) Si $k \geqslant 1$, $O_\delta^{k,2}$ est une algèbre de Banach.

(*c*) Si $k \geqslant 1$, $g \in O_\delta^{k,2}$ et φ est une application holomorphe sur un voisinage de $g(B_\delta)$, alors $\varphi \circ g \in O_\delta^{k,2}$ et on a :

$$\| D^k(\varphi \circ g) \|_{O_\delta^{0,2}} \leqslant C(\| g \|_{O_\delta^{k,2}}^k + \| g \|_{O_\delta^{k,2}}) \| \varphi \|_{C^k(g(B_\delta))},$$

où C est une constante.

(Il suffit d'utiliser la caractérisation de $O_\delta^{k,2}$ par $\tilde{O}_\delta^{k,2}$.)

De plus sur un voisinage V de $g \in O_\delta^{k,2}$:

$$\psi \in V \xrightarrow{\Phi} \varphi \circ \psi \in O_\delta^{k,2}$$

est une application holomorphe dont la dérivée vaut :

$$\Delta\psi \in O_\delta^{k,2} \to D\varphi \circ \psi \, \Delta\psi.$$

4. Espaces $D_\delta^{k,2}$ et $K_\delta^{k,2}$

Si $k \geqslant 1$, on pose $D_\delta^{k,2} = \{ \mathrm{Id} + \varphi \mid \varphi \in O_\delta^{k,2} \}$ et

$$K_\delta^{k,2} = \left\{ h = \mathrm{Id} + \varphi \mid \varphi \in O_\delta^{k,2},\ \varphi(0) = 0,\ \| \varphi \|_{C_\delta^0} < \frac{1}{2}\delta \right\}.$$

Si $h \in K_\delta^{k,2}$, on a :

$$h(B_\delta) \subset B_{(3/2)\delta} \subset \mathrm{Int}\, B_{2\delta}.$$

Faits

Si $k \geqslant 1$, $\varphi \in O_{2\delta}^0$ et $h \in K_\delta^{k,2}$, alors, on a, $\varphi \circ h \in O_\delta^{k,2}$ (il suffit d'utiliser la caractérisation de $O_\delta^{k,2}$ par $\tilde{O}_\delta^{k,2}$). Par les inégalités de Cauchy, comme φ est holomorphe sur un voisinage de $h(B_\delta)$ l'application :

$$\Psi : \quad (\varphi, h) \in O_{2\delta}^0 \times K_\delta^{k,2} \mapsto \varphi \circ h \in O_\delta^{k,2}$$

est continue, holomorphe, et sa dérivée vaut :

$$D\Psi(\varphi, h)(\Delta\varphi, \Delta h) = \Delta\varphi \circ h + D\varphi \circ h \, \Delta h.$$

On a aussi :

$$\| \varphi \circ h \|_{O_\delta^{k,2}} \leqslant C(\| Dh \|_{O_\delta^{k-1,2}}^k + \| Dh \|_{O_\delta^{k-1,2}}) \| \varphi \|_{C_{3\delta/2}^k},$$

C étant une constante dépendant de δ.

5. Soient les translations de $\mathbb{C}$, $R_c(z)=z+c$.

Si $c\in\mathbb{R}$, on a $R_c(B_\delta)=B_\delta$.

Un nombre α *est dit de type constant :* si $\alpha\in\mathbb{R}$ et s'il existe $\gamma>0$ tel que pour tout $p/q\in\mathbb{Q}$, on ait $|\alpha-(p/q)|\geqslant\gamma/q^2$.

On a la proposition immédiate suivante :

PROPOSITION. — *Soient* α *un nombre de type constant et* $k\geqslant 1$, *alors, pour tout* $\eta\in O_\delta^{k,2}$ *vérifiant* $\hat{\eta}(0)=0$, *il existe un unique* $\psi\in O_\delta^{k-1,2}$ *vérifiant,* $\hat{\psi}(0)=0$,

$$L_\alpha(\psi)=\psi-\psi\circ R_\alpha=\eta$$

et de plus on a

$$\|\psi\|_{O_\delta^{k-1,2}}\leqslant\frac{C}{\gamma}\|\eta\|_{O_\delta^{k,2}}$$

où C *est une constante indépendante de* δ *et* γ.

Remarque. — $-L_\alpha$ est « l'application tangente » en $h=\mathrm{Id}$, à « l'application » $h\in D_\delta^{k,2}\to h\circ R_\alpha\circ h^{-1}$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

6. THÉORÈME. — *Soient* $\delta>0$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$ *un nombre de type constant, alors il existe* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\alpha)>0$ *dépendant de* $\delta>0$ *et* α *et une application holomorphe :*

$$F:\quad f\in V_{\varepsilon,\delta}\to(\lambda,h)\in\mathbb{C}\times K_{\delta/2}^{2,2},$$

où on a posé

$$V_{\varepsilon,\delta}=\{g=\mathrm{Id}+\varphi\mid\varphi\in O_\delta^0,\ \|\varphi-\alpha\|_{C_\delta^0}<\varepsilon\},$$

telle que :

$$(*)\qquad (\lambda+f)\circ h=h\circ R_\alpha,\qquad F(R_\alpha)=(0,\mathrm{Id}).$$

De plus, on a l'unicité locale suivante : il existe $\eta(\delta,\alpha)>0$ *tel que si* $f\in V_{\varepsilon,\delta}$ *et* $(\lambda,h)\in\mathbb{C}\times K_{\delta/2}^{2,2}$ *vérifie* $(*)$ *et* $\|h-\mathrm{Id}\|_{O_\delta^{2,2}}<\eta(\delta,\alpha)$, *alors :*

$$F(f)=(\lambda,h).$$

Démonstration. — Si $\varepsilon>0$ est assez petit, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy, $\|Df-1\|_{C_{4\delta/5}^0}<1/4$ et $\|\mathrm{Log}\,Df\|_{C_{3\delta/4}^2}\leqslant\mathrm{Cte}\,\varepsilon$.

Si $\| Dh-1 \|_{C^0_{\delta/2}} < 1/4$, alors on peut prendre les log de $Df \circ h\, Dh = Dh \circ R_\alpha$ et on a nécessairement :

$$\operatorname{Log} Df \circ h = \operatorname{Log} Dh \circ R_\alpha - \operatorname{Log} Dh.$$

Si $\| f - R_\alpha \|_{O^0_\delta} < \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, et $\eta > 0$ assez petits, nous allons construire une application holomorphe de $W_{\eta, \delta/2} = \{ \operatorname{Id} + \varphi \in K^{2,2}_{\delta/2} \mid \| \varphi \|_{O^{2,2}_{\delta/2}} < \eta \}$ dans lui-même.

Pour cela, si $h_1 \in W_{\eta, \delta/2}$, on pose :

$$\mu(f, h_1) = -\int_0^1 \operatorname{Log} Df \circ h_1(t)\, dt, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

L'application $(f, h_1) \to \mu(f, h_1)$ est holomorphe ainsi que l'application $(f, h_1) \to \operatorname{Log} Df \circ h_1 \in O^{2,2}_{\delta/2}$ (*voir* 3 et 4).

Soit $\psi \in O^{1,2}_{\delta/2}$ telle que l'on ait :

$$\psi \circ R_\alpha - \psi = \operatorname{Log} Df \circ h_1 + \mu(f, h_1)$$

et $\hat{\psi}(0) = 0$ (*voir* 5).

On pose, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $Dh_2 = e^{\psi + a}$, où

$$e^a = \left(\int_0^1 e^{\psi(t)}\, dt \right)^{-1} \in \mathbb{C}$$

(si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on peut supposer que $\| e^\psi - 1 \|_{C^0_{\delta/2}} < 1/4$), et si $u \in B_{\delta/2}$, on définit :

$$h_2(u) = \int_0^u Dh_2(z)\, dz.$$

On a $h_2 \in D^{2,2}_{\delta/2}$ et $\| h_2 - \operatorname{Id}_{B_{\delta/2}} \|_{O^{2,2}_{\delta/2}} \leqslant C_1 \varepsilon$, où C_1 est une constante dépendant de δ et de α.

Pour $\eta > 0$ donné, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors, on ait $h_2 \in W_{\eta/2, \delta/2}$ et si η est assez petit, on a $\| Dh_2 - 1 \|_{O^0_{\delta/2}} < 1/4$ (en utilisant 3(*a*)). Nous avons ainsi défini une application holomorphe :

$$\Phi : \quad (f, h_1) \in \underline{V}_{\varepsilon, \delta} \times W_{\eta, \delta/2} \to h_2 \in W_{\eta/2, \delta/2}$$

vérifiant

$$(+) \qquad e^{\mu(f,h_1)}\, Df\circ h_1\, Dh_2 = Dh_2\circ R_\alpha.$$

On a :

$$\| D_2\,\Phi \| \leqslant C\,\varepsilon,$$

où C est une constante dépendant de $\delta>0$, α et η ($D_2\,\Phi$ désigne la dérivée par rapport à la variable h_1).

Si $\varepsilon>0$ est assez petit, par le théorème des contractions lipschitziennes ([5]) il existe une application $F_2 : V_{\varepsilon,\delta} \to W_{\eta/2,\delta/2}$ telle que $F_2(f)=h$ soit l'*unique* point fixe dans $\bar{W}_{\eta/2,\delta/2}$ de l'application $h_1 \to \Phi(f, h_1)$ (i. e. $\Phi(f, h)=h$). On peut aussi appliquer le théorème des fonctions implicites (dans les espaces de Banach) et il en résulte que l'application $f\in V_{\varepsilon,\delta} \to F_2(f)\in W_{\eta,\delta/2}$ est holomorphe.

Par $(+)$, on a :

$$e^{\mu(f,h)}\, Df\circ h\, Dh = Dh\circ R_\alpha.$$

On intègre sur $[0, 1]$, d'où :

$$\int_0^1 e^{\mu(f,h)}\, Df\circ h(t)\, Dh(t)\, dt = e^{\mu(f,h)} = \int_0^1 Dh(t+\alpha)\, dt = 1$$

et donc

$$Df\circ h\, Dh = Dh\circ R_\alpha$$

soit $(*)$:

$$f\circ h+\lambda = h\circ R_\alpha$$

avec $F_1(f)=\lambda\in\mathbb{C}$.

Comme l'application $f\to F_2(f)$ est holomorphe, il en est de même de :

$$f\to F(f)=(F_1(f), F_2(f))\in \mathbb{C}\times K^{2,2}_{\delta/2}.$$

L'unicité locale résulte de l'unicité du point fixe $h\in\bar{W}_{\eta/2,\delta/2}$ de l'application $h_1 \to \Phi(f, h_1)$ (*si* $h\in K^{2,2}_{\delta/2}$, $h(0)=0$), ce qui implique l'unicité locale de $\lambda\in\mathbb{C}$ et $h\in\bar{W}_{\eta/2,\delta/2}$ vérifiant $(*)$. ■

([5]) On peut aussi appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff.

Pour les corollaires qui suivent, on suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre de type constant fixé.

Remarque. — Si $f = R_\alpha$, on a $DF_1(R_\alpha)\Delta f = -\int_0^1 \Delta f(t)\,dt$, où $DF_1(f)$ est la dérivée de $f \to F_1(f)$.

Remarque. — Si $f \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ est un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique, alors on peut complexifier f en $\tilde{f}$ où $\tilde{f} \in D_\delta^{0,2}$ pour un $\delta > 0$. f étant réelle sur $\mathbb{R}$, on a, $\tilde{f}(\bar{z}) = \overline{\tilde{f}(z)}$, si $z \in B_\delta$.

De plus, on peut supposer que f est un plongement de B_δ dans $\mathbb{C}$.

7. Corollaire. — *Soit $f \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ avec $\tilde{f} \in D_\delta^{1,2}$. On suppose que $\|\tilde{f} - R_\alpha\|_{C_\delta^0} < \varepsilon(\delta, \alpha)$ où le nombre $\varepsilon(\delta, \alpha)$ est défini en 6. Alors $F(f) = (\lambda, h) \in \mathbb{R} \times D^\omega(\mathbb{T}^1)$ et vérifie :*

$$(*) \qquad (\lambda + f) \circ h = h \circ R_\alpha.$$

Remarque. — Par la définition III.4, on a $\lambda = \lambda_\alpha(f)$, et si $\rho(f) = \alpha$, $\lambda_\alpha(f) = 0$ (*cf.* III.3(7)).

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si dans la démonstration de 6, on suppose que f est réelle sur $\mathbb{R}$ ainsi que h_1, alors il en est de même de $\mu(f, h_1)$, h_2, du point fixe h, et de λ. ■

8. Soit pour $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$, une famille $s \to f_s \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ $\mathbb{R}$-analytique, alors la fonction complexifiée

$$(z, s) \in \mathbb{C} \times \{\tilde{s} \in \mathbb{C}^n, \|\tilde{s}\| < \varepsilon\} \to \tilde{f}(\tilde{s}, z) \in \mathbb{C},$$

vérifie $\tilde{s} \to \tilde{f}_{\tilde{s}} \in D_\delta^{1,2}$, pour un $\delta > 0$ et pour $\tilde{s}$ assez petit.

Corollaire. — *On suppose que $\tilde{f}_{\tilde{s}}$ vérifie, si $\tilde{s}$ est assez petit, $\|\tilde{f}_{\tilde{s}} - R_\alpha\|_{C_\delta^0} < \varepsilon(\delta, \alpha)$. Alors, pour s assez petit, l'application :*

$$s \to F(f_s) = (\lambda_\alpha(f_s), h(f_s)) \in \mathbb{R} \times D^\omega(\mathbb{T}^1)$$

est $\mathbb{R}$-analytique.

Démonstration. — Cela suit immédiatement de 7 et 6 et de l'unicité locale de 6. ■

9. Corollaire. — *Soit α un nombre de type constant. Soient M une variété $\mathbb{R}$-analytique de dimension finie et $s \in M \to f_s \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ une famille $\mathbb{R}$-analytique, alors la fonction $s \to \lambda_\alpha(f_s) \in \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-analytique.*

Démonstration. — Comme la fonction $f \to \lambda_\alpha(f)$ est continue, il suffit de voir qu'elle est localement $\mathbb{R}$-analytique, et donc on peut supposer que $s \in \mathbb{R}^n$, où $\|s\|$ est petit, et quitte à composer par un R_λ, on peut supposer que f_0 vérifie $\rho(f_0)=\alpha$. Par le théorème fondamental de [H]; IX, on a $f_0 = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec $g \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$. Soit, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}^n$ petits, la famille $\mathbb{R}$-analytique suivante :

$$(\mu, s) \to g \circ (R_\mu \circ f_s) \circ g^{-1} \equiv f_{\mu,s}.$$

On vérifie, que si μ et s sont assez petit, alors 8 s'applique, et donc il existe une fonction $(\mu, s) \to \lambda_\alpha(f_{\mu,s})$ $\mathbb{R}$-analytique telle que l'on ait, pour μ et s assez petits,

$$\lambda_\alpha(f_{\mu,s}) + f_{\mu,s} = h_{\mu,s} \circ R_\alpha \circ h_{\mu,s}^{-1}.$$

Pour s petit, on cherche $\mu(s)$ tel que $\lambda_\alpha(f_{\mu(s),s})=0$. C'est possible par le théorème des fonctions implicites, puisque $(\mu, s) \to \lambda_\alpha(f_{\mu,s})$ est $\mathbb{R}$-analytique et vérifie : $\lambda_\alpha(f_{0,0})=0$ ainsi que :

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_\alpha(f_{0,0})\,\Delta\mu = -\Delta\mu \int_0^1 Dg \circ g^{-1} \circ R_\alpha(\theta)\, d\theta$$

qui est $\neq 0$ si $\Delta\mu \neq 0$.

On a construit une fonction $s \to \mu(s)$, $\mathbb{R}$-analytique, telle que :

$$R_{\mu(s)} \circ f_s = h_{\mu(s),s} \circ R_\alpha \circ h_{\mu(s),s}^{-1}$$

soit en utilisant III.3 (7),

$$\mu(s) = \lambda_\alpha(f_s). \quad \blacksquare$$

10. Pour $s=(a_1, \tilde{a}_1, \ldots, a_{n+1}, \tilde{a}_{n+1}, b_1, \tilde{b}_1, \ldots, b_n, \tilde{b}_n) \in \mathbb{C}^{2p}$, $p=2n+1$, $n \geqslant 0$, et $a \in \mathbb{C}$ on pose :

$$f_{a,s}(z) = a\,\frac{z-a_1}{1-\tilde{a}_1 z} \cdots \frac{z-a_{n+1}}{1-\tilde{a}_{n+1} z}\,\frac{1-b_1 z}{z-\tilde{b}_1} \cdots \frac{1-b_n z}{z-\tilde{b}_n}.$$

COROLLAIRE. — *Si $(a-1, s)$ est assez voisin de 0 dans $\mathbb{C}^{2p+1}$, alors il existe une application holomorphe $f_{a,s} \xrightarrow{F} (\lambda, h)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est voisin de α et h est un plongement holomorphe d'un voisinage W de $\mathbb{S}^1$ à valeur dans $\mathbb{S}^2$, voisin de l'identité, telle que l'on ait, pour $z \in W$, $e^{2\pi i\lambda} f_{a,s}(h(z)) = h(e^{2\pi i\alpha} z)$, et $F(f_{1,0}) = (\alpha, \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2})$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de 6. ■

Remarques. — (1) Ce corollaire exprime que l'existence d'anneaux invariants de nombre de rotation de type constant fixé est localement une condition analytique complexe de codimension $=1$.

(2) Si $a_j \neq \tilde{b}_k$ et $b_j \neq \tilde{a}_k$ et $n \geqslant 1$ et s petit, on obtient de vrais anneaux qui seront voisins de $\mathbb{S}^1$ puisque $f_{a,s}$ a un pôle dans chaque composante connexe de $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$ (en utilisant le fait que, si $s \to 0$, $h \to \mathrm{Id}$).

(3) Par des arguments de dimension, il existe des fractions rationnelles qui laissent invariants des anneaux, mais qui ne laissent aucun cercle métrique invariant (*voir* IV.4).

11. Corollaire. — *On se donne C une sous-variété $\mathbb{R}$-analytique de $\mathbb{C}$, difféomorphe à $\mathbb{S}^1$, et une application f holomorphe d'un voisinage de C dans $\mathbb{C}$, telles que $f(C)=C$, $f_{|C}$ soit un difféomorphisme de C préservant l'orientation et $(f_{|C})=\alpha$, où α est un nombre de type constant.*

Alors il existe un voisinage fermé V_δ de C, une application holomorphe $\lambda : U \subset O^0(V_\delta) \to \mathbb{C}$, où $O^0(V_\delta)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur V_δ holomorphes sur l'intérieur de V_δ et U est un voisinage ouvert de $f_{|V_\delta} \in O^0(V_\delta)$, telle que $\lambda(f)=0$ et $\lambda^{-1}(0)$ est une sous-variété banachique de l'ouvert U, et si $g \in \lambda^{-1}(0)$, alors g laisse invariant un anneau B voisin de C et de nombre de rotation α (i.e. *$g_{|B}$ est conjugué à $z \to e^{2\pi i\alpha} z$, où $R<|z|<1$, pour un $0<R<1$*).

Démonstration. — La variété C borde dans $\mathbb{C}$ un disque D_1, il existe donc une représentation conforme φ de $\mathrm{Int}\, D_1$ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$. Puisque C est une variété $\mathbb{R}$-analytique de $\mathbb{C}$ difféomorphe à $\mathbb{S}^1$, φ s'étend en une représentation conforme d'un voisinage de D_1, on peut donc supposer que $C=\mathbb{S}^1[N]$. Par conjugaison (en utilisant [H], IX), on peut supposer que $f(z)=e^{2\pi i\alpha} z$ et le corollaire résulte de 6. ■

Le fait d'avoir, parmi les fractions rationnelles de degré fixé $d \geqslant 2$, un domaine singulier qui soit un anneau de nombre de rotation fixé α, un nombre de type constant et « voisin » d'un anneau fixé domaine singulier d'une fraction rationnelle f_0 et de nombre de rotation α est donné par l'annulation d'une fonction holomorphe. Cela n'exclut pas *a priori* pour un degré fixé que cet ensemble ne puisse pas contenir un ouvert des paramètres (ni que globalement cet ensemble ne soit pas localement fermé).

Néanmoins, en utilisant le théorème de Runge [Rd], si on augmente le degré, on peut détruire, si cela se produisait, le caractère ouvert local parmi les paramètres.

En contre-partie, le fait, pour une fraction rationnelle de degré fixé $d \geqslant 2$, d'avoir un domaine singulier qui est un anneau de nombre de rotation α n'est pas, en général, une condition fermée parmi les paramètres ainsi que le montrent les exemples de IV. 7. Cela soulève le problème de savoir comment les anneaux disparaissent.

12. COROLLAIRE (*théorème de Siegel pour les nombres de type constant*). — *Soit* $f(z)=e^{2\pi i\alpha}z+O(z^2)$ *un germe d'application holomorphe de* $(\mathbb{C}, 0)$ *dans* $(\mathbb{C}, 0)$. *On suppose que* α *est un nombre de type constant. Alors il existe un germe de difféomorphisme holomorphe* $h:(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *tel que l'on ait, pour* z *assez petit.*

$$f(z)=h(e^{2\pi i\alpha}h^{-1}(z)).$$

Démonstration. — On peut remplacer f par $f_t(z)=(1/t)f(tz)$, $t \to 0$, $t \neq 0$, et supposer que f_t est un plongement holomorphe sur $\{z \mid |z|<2\}$ et on a, si $t \to 0$, $e^{-2\pi i\alpha}f_t \to \mathrm{Id}_B$, où $B=\{z \mid 1/2<|z|<3/2\}$. Si t est assez petit, il existe, par 6, λ_t voisin de 1 tel que $\lambda_t f_t$ laisse invariant un anneau $B_1, B_1 \subset B$ et de nombre de rotation α, B_1 borde un disque $D \ni 0$ et $f:\mathrm{Int}\,D \to \mathrm{Int}\,D$ est un difféomorphisme $\mathbb{C}$-analytique. Par le théorème de la représentation conforme, et le fait que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est le groupe des automorphismes complexes de $\{z \mid |z|<1\}$ il en résulte que $\lambda_t f_t$ est holomorphiquement conjugué à une rotation : $z \to e^{2\pi i\beta}z$, $\beta \in \mathbb{T}^1$, et on a $\lambda_t Df_t(0)=e^{2\pi i\beta}$. Comme $\lambda_t f_t$ laisse invariant un anneau de nombre de rotation α, il en résulte que $\beta=\alpha$ et $\lambda_t=1$. ■

13. COROLLAIRE. — *On se donne* $r>0$, $\delta>0$, *et* α *un nombre de type constant. Il existe* $\varepsilon_1(\alpha, \delta, r)>0$ *tel que si* $a \in D_r=\{z \mid |z| \leqslant r\} \to f_a \in D_\delta^{1,2}$ *est continue et holomorphe sur* $\{z \mid |z|<r\}$ *et vérifie :*

$$\sup_{a \in D_r, z \in B_\delta} |f_a(z)-a-z-\alpha|<\varepsilon_1(\alpha, \delta, r)$$

alors il existe $l \in D_{r/2}$ *et* $h_l \in D_{\delta/2}^{2,2}$ *tels que l'on ait :*

$$f_l \circ h_l(z)=h_l(z+\alpha) \qquad si \quad z \in B_{\delta/2}.$$

Démonstration. — Par l'inégalité de Cauchy, on peut supposer si $\varepsilon_2>0$ est donné, si ε_1 est assez petit, que l'on a :

$$\sup_{a \in D_{(2/3)r}, z \in B_\delta} \left| \frac{\partial f_a(z)}{\partial a}-1 \right| < \varepsilon_2.$$

On suppose que $\varepsilon_1 < \varepsilon$, où ε est le nombre donné par le théorème du paragraphe 6, il existe pour $a \in D_{r/2}$, des applications holomorphes $a \to \lambda(a)$ et $a \to h_a$ telles que l'on ait :

$$\lambda(a) - a + f_a \circ h_a(z) = h_a(z+\alpha) \qquad \text{si} \quad z \in B_\delta.$$

Si $\varepsilon_1 \to 0$,

$$\frac{\partial \lambda(a)}{\partial a} \to -\int_0^1 \left(\frac{\partial f_a}{\partial a}(t) - 1 \right) dt \qquad (t \in [0, 1]),$$

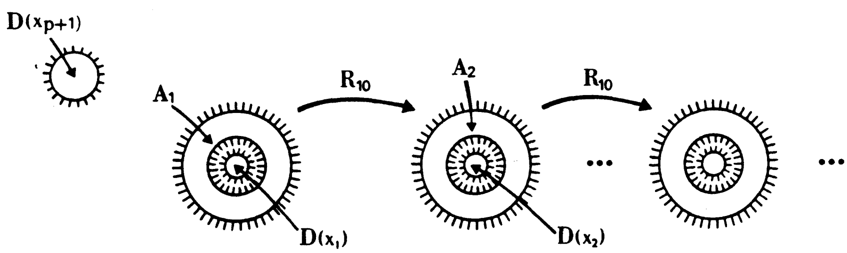
$$\lambda(a) \to 0 \qquad \text{et} \qquad h_a \to \mathrm{Id}.$$

$$\left(\text{Si } f = R_\alpha, \text{ alors } D\lambda(R_\alpha)\Delta f = -\int_0^1 \Delta f(t)\, dt \right).$$

Il en résulte, si $\varepsilon_1 \to 0$ est assez petit, que l'application $a \in D_{r/2} \to \lambda(a)$ envoie $D_{r/2}$ dans lui-même, et c'est une contraction lipschitzienne. Soit $l \in D_{r/2}$ l'unique point fixe de l'application $a \in D_{r/2} \to \lambda(a) \in D_{r/2}$. l est le nombre cherché. ■

14. Corollaire. — *Pour tout entier $p \geq 1$, il existe une fraction rationnelle f qui possède un domaine singulier qui est un anneau périodique de période p.*

Démonstration. — Soient $A_1 = \{z \mid 1/4 < |z| < 1/2\}$ et $A_{j+1} = R_{10j}(A_1)$, $j = 1, \ldots, p-1$, où $R_{10j}(z) = z + 10j$, et $D(x_i)$, $p+1$ disques fermés deux à deux disjoints contenus dans $\mathbb{C} - \bigcup_i \bar{A}_i$ et de centres x_i où si $i \neq j$, x_i et x_j sont dans des composantes connexes différentes de $\mathbb{C} - \bigcup_i \bar{A}_i$.



On définit la fonction holomorphe g sur un voisinage de $\bar{\Omega}$ où $\bar{\Omega}=(\bigcup_i \bar{A}_i)\cup(\bigcup_i D(x_i))$ par :

$$\begin{cases} g(z)=R_{(i+1)10}(z) & \text{si } z\in A_i, \quad 1\leqslant i\leqslant p-1,\\ g(z)=e^{2\pi i\alpha}R_{-p10}(z) & \text{si } z\in A_p,\\ g(z)=\mu z & \text{si } z\in D(x_i); \end{cases}$$

où $0<\mu<1/2$ et α est un nombre de type constant.

Pour tout $\varepsilon>0$, par le théorème de Runge (*voir* [Rd], chap. 13), il existe une fraction rationnelle f telle que l'on ait :

$$\| f-g \|_{C^0(\bar{\Omega})}<\varepsilon.$$

Soient H_i les fonctions holomorphes (sur un voisinage de $\bar{\Omega}$) qu'on définit ainsi :

$$\begin{cases} H_1(z)=z & \text{si } z\in\bar{A}_1,\\ H_1(z)=0 & \text{si } z\in\bar{\Omega}-\bar{A}_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_2(z)=0 & \text{si } z\in\bar{A}_1,\\ H_2(z)=z & \text{si } z\in\bar{\Omega}-\bar{A}_1. \end{cases}$$

Si $a\in\mathbb{C}$ vérifie $|a-1|<1/4$, par le théorème de Runge, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fraction rationnelle T_a (où $a\to T_a$ est affine) telle que l'on ait :

$$\sup_{|a-1|<1/4,\, z\in\bar{\Omega}} | T_a(z)-a\,H_1(z)-H_2(z) |<\varepsilon.$$

Pour $\varepsilon>0$ assez petit, on considère la fraction rationnelle $f_a=T_a\circ f$, et on peut appliquer sur A_1 le corollaire de 13 à f_a^p.

Il existe donc un nombre λ voisin de 1 tel que f_λ^p laisse invariant un anneau de nombre de rotation α. Cela donne un anneau périodique de période p pour la fraction rationnelle f_λ. C'est bien un vrai anneau périodique, voisin de $\bigcup_i A_i$, et non point périodique elliptique, car si $\varepsilon>0$ est assez petit, f_λ a un point fixe attractif voisin de chacun des points x_i, où $x_i\in\mathbb{C}-\bigcup_i\bar{A}_i$. ■

15. La proposition suivante généralise le résultat de Cremer [C_1] sur les points fixes elliptiques. Le lecteur peut aussi consulter l'annonce de Cherry [C].

PROPOSITION. — *Il existe un G_δ dense G, $G \subset \mathbb{T}^1$, $G \supset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, tel que si $\alpha \in G$, alors toute fraction rationnelle f de degré $\geqslant 2$ n'a pas de domaine singulier périodique B de période $q \geqslant 1$ telle que $f^q_{|B}$ ait pour nombre de rotation α.*

Démonstration. — Quitte à considérer f^{kq}, pour un entier $k \geqslant 1$, et à conjuguer f par un élément de $SL(2, \mathbb{C})$ on peut supposer que :

— $0 \in B$ et donc il existe $0 < r < 1$, tel que l'on ait :

$$D_r = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r \} \subset B.$$

— ∞ est un point fixe répulsif de f^{kq}.

On écrit :

$$g(z) = f^{kq}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + \ldots + \lambda z^d}{b_0 + \ldots + z^{d-1}},$$

avec $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $0 < |\lambda| < 1$, $d \geqslant 2$ et les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

Puisque $D_r \subset B$, où B est un domaine singulier de g, ne contenant pas ∞, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de f) telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\| g^n - \mathrm{Id} \|_{C^0(D_r)} \leqslant C \| kn\alpha \|, \tag{1}$$

où $\| \quad \|$ désigne la métrique standard de $\mathbb{T}^1$: si $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \mathrm{Inf}_{p \in \mathbb{Z}} |x + p|$.

On a :

$$g^n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_{0,n} + \ldots + \lambda_n z^{d^n}}{b_{0,n} + \ldots + k_n z^{d^n - 1}},$$

avec $\lambda_n = \lambda^{1 + d + \ldots + d^{n-1}}$, $\lambda_n / k_n = \lambda^n$ et les polynômes sont P_n et Q_n sont premiers entre eux.

On pose $l_1 = \sup(|a_i|, |b_i|, |\lambda|, 1)$, et l_n = le supremum des valeurs absolues des coefficients de P_n et Q_n.

On peut majorer $\sup_{j \leqslant n} l_j$ par une fonction $L_n(l_1, d)$ croissante avec l_1 et d.

On a :

$$g^n(z) - z = \frac{T_n(z)}{Q_n(z)},$$

où T_n est le polynôme :

$$T_n(z) = c_{0,n} + \ldots + (\lambda_n - k_n) z^{d^n}.$$

On a :

$$\sup_{|z|\leqslant 1} |Q_n(z)| \leqslant d^n L_n(l_1, d).$$

Par (1), on doit avoir, comme $0<r<1$,

$$\sup_{z\in D_r} |T_n(z)| \leqslant C \| kn\alpha \| d^n L_n(l_1, d)$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy appliquée sur le disque D_r,

$$|\lambda_n - k_n| \leqslant C \| nk\alpha \| d^n L_n(l_1, d) r^{-d^n}$$

et donc

$$(2) \qquad |\lambda^{-n} - 1| \leqslant C \| nk\alpha \| \tilde{L}_n(l_1, d, r, \lambda)$$

avec

$$\tilde{L}_n(l_0, d, r, \lambda) = d^n L_n(l_1, d) r^{-d^n} |\lambda_n|^{-1},$$

où, pour n fixé, $\tilde{L}_n$ croît si l_1, d, $1/r$, $1/|\lambda|$ croissent.

Comme $\lim_{n\to+\infty} |\lambda^{-n} - 1| = +\infty$, en contredisant (2) la proposition résulte du lemme suivant :

LEMME. — *Il existe un* G_δ *dense,* $G\supset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, *tel que si* $\alpha\in G$, *pour tout* $l_1>0$, $d\geqslant 2$, $0<r<1$, $0<|\lambda|<1$ *et* $k\in\mathbb{N}$, *on ait, si* $y=(l_1, d, r, \lambda)$,

$$u_{y,k}(\alpha) = \mathrm{Inf}_{n\geqslant 1} \| kn\alpha \| \tilde{L}_n(y) = 0.$$

Démonstration. — Pour y et k fixés, comme $\alpha\in\mathbb{T}^1 \to u_{y,k}(\alpha)$ est une fonction semi-continue supérieurement $G_{y,k} = u_{y,k}^{-1}(0)$ est un G_δ, dense, puisque $G_{y,k}\supset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Par la propriété de monotonie de la fonction $\tilde{L}_n$, il suffit de poser $G=\bigcap_{p,k} G_{p,k}$, avec $p=(p_1, p_2, 1/p_3, 1/p_4)$, où les $p_i\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}^*$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[A] ARNOLD (V. I.). — On the mappings of the circumference onto itself, *Translations A.M.S.*, vol. 46, 2nd series, p. 213-284.

[B] BROLIN (H.). — Invariant sets under iteration of rational functions, *Arkiv för Mathematik*, vol. 6, 1966, p. 103-144.

[B_1] BRJUNO (A. D.). — Analytical form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 25, 1971, p. 131-288.

[B_2] BAKER (I. N.). — An entire function which has wandering domains, *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 22, 1976, p. 173-176.

[C] CHERRY (T. M.). — A singular case of iteration of analytic functions: A contribution to small divisor problem, in *Nonlinear Problems of Engineering*, Academic Press, New York, 1964, p. 29-50.

[CH] CHOQUET (G.). — *Lectures on analysis*, vol. I, Benjamin Inc., 1969.

[C_1] CREMER (H.). — Zum Zentrumproblem, *Math. Ann.*, vol. 98, 1928, p. 151-163.

[C_2] CREMER (H.). — Über die Schrödersche funktionalgleichung und das Schwarscher Eckenabbildungsproblem, *Ber. Math. Phys. Klasse der Sächs Akad. Wiss. Leipzig*, vol. 84, 1932, p. 291-324.

[D] DOUADY (A.). — Systèmes dynamiques holomorphes, *Séminaire N. Bourbaki*, n° 599, vol. 1982-1983, *Astérisque*, vol. 104-105, S.M.F., 1983, p. 39-63.

[F-H] FATHI (A.) et HERMAN (M.). — Existence de difféomorphismes minimaux, *Astérisque*, vol. 49, 1977, p. 37-59.

[F] FATOU (P.). — Mémoires sur les équations fonctionnelles, *Bull. S.M.F.*, vol. 47, 1919, p. 161-271 et vol. 48, 1920, p. 33-94, p. 208-304.

[H_1] HELSON (H.) et SARASON (D.). — Past and future, *Math. Scand.*, vol. 21, 1967, p. 5-16.

[H] HERMAN (M.). — Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Pub. Math. I.H.E.S.*, vol. 49, 1979, p. 5-233.

[L] LANG (S.). — *Elliptic functions*, Addison-Wesley, 1973.

[LA] LATTÈS (S.). — Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré, Note aux *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 166, 1918, p. 26-28.

[M-S] MAÑÉ (R.), SAD (P.) et SULLIVAN (D.). — On the dynamics of rational maps, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 4e série, t. 16, 1983, p. 193-217.

[N] NEHARI (Z.). — *Conformal mappings*, Dover Pub., New York, 1975.

[R] REES (M.). — *Ergodic rational maps with dense critical forward orbit*, Preprint, Univ. of Minnesota, 1983, à paraître dans *Erg. Th. Dyn. syst.*

[R_1] RÜSSMANN (H.). — Kleine Nenner, II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K*1, 1972, p. 1-20.

[R_2] RÜSSMANN (H.). — Über die Iteration analytischer Funktionen, *J. Math. Mech.*, vol. 17, 1967, p. 523-532.

[Rd] RUDIN (W.). — *Real and complex analysis*, McGraw Hill, New York, 1978.

[Sa] SAMUEL (P.). — *Théories algébriques des nombres*, Hermann, Paris, 1971.

[Si] SIEGEL (C. L. C.). — Iteration of analytic functions, *Ann. Math.*, vol. 43, 1942, p. 607-612.

[S] SULLIVAN (D.). — *Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics (I), solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, I.H.E.S., Preprint, 1982, à paraître aux *Ann. Math.*

[S_1] SULLIVAN (D.). — *Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics (III), topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, I.H.E.S., Preprint, 1983.

[Y_1] YOCCOZ (J. C.). — C^1-conjugaison des difféomorphismes du cercle, preprint I.M.P.A., Rio de Janeiro, à paraître dans *Proc. Symp. Dynamical Systems*, Rio de Janeiro, 1981, Springer, *Lect. Notes in Math.*, n° 1007, 1983, p. 815-827.

[Y_2] YOCCOZ (J. C.). — Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne, preprint I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1982, *Ann. scient. Ec. norm. sup.*, 4e série, t. 17, 1984, p. 339-365.

[Z] ZEHNDER (E.). — A simple proof of generalization of a theorem by C. L. Siegel, *Lect. Notes in Math.*, vol. 597, Springer-Verlag, 1977, p. 855-866.