BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANZ PAUER

Sur les espaces homogènes de complication nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 377-385
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__377_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 377-385

SUR LES ESPACES HOMOGÈNES DE COMPLICATION NULLE

PAR

FRANZ PAUER (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe, H un sous-groupe algébrique de G, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel B de G tel que BH soit ouvert dans G. Notons U le radical unipotent de B. Alors le normalisateur de $U \cap H$ dans B contient un tore maximal de G.

ABSTRACT. — Let G be a connected algebraic reductive group over an algebraic closed field of caracteristic zero. Let H be an algebraic subgroup of G and B a Borel-subgroup such that BH is open in G. We note U the unipotent radical of B.

Then the normalizer of $U \cap H$ in B contains a maximal torus of G.

Soient G un groupe algébrique réductif connexe, H un sous-groupe algébrique (non nécessairement connexe) de G, le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. On dit que l'espace homogène G/H est de complication nulle si un (et par conséquent tout) sous-groupe de Borel de G possède une orbite ouverte dans G/H.

La théorie des plongements toriques se généralise particulièrement bien aux espaces homogènes de complication nulle (voir [6; 7.5 et 8.10] et [7]). Les exemples les plus connus de tels espaces sont les espaces homogènes symétriques (voir [9]) et les G/H, où H contient un sous-groupe unipotent maximal de G. Lorsque H est réductif, pour que G/H soit de complication nulle il faut et il suffit que H soit un sous-groupe sphérique, c'est-à-dire tel que toute composante isotypique du G-module $k[G]^H$ soit de multiplicité égale à 1 (voir [8]). Dans [5] sont classifiés tous les sous-groupes sphériques des groupes simples.

(*) Texte reçu le 27 septembre 1983, révisé le 26 janvier 1984.

F. PAUER, Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, Innrain 52, A-6020 Innsbruck, (Autriche).

Soit G/H un espace homogène de complication nulle, et soit B un sous-groupe de Borel de G tel que BH soit ouvert dans G. Notons U le radical unipotent de B. Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Le groupe $N_B(U \cap H)$ (le normalisateur de $U \cap H$ dans B) contient un tore maximal de G.*

On en déduit le résultat suivant sur la structure de $B/B \cap H$ (résultat qui n'est pas vrai pour n'importe quel espace homogène sous B!).

COROLLAIRE. — *Il existe un tore maximal T de B, qui normalise $B \cap H$ et qui est tel que l'isomorphisme $U \times T \xrightarrow{\sim} B$ bien connu donné par la multiplication, induit des isomorphismes*

$$(U \cap H) \times (T \cap H) \xrightarrow{\sim} B \cap H$$

et

$$(U/U \cap H) \times (T/T \cap H) \xrightarrow{\sim} B/B \cap H.$$

Lorsque G/H est un espace homogène symétrique, le théorème se déduit facilement de [2; 1.3].

1. Notations et rappels

Désignons par $\mathfrak{G}$ (resp. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}$) l'algèbre de Lie de G (resp. H, B, U) et par R (resp. R_+, R_-) l'ensemble des racines (resp. racines positives, racines négatives) de G par rapport à B. Je regarde les racines comme des fonctions linéaires sur $\mathfrak{B}$, qui s'annullent sur $\mathfrak{U}$.

Soit S un tore maximal de B tel que $(B \cap H)_0$, la composante neutre de $B \cap H$, est le produit semi-direct de $U \cap H$ avec le tore $(S \cap H)_0$.

Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{S}$ de S est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}) \oplus (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H})$ (*cf.* [4; 12.5]).

Soient $\mathfrak{G}^\alpha$ l'espace propre du poids $\alpha \in R \cup \{0\}$ pour l'opération de $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{G}$ et $h_\alpha \in \mathfrak{S}$ l'unique élément de $[\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}]$ qui vérifie $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Pour $g \in \mathfrak{G}$ notons g^α la composante de g dans $\mathfrak{G}^\alpha$ et $\operatorname{supp}(g) := \{\alpha \in R \cup \{0\} / g^\alpha \neq 0\}$. Alors $\mathfrak{U} = \oplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{G}^\alpha$, donc $g \in \mathfrak{U}$ équivaut à $\operatorname{supp}(g) \subseteq R_+$.

Nous dirons qu'un élément $g \in \mathfrak{H}$ est décomposable s'il existe g_1, $g_2 \in \mathfrak{H} - \{0\}$ tels que $\operatorname{supp}(g_1) \cap \operatorname{supp}(g_2) = \varnothing$ et $g = g_1 + g_2$; et qu'un élément $g \in \mathfrak{H}$ est indécomposable si $g \neq 0$ et si g n'est pas décomposable.

Si $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ est décomposable, alors $g = g_1 + g_2$ où g_1, $g_2 \in (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}) - \{0\}$. L'algèbre $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$ opère sur $\mathfrak{H}$, donc tout élément indécomposable est vecteur propre pour l'opération de $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$.

Enfin, choisissons un produit scalaire $(-|-)$ sur l'espace vectoriel engendré par R, invariant par le groupe de Weyl, tel que $\min\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\} = 1$ pour toute composante irréductible R' de R.

Rappelons deux résultats qui nous seront utiles. Soient α et β deux racines. Alors $\alpha(h_\beta) = 2(\alpha|\beta)/(\beta|\beta)$ (*cf.* [1; VI, 1.1, (7)]).

Si $(\alpha|\beta) > 0$, $\alpha - \beta$ est une racine sauf si $\alpha = \beta$.

Si $(\alpha|\beta) < 0$, $\alpha + \beta$ est une racine sauf si $\alpha = -\beta$, (*cf.* [1; VI, 1.3, Théorème 1, Corollaire]).

2. Lemme. — *Soient* $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} - \{0\}$ *et* β *un élément minimal (par rapport à l'ordre induit par* R_+*) dans* $\operatorname{supp}(g)$. *Alors* $h_\beta \in \mathfrak{H}$.

Preuve. — Puisque $\mathfrak{B} + \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, il existe $b \in \mathfrak{B}$ et $c \in \mathfrak{H} - \{0\}$ tels que $b + c \in \mathfrak{G}^{-\beta} - \{0\}$. Alors :

$$\operatorname{supp}([g, b+c]) \subset \{\alpha - \beta/\alpha \in \operatorname{supp}(g)\} =$$
$$= \{0\} \dot{\cup} \{\alpha - \beta/\alpha \in \operatorname{supp}(g), \alpha \neq \beta\}.$$

Grâce à la minimalité de β, on a :

$$\alpha - \beta \notin R_-, \text{ quel que soit } \alpha \in \operatorname{supp}(g),$$

donc

$$[g - g^\beta, b+c] \in \mathfrak{U} \quad \text{et} \quad [g, b+c] \in \mathfrak{B}.$$

Puisque $[g, c] \in \mathfrak{H}$, $[g, b] \in \mathfrak{U}$ et

$$[g, c] = [g, b+c] - [g, b] = [g^\beta, b+c] + ([g - g^\beta, b+c] - [g, b]),$$

on a $[g, c] \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$,

$$[g - g^\beta, b+c] - [g, b] \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} \quad \text{et} \quad [g^\beta, b+c] \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H} - \{0\}.$$

D'où $h_\beta \in \mathfrak{H}$. ■

3. LEMME. — *Soit R' un système de racines tel que* $\{(\alpha|\alpha)/\alpha \in R'\} = \{1, 2\}$.

Soient ρ, σ, $\tau \in R'$ *tels que :*

$$(\rho|\rho)=(\sigma|\sigma)=(\tau|\tau)=1;$$
$$(\rho|\sigma)=(\rho|\tau)=0;$$

$\rho+\sigma \in R$, $\rho+\tau \in R$ *et* $\sigma \neq \pm\tau$.

Alors $\sigma+\tau$ *est une racine et* $(\sigma|\tau)=0$.

Preuve. — De $\rho+\sigma \in R$ et $(\rho|\sigma)=0$ résulte que $\rho-\sigma \in R$ (*cf.* [1; VI, 1.3, Proposition 9]). De même $\rho-\tau \in R$.

Puisque $\sigma \neq \pm\tau$ et $(\sigma|\sigma)=(\tau|\tau)=1$, on a $-1<(\sigma|\tau)<1$.

Alors,

$$(\rho+\sigma|\rho+\tau)=1+(\sigma|\tau)>0,$$

et

$$(\rho+\sigma|\rho-\tau)=1-(\sigma|\tau)>0,$$

d'où

$$\sigma-\tau=(\rho+\sigma)-(\rho+\tau) \in R$$

et

$$\sigma+\tau=(\rho+\sigma)-(\rho-\tau) \in R.$$

De plus,

$$(\sigma-\tau|\sigma-\tau)=2-2(\sigma|\tau) \leqslant 2,$$

et

$$(\sigma+\tau|\sigma+\tau)=2+2(\sigma|\tau) \leqslant 2,$$

d'où $(\sigma|\tau)=0$. ■

4. LEMME. — *Soit* $g \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ *indécomposable tel que* $|\operatorname{supp}(g)|>1$.

Alors il existe $\beta \in \operatorname{supp}(g)$ *et* $\Gamma \subseteq R_+$ *tels que*

$$\operatorname{supp}(g)=\{\beta\} \cup \{\beta+\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

De plus, l'ensemble $\{\beta\} \cup \Gamma$ *est une famille orthonormale (par rapport à* $(-|-)$*).*

Preuve. — Soient β un élément minimal dans $\operatorname{supp}(g)$ et $\Gamma := \{\gamma \in R_+ \mid \beta+\gamma \in \operatorname{supp}(g)\}$.

Puisque $h_\beta \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{H}$ (*cf.* 2), g est vecteur propre pour l'opération de h_β. Par conséquent, $[h_\beta, g] = 2g^\beta + \sum_{\alpha \neq \beta} \alpha(h_\beta) g^\alpha$ implique $\alpha(h_\beta) = 2$, quel que soit $\alpha \in \operatorname{supp}(g)$. En particulier $(\alpha | \beta) > 0$, donc $\alpha - \beta \in R$. La minimalité de β implique $\alpha - \beta \in R_+$, alors $\alpha - \beta \in \Gamma$ et $\operatorname{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma / \gamma \in \Gamma\}$.

De plus, $(\alpha - \beta)(h_\beta) = 2 - 2 = 0$, d'où $(\beta | \gamma) = 0$, quel que soit $\gamma \in \Gamma$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\beta + \gamma \in R$, alors Γ fait partie de la composante irréductible R' de R qui contient β.

D'après [1; VI, 1.4, Prop. 12] l'ensemble $\{(\alpha | \alpha) / \alpha \in R'\}$ est $\{1\}$ ou $\{1, 2\}$ ou $\{1, 3\}$. Soit $\gamma \in \Gamma$. Alors :

$$(\beta + \gamma | \beta + \gamma) = (\beta | \beta) + (\gamma | \gamma),$$

d'où

$$(\beta | \beta) = (\gamma | \gamma) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\beta + \gamma | \beta + \gamma) = 2.$$

De 3 (avec $\rho = \beta$ et σ, $\tau \in \Gamma$) résulte que $\{\beta\} \cup \Gamma$ est une famille orthogonale. ■

5. Remarques

Soient g, β, Γ comme ci-dessus. Les trois assertions suivantes sont des conséquences immédiates de la preuve du lemme précédent.

L'ensemble $\{\beta\} \cup \Gamma$ est contenu dans une composante irréductible R' de R avec $\{(\alpha | \alpha) / \alpha \in R'\} = \{1, 2\}$. La racine β est l'unique élément de $\operatorname{supp}(g)$ tel que $(\beta | \beta) = 1$.

Si $f \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ tel que $\{1, 2\} \nsubseteq \{(\alpha | \alpha) / \alpha \in \operatorname{supp}(f)\}$, alors

$$\oplus_{\alpha \in \operatorname{supp}(f)} \mathfrak{G}^\alpha \subseteq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}.$$

6. Lemme. — *Soient $g_i \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ indécomposable et $\beta_i \in \operatorname{supp}(g_i)$ tel que*

$$(\beta_i | \beta_i) = \min \{(\alpha | \alpha) / \alpha \in \operatorname{supp}(g_i)\}, \qquad i = 1, 2.$$

Si $\beta_1 = \beta_2$, alors g_1 et g_2 sont linéairement dépendants.

Preuve. — Soit $\lambda \in k$ tel que $g_1^{\beta_1} = \lambda g_2^{\beta_1}$. Alors $\beta_1 \notin \operatorname{supp}(g_1 - \lambda g_2)$.

Si $\operatorname{supp}(g_1 - \lambda g_2)$ n'était pas vide, tous ses éléments α vérifieraient $(\alpha | \alpha) = 2$, donc $\mathfrak{G}^\alpha \subseteq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ (*cf.* 4 et 5). Mais alors soit g_1, soit g_2 ne serait pas indécomposable.

Par conséquent, $\operatorname{supp}(g_1 - \lambda g_2)$ est vide, donc $g_1 = \lambda g_2$. ■

7. LEMME. — *Soit g un élément indécomposable de $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ et soient $\beta \in R_+$, $\Gamma \subseteq R_+$ tels que* $\operatorname{supp}(g) = \{\beta\} \cup \{\beta + \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ (*cf.* 4). *Soit $\Gamma \neq \Phi$.*

Si φ est une racine positive telle que $\mathfrak{G}^\varphi \subseteq \mathfrak{H}$, alors $(\gamma \mid \varphi) = 0$ et $\varphi + \gamma \notin R$, quel que soit $\gamma \in \Gamma$.

Preuve. — On a $h_\varphi \in \mathfrak{H}$ (*cf.* 2) et $\beta \neq \varphi$ (*cf.* 6). L'élément indécomposable g est vecteur propre du poids $\beta(h_\varphi)$ pour l'action de h_φ, alors $\gamma(h_\varphi) = 0$ et $(\gamma \mid \varphi) = 0$, quel que soit $\gamma \in \Gamma$.

D'après 5. l'ensemble $\{\beta\} \cup \Gamma$ est contenu dans une composante irréductible R' de R avec $\{(\alpha \mid \alpha)/\alpha \in R'\} = \{1, 2\}$. Lorsque $\varphi \notin R'$, $\varphi + \gamma \notin R$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$. Lorsque $\varphi \in R'$ et $(\varphi \mid \varphi) = 2$, $(\gamma + \varphi \mid \gamma + \varphi) = 3$, alors $\varphi + \gamma \notin R$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$.

Soit $\varphi \in R'$, $(\varphi \mid \varphi) = 1$ et supposons qu'il existe $\delta \in \Gamma$ tel que $\varphi + \delta \in R$. On déduit de 3. (avec $\rho = \delta$, $\sigma = \beta$, $\tau = \varphi$) que $\beta + \varphi \in R$ et $(\beta \mid \varphi) = 0$.

En particulier, $\{\beta, \varphi\} \cup \Gamma$ est une famille orthonormale et $(\varphi + \beta + \gamma \mid \varphi + \beta + \gamma) = 3$, quel que soit $\gamma \in \Gamma$. Alors $\varphi + \beta + \gamma \notin R$, d'où $[\mathfrak{G}^\varphi, g] = [\mathfrak{G}^\varphi, g^\beta] = \mathfrak{G}^{\varphi+\beta}$. Donc

$$\mathfrak{G}^{\varphi+\beta} \subseteq \mathfrak{H} \qquad \text{et} \qquad h_{\varphi+\beta} \in \mathfrak{H} \quad (cf.\ 2).$$

Montrons que $\mathfrak{G}^{-\varphi-\beta} \subseteq \mathfrak{H}$.

Soient $b \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{H}$ tels que $b + c \in \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta} - \{0\}$. Alors

$$\operatorname{supp}(c) \subseteq \{\varphi\beta\} \cup R_+ \cup \{0\} \qquad \text{et} \qquad -\varphi - \beta \in \operatorname{supp}(c).$$

On peut choisir c tel qu'il est vecteur propre du poids -2 pour l'action de $h_{\varphi+\beta}$.

Si $\alpha \in \operatorname{supp}(c) - \{-\varphi - \beta\}$, $\alpha(h_{\varphi+\beta}) = -2$. Alors $\alpha \neq 0$,

$$\frac{2(\alpha \mid \varphi + \beta)}{(\varphi + \beta \mid \varphi + \beta)} = -2 \qquad \text{et} \qquad (\alpha \mid \varphi + \beta) = -2.$$

Cela implique que $\varepsilon := \alpha + \varphi + \beta$ est une racine et

$$(\varphi + \beta \mid \varepsilon) = (\varphi + \beta \mid \alpha) + (\varphi + \beta \mid \varphi + \beta) = 0.$$

Mais alors on aurait :

$$(\alpha \mid \alpha) = (\varepsilon - (\varphi + \beta) \mid \varepsilon - (\varphi + \beta)) = (\varepsilon \mid \varepsilon) + 2 \geqslant 3.$$

D'où

$$\mathrm{supp}(c)=\{-\varphi-\beta\} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta}\subseteq\mathfrak{H}.$$

En plus, $[\mathfrak{G}^{\varphi}, \mathfrak{G}^{-\varphi-\beta}]=\mathfrak{G}^{-\beta}\subseteq\mathfrak{H}$.

Soit $f\in\mathfrak{G}^{-\beta}-\{0\}$. Alors $[f, g]\in\mathfrak{H}$ et $\mathrm{supp}([f, g])=\{0\}\cup\Gamma$. Plus précisément, la composante de $[f, g]$ dans $\mathfrak{G}^0$ est un multiple scalaire λh_β de h_β. Alors $f':=[f, g]-\lambda h_\beta\in\mathfrak{H}$,

$$[f', g]\in\mathfrak{H} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{supp}(f')=\Gamma.$$

Puisque $\beta+\gamma+\delta\notin R$, quel que soient γ, $\delta\in\Gamma$ (*cf.* 4, 5), on a

$$[f', g]=[f', g^\beta].$$

Donc $\mathrm{supp}([f', g])=\{\beta+\gamma\,|\,\gamma\in\Gamma\}$. Puisque

$$\{(\beta+\gamma\,|\,\beta+\gamma)/\gamma\in\Gamma\}=\{2\},$$

cela implique $\oplus_{\gamma\in\Gamma}\mathfrak{G}^{\beta+\gamma}\subseteq\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H}$ (*cf.*5).

Mais cela contredit le fait que g est indécomposable.

8. Preuve du théorème

Il suffit de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{B}$ qui normalise $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H}$ (*cf.* [4; 13, Exercice 1]).

Soient $L:=\dim_k(\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H})-|\{\alpha\in R_+/\mathfrak{G}^\alpha\subseteq\mathfrak{H}\}|+1$ et M le minimum de l'ensemble $\{|\mathrm{supp}(f)|/f\in\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H}$ indécomposable et $|\mathrm{supp}(f)|\neq 1\}$ lorsque cet ensemble n'est pas vide, autrement on pose $M:=1$. Alors $(L, M)=(1, 1)$ si et seulement si $\mathfrak{S}$ normalise $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H}$.

Les expressions $\mathrm{supp}(f)$, $\mathfrak{G}^\alpha$, L, M dépendent du tore $\mathfrak{S}$. Écrivons donc $L=L(\mathfrak{S})$, $M=M(\mathfrak{S})$.

Supposons $(L(\mathfrak{S}), M(\mathfrak{S}))\neq(1, 1)$. Alors $M(\mathfrak{S})>1$. Soit $g\in\mathfrak{U}\cap\mathfrak{H}$ indécomposable tel que $|\mathrm{supp}(g)|=M(\mathfrak{S})$. Soient $\beta\in\mathrm{supp}(g)$ et $\Gamma\subseteq R_+$ tels que $\mathrm{supp}(g)=\{\beta\}\cup\{\beta+\gamma/\gamma\in\Gamma\}$ (*cf.* 4).

Choisissons $\delta\in\Gamma$ et $x=x^\delta\in\mathfrak{G}^\delta$ tel que $[x, g^\beta]=-2g^{\beta+\delta}$. L'élément $h_\delta+x$ est semi-simple et commute avec tout élément de $\mathrm{Ker}(\delta)\cap\mathfrak{S}$. Par conséquent $\tilde{\mathfrak{S}}:=(\mathrm{Ker}(\delta)\cap\mathfrak{S})\oplus k(h_\delta+x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{B}$.

Puisque g est vecteur propre pour l'action de $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{H}$ (*cf.* 1), on a $(\beta+\delta)(h)=\beta(h)$, donc $\beta(h)=0$, quel que soit $h\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{H}$. Alors $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{H}\subseteq\tilde{\mathfrak{S}}$.

En 8.1, je montrerai qu'un vecteur propre pour $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H}$ est aussi vecteur propre pour $\tilde{\mathfrak{S}}$ (alors $L(\tilde{\mathfrak{S}}) \leqslant L(\mathfrak{S})$).

En 8.2, je montrerai que le nombre d'éléments du support de g par rapport à $\tilde{\mathfrak{S}}$ est plus petit que $M(\mathfrak{S})$ (alors soit $M(\tilde{\mathfrak{S}}) < M(\mathfrak{S})$, soit $L(\tilde{\mathfrak{S}}) < L(\mathfrak{S})$).

Ainsi $(L(\tilde{\mathfrak{S}}), M(\tilde{\mathfrak{S}}))$ est plus petit (dans l'ordre lexicographique) que $(L(\mathfrak{S}), M(\mathfrak{S}))$.

Après un nombre fini de répétitions de la construction $(\tilde{-})$ on trouve une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{T}$ avec $(L(\mathfrak{T}), M(\mathfrak{T})) = (1, 1)$.

8.1. Soient $\varphi \in R_+$ et $f \in \mathfrak{H}$ tels que $\mathrm{supp}(f) = \{\varphi\}$. Alors $\varphi + \delta \notin R$ et $(\varphi \mid \delta) = 0$ (*cf.* 7) d'où $[x, f] = 0$ et $[h_\delta, f] = 0$. Par conséquent f est vecteur propre pour l'action de $\tilde{\mathfrak{S}}$.

8.2. Soient $s \in \mathrm{Ker}(\delta) \cap \mathfrak{S}$, $\lambda \in k$ et $\gamma \in \Gamma$. Puisque $\delta + \beta + \gamma \notin R$ (*cf.* 4, 5) on a $[x, g^{\beta+\gamma}] = 0$.

Si $\gamma \neq \delta$, $[s + \lambda(h_\delta + x), g^{\beta+\gamma}] = (\beta + \gamma)(s + \lambda(h_\delta + x)) g^{\beta+\gamma}$, alors $g^{\beta+\gamma}$ est vecteur du poids $\beta + \gamma$ pour l'action de $\tilde{\mathfrak{S}}$. (Rappelons que $\beta + \gamma$ est une fonction linéaire sur $\mathfrak{B}$ qui s'annule sur $\mathfrak{U}$).

De plus,

$$[s + \lambda(h_\delta + x), g^\beta + g^{\beta+\delta}] = \beta(s)(g^\beta + g^{\beta+\delta}) + 2\lambda g^{\beta+\delta} + \\ + \lambda[x, g^\beta] = \beta(s + \lambda(h_\delta + x))(g^\beta + g^{\beta+\delta}) + 2\lambda g^{\beta+\delta} - 2\lambda g^{\beta+\delta},$$

alors $g^\beta + g^{\beta+\delta}$ est vecteur propre du poids β pour l'action de $\tilde{\mathfrak{S}}$.

En conclusion : le nombre d'éléments du support de g par rapport à $\tilde{\mathfrak{S}}$ est $|\Gamma|$. ■

9. Preuve du corollaire

D'après [3; p. 96] le groupe $B \cap H$ est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif K avec $U \cap H$. Comme sous-groupe réductif d'un groupe résoluble, K ne contient que des éléments semi-simples.

Du théorème résulte que $N_B(U \cap H)$ est connexe : en effet, tout sous-groupe de B contenant un tore maximal est connexe. Alors il existe un tore maximal T de $N_B(U \cap H)$ qui contient K (*cf.* [4, 19.4]). Par conséquent $B \cap H = (U \cap H)(T \cap H)$ et T normalise $B \cap H$. D'après le théorème T est un tore maximal de B. ■

10. Remarque

Soit T un tore maximal de B comme dans le corollaire. Soit $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{G}^\alpha$ la décomposition de $\mathfrak{G}$ dans des espaces propres de T. Alors $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{H} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{G}^\alpha$, où A est un sous-ensemble clos de R_+. Le lemme 2 implique que $\sum_{\alpha \in A} [\mathfrak{G}^\alpha, \mathfrak{G}^{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{T} \cap \mathfrak{H}$.

REFERENCES

[1] Bourbaki (N.). — Groupes et algèbres de Lie. Chap. IV-VI, Paris : Hermann 1968.
[2] Deconcini (C.) et Procesi (C.). — Complete Symmetric Varieties. Preprint 1983.
[3] Hochschild (G.). — Introduction to Affine Algebraic Groups. San Francisco : Holden Day 1971.
[4] Humphreys (J.). — Linear Algebraic Groups. New York, Heidelberg, Berlin : Springer 1975.
[5] Krämer (M.). — Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compositio Math. 38, 129-153 (1979).
[6] Luna (D.) et Vust (Th.). — Plongements d'espaces homogènes. Comm. Math. Helv. 58, 186-245 (1983).
[7] Pauer (F.). — Plongements normaux de l'espace homogène SL(3)/SL(2). Actes du 108e Congrès National des Sociétés Savantes, Grenoble 1983. A paraître.
[8] Vinberg (E. B.) et Kimelfeld (B. N.). — Homogeneous Domains on Flag Manifolds and Spherical Subgroups of Semisimple Lie Groups. Funct. Analysis and Appl. 12, 168-174 (1978).
[9] Vust (Th.). — Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes. Bull. Soc. Math. France 102, 317-334 (1974).