

# BULLETIN DE LA S. M. F.

RÉMI LANGEVIN

FRANÇOISE MICHEL

## **Nombres de Milnor d'un entrelacs Brunnien**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 113 (1985), p. 53-77

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1985\\_\\_113\\_\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__53_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## NOMBRES DE MILNOR D'UN ENTRELACS BRUNNIEN

PAR

RÉMI LANGEVIN et FRANÇOISE MICHEL (\*)

**RÉSUMÉ.** — Dans cet article nous construisons un polynôme non commutatif qui est un invariant des entrelacs brunnien à  $p$  composantes. Grâce à ce polynôme nous calculons, d'une part, l'invariant  $\mu(1 \dots p)$  de Milnor et d'autre part, le produit de Massey associé à l'entrelacs. De plus nous fournissons un algorithme géométrique qui décrit un système de Massey d'un entrelacs Brunnien.

**ABSTRACT.** — In this article we construct a non commutative polynomial which is an invariant of Brunnian links with  $p$  components. With the help of this polynomial we compute, on one hand, Milnor's invariant  $\mu(1 \dots p)$  and, on the other hand, Massey product associated to the link. Moreover we give a geometrical algorithm to describe a Massey system for a Brunnian link.

### 1. Introduction

Ce travail a été suscité par la contemplation des deux figures suivantes.

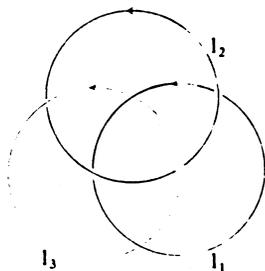


Figure 1. — L'entrelacs borroméen.

(\*) Texte reçu le 7 février 1984, révisé le 12 septembre 1984.

R. LANGEVIN, Département de Mathématiques, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex.

F. MICHEL, Université de Genève, Section Mathématiques, 2-4 rue du Lièvre, Case postale 240, 1211 Genève 24, Suisse.

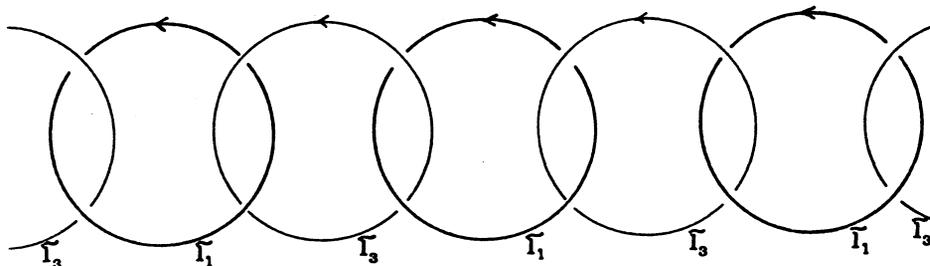


Figure 2. — L'image inverse des composantes  $l_1$  et  $l_3$  dans le revêtement universel du complémentaire de  $l_2$ .

Dans cet article nous étudions les entrelacs brunnien à  $p$  composantes. Rappelons qu'un entrelacs est brunnien si tous les entrelacs obtenus en éliminant une composante sont triviaux. Lorsque l'entrelacs est brunnien l'invariant  $\mu(1, \dots, p)$  de Milnor (cf. [Mi<sub>1</sub>] et [Mi<sub>2</sub>]) et le produit de Massey (cf. [P] et [T]) associé à l'entrelacs sont bien définis dans  $\mathbb{Z}$ ; ceci nous permet de leur donner une interprétation géométrique simple. Pour ce faire nous considérons dans un premier temps le revêtement universel  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  du complémentaire  $Y$  de l'entrelacs  $L \setminus (l_1 \cup l_p)$ . Nous définissons grâce à la chaîne  $\pi^{-1}(l_1 \cup l_p)$  dans  $Y$  un nouvel invariant de  $L$  : le polynôme d'enlacement  $P$  (cf. (2.5)). Dans le cas de l'entrelacs borroméen l'invariant  $\mu(1, 2, 3)$  de Milnor est égal au nombre d'enlacement de deux maillons de la chaîne  $\pi^{-1}(l_1 \cup l_3)$  (cf. fig. 2). Plus généralement en dérivant (par des dérivations de Fox) le polynôme d'enlacement on trouve l'invariant  $\mu(1, \dots, p)$  de  $L$  (cf. proposition (3.2)).

H. Laufer [L], D. Goldsmith [G], le physicien C. Edwards [E] et plus récemment K. Murasugi [Mu<sub>1</sub>], [Mu<sub>2</sub>] et [Mu<sub>3</sub>] ont déjà étudié des entrelacs à l'aide de l'image inverse de certaines composantes dans des revêtements convenables. K. Murasugi en particulier retrouve les nombres de Milnor en étudiant des revêtements ramifiés nilpotents.

Par ailleurs l'entrelacs borroméen peut se dessiner de façon moins symétrique :

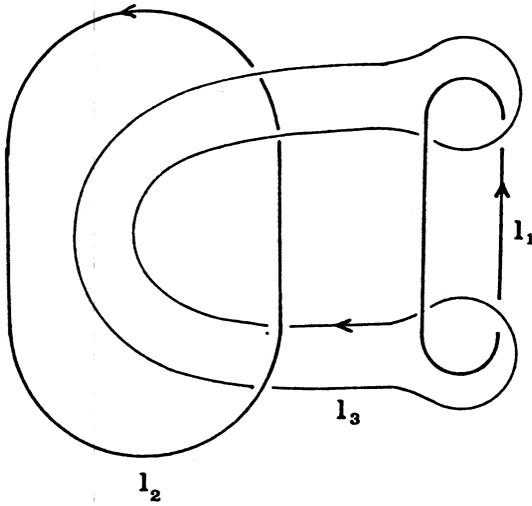


Figure 3.

Ceci permet d'expliciter un système de Massey homologique (cf. (4.1) et (4.2)).

Dans le cas de l'entrelacs borroméen on trouve ainsi un système de Massey dont l'élément essentiel est simplement le morceau de disque hachuré en diagonale sur la figure suivante :

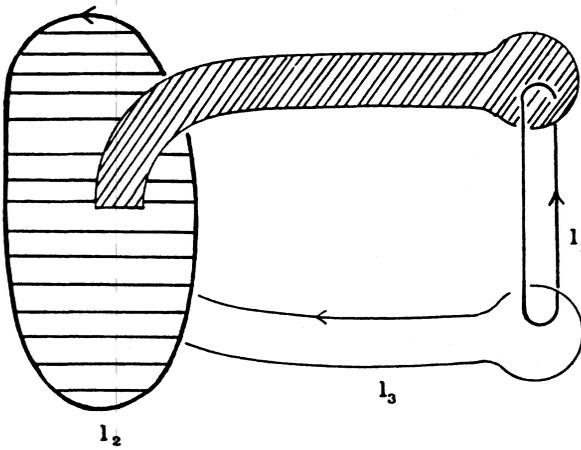


Figure 4.

Plus généralement nous construisons par un algorithme géométrique élémentaire un tambourin marqué (cf. (5.1)), qui décrit totalement un système de Massey de  $L$ .

Par exemple :

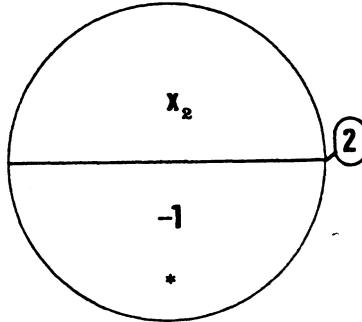


Figure 5. — Le tambourin marqué du borroméen.

De plus le polynôme d'enlacement se lit sur le tambourin marqué (Théorème (5.6)); ceci fournit une preuve simple et imagée (Proposition (3.2) et Théorème (5.8)) du théorème de R. Porter [P] et V. Turaev [T] dans le cas brunnié.

Cet article doit beaucoup à des conversations des auteurs avec N. Habegger, R. Porter et C. Weber.

## 2. Polynôme d'enlacement d'un entrelacs brunnié

Précisons les définitions et les notations que nous utilisons.

Soit  $E_p = \coprod_{i=1}^p (S_i^1)$  la réunion disjointe de  $p$  cercles orientés et numérotés.

### DÉFINITIONS.

(2.1) Un entrelacs  $L$  à  $p$  composantes est l'image d'un plongement différentiable  $\varphi$  de  $E_p$  dans  $S^3$ ; cette image  $L = \varphi(E_p)$  est orientée et les composantes connexes  $l_i = \varphi(S_i^1)$  de  $L$  sont numérotées.

(2.2) Deux entrelacs à  $p$  composantes  $L$  et  $L'$  ont même type s'il existe un difféomorphisme  $F$  de degré  $+1$  de  $S^3$  tel que l'image par  $F$  de la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $L$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $L'$  et  $F$  respecte l'orientation de chaque composante.

(2.3) Un entrelacs  $L$  à  $p$  composantes est trivial s'il existe un plongement différentiable de  $p$  disques disjoints,  $\coprod_{i=1}^p D_i$ , dans  $S^3$  tel que  $l_i$  est le bord de l'image de  $D_i$ .

(2.4) Un entrelacs  $L = \coprod_{i=1}^p l_i$  est brunnien si tous les entrelacs à  $(p-1)$  composantes inclus dans  $L$  sont triviaux.

Dans les paragraphes 2, 3 et 5 l'entrelacs  $L$  sera toujours brunnien.

Choisissons pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , un voisinage tubulaire  $T_i$  de la composante  $l_i$  de  $L$  de sorte que les voisinages de deux composantes différentes soient distincts.

Notons  $Y = S^3 \setminus \bigcup_{k=2}^{p-1} \overset{\circ}{T}_k$  et  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  le revêtement universel de  $Y$ . Le groupe de Galois  $G = \pi_1(Y)$  de ce revêtement est un groupe libre de rang  $(p-2)$  car l'entrelacs  $L \setminus (l_1 \cup l_p)$  est trivial. Les classes  $x_i$  dans  $G$  des méridiens des composantes  $l_i$ ,  $2 \leq i \leq p-1$ , fournissent des générateurs naturels de  $G$ . Tout élément  $\alpha$  dans  $G$  s'écrit donc à l'aide d'un monôme non commutatif en les variables  $x_i$ . Comme  $L$  est brunnien  $l_1$  et  $l_p$  sont des lacets homotopiquement triviaux dans  $Y$ . Ils se relèvent donc en des lacets dans  $\tilde{Y}$ . Choisissons une composante connexe  $\tilde{l}_1$  (resp.  $\tilde{l}_p$ ) de  $\pi^{-1}(l_1)$  (resp.  $\pi^{-1}(l_p)$ ).

Remarquons que pour  $i$  égal à 1 ou  $p$  :

$$\pi^{-1}(l_i) = \bigcup_{\alpha \in G} \alpha \cdot \tilde{l}_i.$$

(2.5) Définissons un élément de  $\mathbb{Z}[G]$ ,  $P$ , que nous appellerons polynôme d'enlacement de l'entrelacs  $L$  en posant :

$$P = \sum_{\alpha \in G} \mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_1, \tilde{l}_p) \alpha$$

où  $\mathcal{L}$  désigne le nombre d'enlacement.

On écrit les éléments de  $G$  au moyen des générateurs  $x_i$ ,  $2 \leq i \leq p-1$ ;  $P$  est donc un polynôme en  $(p-2)$  variables.

Le cas  $p=2$  est particulier. En effet, on a alors :  $Y = \tilde{Y}$  et  $P = \mathcal{L}(l_1, l_2)$ .

(2.6) Remarque. — Par la suite il sera utile de considérer  $P$  comme une fonction polynomiale. Les variables peuvent prendre des valeurs entières et en particulier 1. Ceci donnera par exemple un sens, comme élément de  $\mathbb{Z}[G]$ , à une expression de la forme  $P(x_2, x_3, 1, \dots, 1)$ .

Le polynôme d'enlacement vérifie les propriétés suivantes :

(2.7) PROPRIÉTÉ. — *A multiplication à droite et à gauche par un élément de  $G$  près, le polynôme  $P$  est un invariant du type de  $L$ . En effet, le seul choix non canonique qui a été effectué dans la construction de  $P$  est celui des relevés  $\tilde{l}_1$  et  $\tilde{l}_p$ . Soient  $\beta$  et  $\gamma$  deux éléments quelconques de  $G$ . Un autre choix  $\beta \cdot \tilde{l}_1$  et  $\gamma \cdot \tilde{l}_p$  de composantes dans  $\pi^{-1}(l_1)$  et  $\pi^{-1}(l_p)$  fournit le polynôme  $P'$  suivant :*

$$P' = \sum_{\alpha \in G} \mathcal{L}(\alpha \cdot \beta \tilde{l}_1, \gamma \cdot \tilde{l}_p) \alpha$$

ce qui donne :

$$P' = \sum_{\alpha \in G} \mathcal{L}(\gamma^{-1} \alpha \beta \tilde{l}_1, \tilde{l}_p) \alpha$$

et donc :

$$\gamma^{-1} \cdot P' \cdot \beta = P$$

(2.8) PROPRIÉTÉ. — *Si  $L$  est trivial alors  $P \equiv 0$ .*

(2.9) PROPRIÉTÉ. — *Pour tout  $i$ ,  $2 \leq i \leq p-1$ , on a :  $P(x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{p-1}) \equiv 0$ . En effet la construction du revêtement universel de  $Y \cup T_i$  permet de constater que ce polynôme n'est autre que le polynôme d'enlacement de l'entrelacs trivial  $L \setminus (l_i)$ .*

(2.10) Remarque. — *Le polynôme d'enlacement  $P$  dépend de l'orientation et de la numérotation des composantes de  $L$ . Par exemple le polynôme d'enlacement de l'entrelacs obtenu après le changement d'orientation de  $l_i$  où  $i$  est 1 ou  $p$  est  $-P$ , après le changement d'orientation de  $l_i$  où  $2 \leq i \leq p-1$  est  $P(x_2, \dots, x_i^{-1}, \dots, x_{p-1})$  et après l'échange des composantes 1 et  $p$  est le conjugué  $\bar{P}$  de  $P$  (le conjugué  $\sum_{\alpha \in G} n_\alpha \alpha$  d'un élément de  $G$  est par définition égal à  $\sum_{\alpha \in G} n_\alpha \alpha^{-1}$ ).*

En vue d'obtenir des invariants numériques du type d'un entrelacs, nous allons utiliser le calcul différentiel libre de Fox (cf. [F]).

(2.11) RAPPEL. — *Si  $F$  est un groupe libre à  $n$  générateurs :  $x_1, \dots, x_n$ , pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , il existe un unique  $\mathbb{Z}$ -homomorphisme  $\partial/\partial x_i$  de  $\mathbb{Z}[F]$  dans lui-même qui vérifie :*

$$1) \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$2) \quad \frac{\partial \alpha \cdot \beta}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \alpha \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } \alpha \text{ et } \beta \text{ dans } G.$$

De ces deux axiomes on déduit :

Soit  $\varepsilon : \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}$  l'homomorphisme d'augmentation i. e.

$$\varepsilon(\sum_{\alpha \in G} n_\alpha \alpha) = \sum_{\alpha \in G} n_\alpha.$$

Si on pose  $u = \sum_{\alpha \in G} n_\alpha \alpha$  alors pour tout élément  $\beta$  de  $G$  on a :

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\partial \beta u}{\partial x_i} = \varepsilon(u) \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
 2) \quad & \frac{\partial u \cdot \beta}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \beta}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

Nous appliquons le calcul différentiel libre de Fox pour obtenir l'entier  $M$  suivant :

$$(2.12) \quad M = \left( \frac{\partial^{p-2} P}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1, \dots, 1)}$$

NOTATION. — On peut tout aussi bien écrire  $M = \varepsilon \left( \frac{\partial^{p-2} P}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right)$ .

(2.13) PROPOSITION. — L'entier  $M$  est un invariant du type de l'entrelacs  $L$ .

Preuve. — De la propriété (2.7) on déduit qu'il suffit de vérifier pour tout élément  $\beta$  dans  $G$  les formules I et II suivantes :

$$\text{Formule I.} \quad \left( \frac{\partial^{p-2} (\beta \cdot P)}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1, \dots, 1)} = M.$$

$$\text{Formule II.} \quad \left( \frac{\partial^{p-2} (P \cdot \beta)}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1, \dots, 1)} = M.$$

Par récurrence sur  $p \geq 3$  on vérifie que :

$$\frac{\partial^{p-2} (\beta \cdot P)}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} = \sum_{i=1}^{p-2} \left( \frac{\partial^i \beta}{\partial x_2 \dots \partial x_{i+1}} \right) \cdot \varepsilon \left( \frac{\partial^{p-2-i} P}{\partial x_{i+2} \dots \partial x_{p-1}} \right) + \beta \left( \frac{\partial^{p-2} P}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right).$$

Comme  $P(1, x_3, \dots, x_{p-1}) \equiv 0$  (cf. propriété (2.9)), pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i$ , on a :

$$\varepsilon \left( \frac{\partial^{p-2-i} P}{\partial x_{i+2} \dots \partial x_{p-1}} \right) = \varepsilon \left( \frac{\partial^{p-2-i} P(1, \dots, 1, x_{i+2}, \dots, x_{p-1})}{\partial x_{i+2} \dots \partial x_{p-1}} \right) = 0.$$

Comme  $\varepsilon(\beta) = 1$  la formule I est démontrée. Par récurrence sur  $p \geq 3$  on vérifie également par calcul direct :

$$(*) \quad \frac{\partial^{p-2} (P \cdot \beta)}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} = \sum_{i=1}^{p-2} \left( \frac{\partial^i P}{\partial x_2 \dots \partial x_{i+1}} \right) \varepsilon \left( \frac{\partial^{p-2-i} \beta}{\partial x_{i+2} \dots \partial x_{p-1}} \right) + P \frac{\partial^{p-2} \beta}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}}.$$

Comme  $P(x_2, \dots, x_{p-2}, 1) \equiv 0$  (cf. propriété (2.9)), pour tout  $i$  tel que  $i < p-2$ , on a :

$$(**) \quad \varepsilon \left( \frac{\partial^i P}{\partial x_2 \dots \partial x_{i+1}} \right) = \varepsilon \left( \frac{\partial^i P(x_2, \dots, x_{i+1}, 1, \dots, 1)}{\partial x_2 \dots \partial x_{i+1}} \right) = 0.$$

On obtient donc la formule II à partir des égalités (\*) et (\*\*). □

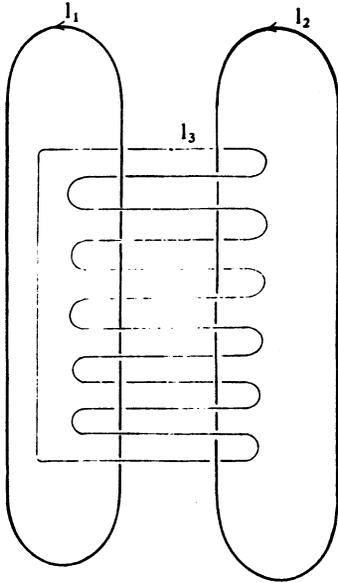


Figure 6. — Le radiateur.

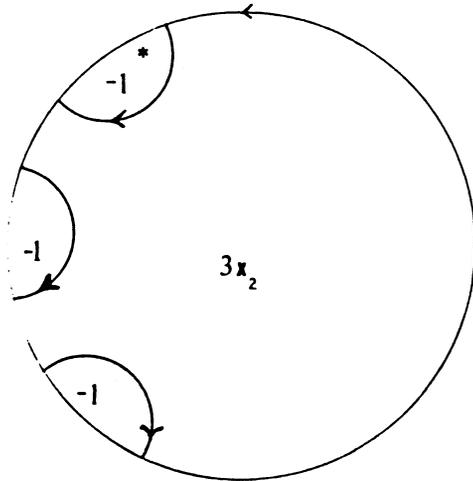


Figure 7. — Le tambourin marqué associé au radiateur.

$$P = -3 + 3x_2 \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 3 \quad \mu(1, 2, 3) = 3$$

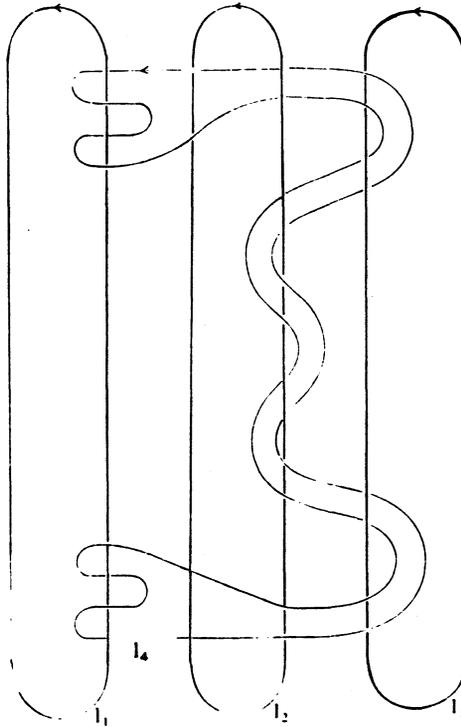


Figure 8. —  
Le serpent à deux têtes.

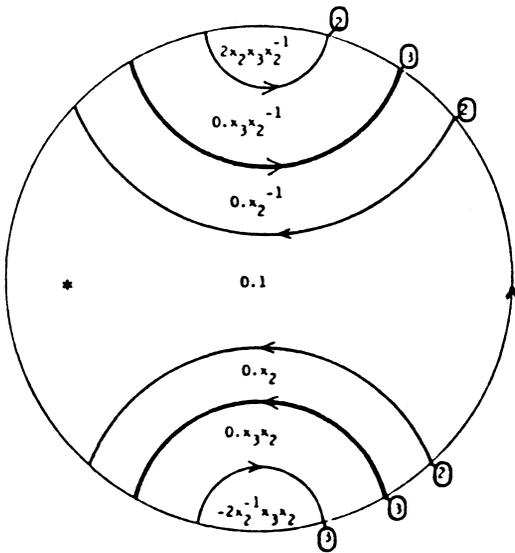


Figure 9. — Le tambourin  
marqué du serpent à deux têtes.

$$P = 2x_2 x_3 x_2^{-1} - 2x_2^{-1} x_3 x_2;$$

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3} \right) (1, 1) = 4$$

$$\mu(1, 2, 3, 4) = 4; \mu(1, 3, 2, 4) = -4$$

(2.14) *Exemples.*

## 1) L'entrelacs borroméen.

En calculant le polynôme d'enlacement  $P$  de l'entrelacs borroméen à l'aide des figures 1 et 2 de l'introduction on trouve :

$$P = -1 + x_2$$

Et donc :

$$M = \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) (1) = 1.$$

2) Dans l'exemple : Le « radiateur » (cf. l'entrelacs de la figure 6), on obtient :

$$P = -3 + 3x_2$$

Et donc :

$$M = 3.$$

3) Dans l'exemple : Le « serpent à deux têtes » (cf. l'entrelacs de la figure 8), on obtient :

$$P = 2x_2x_3x_2^{-1} - 2x_2^{-1}x_3x_2,$$

et donc :

$$M = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_3} \right)_{(1,1)} = \left( \frac{\partial}{\partial x_2} (2x_2 - 2x_2^{-1}) \right)_{(1,1)} = 4.$$

### 3. Nombres de Milnor et polynôme d'enlacement

Pour notre propos la définition la plus commode des nombres de Milnor est celle qui fait intervenir le calcul différentiel de Fox (cf. [Mi<sub>2</sub>], p. 292). Rappelons cette définition dans le cas particulier de l'invariant  $\mu(1, \dots, p)$  d'un entrelacs brunnien.

Comme  $L$  est brunnien le groupe  $F = \pi_1(S^3 \setminus l_p)$  est un groupe libré de rang  $(p-1)$ . Soient  $x_1 \dots x_{p-1}$  les générateurs naturels fournis par les classes d'homotopie des méridiens des  $(p-1)$  premières composantes de  $L$ . Écrivons la classe de  $l_p$  dans  $F$  par rapport à cette base et notons  $\omega$  le mot ainsi obtenu.

(3.1) DEFINITION. — Le nombre de Milnor  $\mu(1, \dots, p)$  de  $L$  est l'entier

$$\left( \frac{\partial^{p-1} \omega}{\partial x_1 \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1, \dots, 1)}.$$

*Remarque.* — Milnor indique dans [Mi<sub>2</sub>], p. 292 que cette expression se déduit à l'aide du calcul de Fox de celle donnée dans [Mi<sub>1</sub>], p. 189 et [Mi<sub>2</sub>], p. 291.

(3.2) PROPOSITION. — Les entiers  $M$  et  $\mu(1 \dots p)$  sont égaux.

*Preuve.* — Rappelons que  $M$  a été défini au § 2 (cf. (2.12)).

Nous allons montrer l'égalité :

$$M = \mu(2, 3, \dots, p, 1).$$

Comme les nombres de Milnor  $\mu(i_1, \dots, i_p)$  sont invariants par permutation cyclique des indices  $(i_1, \dots, i_p)$  ([Mi<sub>2</sub>], p. 294) nous en déduisons l'égalité :

$$M = \mu(1, \dots, p).$$

Par définition  $\mu(2, 3, \dots, p, 1) = \left( \frac{\partial^{p-1} \omega}{\partial x_2 \dots \partial x_p} \right)_{(1, \dots, 1)}$  où  $\omega$  représente la classe de  $l_1$  dans  $\pi_1(S^3 \setminus (l_2 \cup \dots \cup l_p))$ . Il existe donc des mots  $\alpha_i$  en  $x_2 \dots x_{p-1}$  et des entiers  $n_i$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , tels que :

$$\omega = x_p^{n_k} \alpha_{k-1} x_p^{n_{k-1}} \dots \alpha_2 x_p^{n_2} \alpha_1 x_p^{n_1}.$$

CONVENTION. — Dans  $\pi_1(S^3 \setminus (l_2 \cup \dots \cup l_p))$  nous faisons le produit des lacets de droite à gauche.

La remarque (2.10) indiquait que si  $P$  est le polynôme d'enlacement de  $L$  alors le conjugué  $\bar{P}$  de  $P$  est le polynôme correspondant à l'enlacement  $L'$  obtenu à partir de  $L$  en échangeant les composantes 1 et  $p$  (i. e.  $L' = \coprod_{i=1}^p l'_i$  où  $l'_1 = l_p$ ,  $l'_i = l_i$  pour  $2 \leq i \leq p-1$  et  $l'_p = l_1$ ).

Le polynôme d'enlacement  $\bar{P}$  de  $L'$  s'écrit

$$P = \sum_{\gamma \in G} \mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_p, \tilde{l}_1) \alpha$$

où comme en (2.5)  $G$  est le groupe de Galois du revêtement universel  $\tilde{Y}$  du complémentaire  $Y$  de l'entrelacs  $(L \setminus (l_1 \cup l_p))$ . En suivant le parcours de  $\tilde{l}_1$  dans  $\tilde{Y}$  nous pouvons lire sur le mot  $\omega$  le polynôme  $\bar{P}$ . En effet  $n_i = \mathcal{L}((\gamma_{i-1} \dots \gamma_1), \tilde{l}_p, \tilde{l}_1)$ . Donc on a :

$$P = n_1 + \sum_i \mathcal{L}(\gamma_{i-1} \dots \gamma_1, \tilde{l}_p, \tilde{l}_1).$$

Le lacet  $l_1$  est homotopiquement trivial dans  $Y$ . Or si on identifie dans le mot  $\omega$  la variable  $x_p$  à 1 on trouve un mot correspondant à la classe de  $l_1$  dans  $Y$  c'est-à-dire on trouve l'élément neutre de  $G$ . Ceci s'écrit :

$$1 = \alpha_{k-1} \dots \alpha_1.$$

Donc :

$$\alpha_{k-1} \dots \alpha_j = (\alpha_{j-1} \dots \alpha_1)^{-1} \quad \text{où} \quad k-1 \leq j < 1.$$

La conjugaison est une involution de  $Z(G)$ . Le polynôme  $P$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P = \bar{P} &= n_1 + \sum_{j=2}^{k-1} n_j (\alpha_{j-1} \dots \alpha_1)^{-1} + n_k \\ &= n_1 + \sum_{j=2}^{k-1} n_j (\alpha_{k-1} \dots \alpha_j) + n_k. \end{aligned}$$

En outre :

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \right)_{(x_2 \dots x_{p-1}, 1)} = n_k + \sum_{j=1}^{k-1} n_j (\alpha_{k-1} \dots \alpha_j).$$

Ainsi on obtient :

$$(3.3) \quad P = \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_p} \right)_{(x_2 \dots x_{p-1}, 1)}.$$

Appliquons maintenant l'opérateur  $\frac{\partial^{p-2}}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}}$  aux deux termes de cette dernière égalité. On obtient une égalité qui, évaluée en  $(1, \dots, 1)$ , est :

$$\mu(2, \dots, p, 1) = M. \quad \square$$

(3.4) *Exemples.* — On déduit de la proposition (3.2) et des calculs de  $M$  dans les exemples (2.14) que :

- 1) Si  $L$  est l'entrelacs borroméen (fig. 1, § 1)  $\mu(1, 2, 3) = 1$ .
- 2) Si  $L$  est « le radiateur » (fig. 6, § 2)  $\mu(1, 2, 3) = 3$ .
- 3) Si  $L$  est « le serpent à deux têtes » (fig. 8, § 2)  $\mu(1, 2, 3, 4) = 4$ .

#### 4. Produits de Massey d'un entrelacs brunnien

Classiquement les produits de Massey (cf. [Ma<sub>1</sub>] et [K]) sont des opérations cohomologiques d'ordre supérieur associées au cup produit. W.S. Massey [Ma<sub>2</sub>] remarque que la dualité de Poincaré permet de définir des opérations analogues en homologie. Ces opérations duales sont associées à l'intersection. Nous développons le point de vue homologique pour décrire géométriquement et calculer explicitement le produit de Massey  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  des 2-cycles relatifs  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , duaux des méridiens des composantes  $l_i$  d'un entrelacs brunnien  $L$ .

En plus des notations établies au début du § 2 nous utilisons pour tout  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $p$  avec  $i < j$ :

$$X_i = S^3 \setminus T_i \quad \text{et} \quad X_{ij} = \bigcap_{k=i}^j X_k.$$

Pour alléger les notations notons  $X = X_{1,p}$  l'adhérence du complémentaire du voisinage tubulaire de  $L$ .

(4.0) Si  $V$  est une variété, notons  $bV$  le bord de  $V$ .

Choisissons pour tout  $i$  compris entre 1 et  $p$  une surface  $F_i$  plongée différentiablement dans  $S^3$  telle que  $bF_i = l_i$ . Notons  $e_i$  la classe de  $F_i$  dans  $H_2(X_i, bX_i)$ .

Pour définir le produit de Massey  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  nous devons disposer d'un système de Massey pour l'ensemble ordonné  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ .

(4.1) DÉFINITION. — Un système de Massey pour l'ensemble  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$  est la donnée pour tout couple d'indices  $(i, j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq p$  et  $(i, j) \neq (1, p)$  d'une famille de 2-chaînes relatives  $m_{ij}$  dans  $C_2(X_{ij}, bX_{ij})$  qui vérifient :

- 1) Dans  $H_2(X_i, bX_i)$  les classes d'homologie de  $m_{ii}$  et de  $F_i$  sont égales.
- 2) Si  $d$  désigne l'homomorphisme bord de  $C_2(X_{ij}, bX_{ij})$  dans  $C_1(X_{ij}, bX_{ij})$  et  $\cap$  l'intersection de chaînes alors

$$d(m_{ij}) = \sum_k^{j-1} m_{ik} \cap m_{(k+1)j}.$$

Remarque. — Par abus de notation  $m_{ik} \cap m_{(k+1)j}$  désigne l'intersection dans  $C_2(X_{ij}, bX_{ij})$  de l'intersection des chaînes  $m_{ik}$  et  $m_{(k+1)j}$  avec  $X_{ij}$ .

(4.2) DÉFINITION. — Le produit de Massey  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  est le sous-ensemble de  $H_1(X, bX)$  formé des classes d'homologie des éléments de la forme

$$\sum_k^{p-1} m_{1k} \cap m_{(k+1)p}$$

où les chaînes  $m_{1k}$  et  $m_{(k+1)p}$ ,  $1 \leq k \leq p-1$ , appartiennent à un même système de Massey pour  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ .

(4.3) Remarque. — S'il n'existe pas de système de Massey pour  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$  l'ensemble  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  sera l'ensemble vide ; cependant il suffit que  $\langle e_1 \dots e_{p-1} \rangle$  et  $\langle e_2 \dots e_p \rangle$  soient égaux à  $\{0\}$  pour qu'il existe un système de Massey.

(4.4) Remarque. — Si  $p$  est égal à 2, le produit de Massey  $\langle e_1 e_2 \rangle$  est constitué d'un unique élément. En effet  $\langle e_1 e_2 \rangle$  est alors égal à l'intersection de  $e_1$  avec  $e_2$ . Si  $p > 2$  et si  $L$  est brunnien,  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  est également constitué d'un unique élément. Ceci est une conséquence d'un résultat de D. Kraines ([K], lemme 21, p. 448). L'entrelacs  $L$  étant numéroté, nous adoptons la définition suivante :

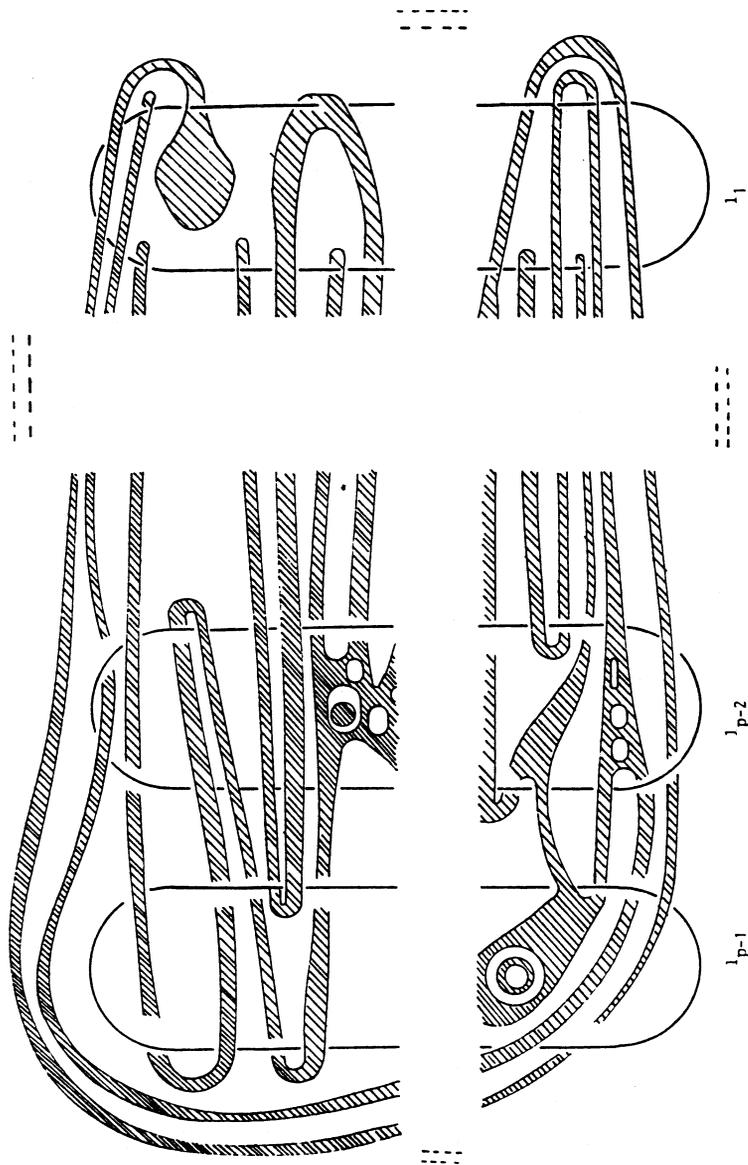


Figure 10.

(4.5) DÉFINITION. — Le produit de Massey de l'entrelacs  $L$  est l'élément  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  de  $H_1(X, bX)$ .

(4.6) DÉFINITION. — Un bon système de disques  $\{D_1, \dots, D_p\}$  d'un entrelacs  $L$  à  $p$  composantes est la donnée de l'image orientée dans  $S^3$  de  $p$  plongements différentiables du disque standard tels que pour tout  $i$  entre 1 et  $p$  la composante  $l_i$  soit le bord de l'image  $D_i$  du  $i^{\text{ème}}$  plongement et que de plus :

- a) Les disques  $D_1, \dots, D_{p-1}$  sont deux à deux disjoints.
- b)  $D_p$  rencontre transversalement  $\bigcup_{i=1}^{p-1} D_i$ .
- c)  $D_p$  ne rencontre pas  $L \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_p)$ .

La figure 10 représente un entrelacs brunnien au moyen d'une projection plane dont la restriction à chacun des disques  $D_i$  d'un bon système est injective lorsque  $1 \leq i \leq p-1$ ; de plus sur la figure elle est aussi injective sur  $D_p$ , ce que nous ne pouvons pas garantir en général.

(4.8) DÉFINITION. — Un point base  $*$  d'un bon système de disques  $\{D_1, \dots, D_p\}$  est la donnée d'un point  $*$  dans  $D_p$  qui n'appartient pas à  $\bigcap_{i=1}^{p-1} D_i$ .

(4.9) DÉFINITION. — Soit  $D$  un disque.

Un croissant de  $D$  est une partie fermée de  $D$  bordée par un arc du bord de  $D$  allant d'un point  $a$  à un point  $b$  et d'un arc dans  $D$  dont l'intérieur est dans  $\overset{\circ}{D}$  et qui joint  $b$  à  $a$ .

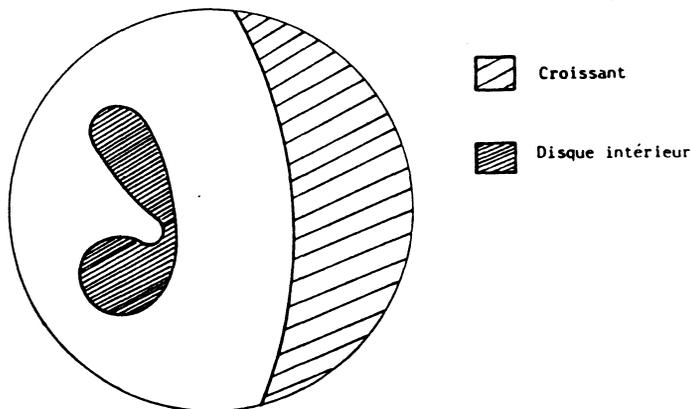


Figure 11. — Croissant et disque intérieur.

Un disque intérieur de  $D$  est l'image du plongement d'un disque dans  $\overset{\circ}{D}$ .  
Un anneau de  $D$  est l'adhérence du complémentaire dans  $D$  d'un disque intérieur.

Au moyen d'un bon système de disques d'un entrelacs brunnien  $L$  on construit un système de Massey particulièrement simple pour  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ . Plus précisément :

(4.10) PROPOSITION. — Soient  $L$  un entrelacs brunnien,  $\{D_1, \dots, D_p\}$  un bon système de disques de  $L$  et  $*$  un point base de  $\{D_1, \dots, D_p\}$  alors il existe un unique système de Massey  $\{m_{ij}\}$  pour  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$  qui vérifie :

- a) Pour tout  $i$  entre 1 et  $p$  les chaînes  $m_{ii}$  ont  $D_i$  pour support.
- b) Si  $1 \leq i < j < p$  la chaîne  $m_{ij}$  est nulle.
- c) Pour tout  $i$  entre 1 et  $(p-1)$  les chaînes  $m_{ip}$  sont combinaison linéaire de parties de  $D_p$  de la forme croissant, disque intérieur et anneau qui ne contiennent jamais  $*$ .

*Preuve de la proposition (4.10).* — La chaîne  $m_{ii}$  ayant  $D_i$  pour support vérifie les axiomes d'un système de Massey ((4.1) et on obtient a).

Montrons b) par récurrence sur  $j-i$ ,  $1 \leq j-i \leq p-2$ . Si  $j-i=1$  et  $j < p$  on peut poser  $m_{ij}=0$ . En effet  $D_i$  et  $D_j$  sont alors disjoints par a) d'où :

$$d(0) = m_{ii} \cap m_{jj}.$$

La chaîne 0 vérifie donc l'axiome 2) de (4.1). Si  $1 < j-i$  et  $j \neq p$  l'hypothèse de récurrence implique que 0 vérifie l'axiome 2) de (4.1). On peut donc poser  $m_{ij}=0$ .

Montrons c) par récurrence descendante sur  $i$ ,  $2 \leq i \leq p-1$ . Si  $i=p-1$  on doit trouver  $m_{(p-1)p}$  tel que :

$$d(m_{(p-1)p}) = m_{(p-1)(p-1)} \cap m_{pp}.$$

Le bord de  $m_{(p-1)p}$  doit donc être égal à la classe de  $D_{(p-1)} \cap D_p$  dans  $C_1(X_{(p-1)p}, bX_{(p-1)p})$ . Par hypothèse  $D_1 \dots D_p$  forme un bon système de disques ((4.6) et donc  $D_p$  ne rencontre pas le bord de  $D_{(p-1)}$ . L'intersection  $D_{(p-1)} \cap D_p$  est alors constituée uniquement de courbes fermées plongées à la fois dans  $D_{(p-1)}$  et dans  $D_p$  et d'arcs « ribbon » dans  $D_p$  c'est-à-dire d'arcs dans  $D_p$  qui joignent deux points distincts du bord de  $D_p$ . Les disques  $D_i$  sont orientés. Les courbes fermées et les arcs « ribbon » appartenant à l'intersection de ces disques sont donc munis d'une orientation.

Une courbe fermée délimite un disque intérieur et un anneau complémentaire de ce disque. Si le point base  $*$  n'est pas dans le disque, on choisit le disque muni de l'orientation donnée par la courbe sinon on choisit l'anneau. Un arc « ribbon » sépare  $D_p$  en deux croissants. Choisissons le croissant qui ne contient pas le point base  $*$  et munissons-le de l'orientation donnée par l'arc. Dans le complexe relatif  $(X_{(p-1)p}, bX_{(p-1)p})$  le bord du croissant orienté est donc l'arc « ribbon ». La chaîne  $m_{(p-1)p}$  est la combinaison linéaire des parties de  $D_p$  ainsi choisies.

Supposons que la chaîne  $m_{(i+1)p}$  vérifie la condition  $c)$  pour  $2 \leq i < p-2$  alors montrons que l'on peut construire une chaîne  $m_{ip}$  qui vérifie  $c)$ . Par définition  $((4.1)m_{ip})$  satisfait l'égalité suivante :

$$d(m_{ip}) = \sum_{j=i}^{p-1} m_{ij} \cap m_{(j+1)p}.$$

Grâce au point  $b)$  déjà démontré, cette égalité devient :

$$d(m_{ip}) = m_{ii} \cap m_{(i+1)p}$$

par hypothèse de récurrence  $m_{(i+1)p}$  est combinaison linéaire de parties fermées de  $D_p$ . Il suffit de reprendre, pour trouver  $m_{ip}$ , l'argument de la construction de  $m_{(p-1)p}$  puisque  $dm_{ip}$  est combinaison linéaire de classes d'éléments de  $D_i \cap D_p$  et que l'intersection de  $D_i$  avec  $D_p$  est de la même forme de celle de  $D_{p-1}$  avec  $D_p$  (arcs « ribbon » et courbes fermées).

Remarquons que l'utilité du point base réside uniquement dans le fait qu'il détermine de façon unique le choix des croissants, disques intérieurs et anneaux de  $D_p$ .  $\square$

(4.11) Pour tout  $i$  compris entre 2 et  $p$  choisissons un chemin  $\gamma_{1i}$  dans  $X$  qui joint le bord de  $T_1$  au bord de  $T_i$ . Remarquons que les classes  $[\gamma_{1i}]$  forment une base de  $H_1(X, bX)$ .

(4.12) COROLLAIRE. — Si les entrelacs  $L \setminus l_1$  et  $L \setminus l_p$  sont triviaux, il existe  $c$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $c[\gamma_{1p}]$  appartienne au produit de Massey  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  associé à  $L$ .

*Preuve du corollaire.* — Soit  $\{m_{ij}\}$  un système de Massey pour  $L$  qui vérifie les propriétés  $a)$ ,  $b)$  et  $c)$  de la proposition (4.10). Par définition (cf. (4.2)) la classe de la chaîne  $\sum_{i=1}^{p-1} m_{1i} \cap m_{(i+1)p}$  appartient à  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$ , or elle est égale à  $m_{11} \cap m_{2p}$  car  $m_{ij}$  est nul si  $i < j$  et  $j \neq p$ .

Par la proposition (4.10)  $m_{2p}$  est somme de classes de morceaux de  $D_p$ . Il suffit donc de montrer que la classe dans  $H_1(X, bX)$  de l'intersection

de  $D_1$  avec  $D_p$  est de la forme  $n \cdot [\gamma_{1p}]$  où  $n \in \mathbb{Z}$ . L'intersection de  $D_1$  avec  $D_p$  est constituée de courbes fermées, d'arcs « ribbon » c'est-à-dire d'arcs joignant soit deux points de  $l_1$  soit deux points de  $l_p$  et enfin de « clasp » c'est-à-dire d'arcs joignant un point de  $l_1$  à un point de  $l_p$ . Les courbes fermées et les arcs « ribbon » sont homologues à zéro dans  $H_1(X, bX)$  (le fait que l'on ait l'homologie relative est ici essentiel). Un « clasp » est suivant son orientation homologue à  $[\gamma_{1p}]$  ou à  $-[\gamma_{1p}]$ .

(4.13) COROLLAIRE. — Si  $L$  est brunnien il existe  $c$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que  $\langle e_1 \dots e_p \rangle = c[\gamma_{1p}]$ .

*Preuve.* — Il découle de D. Kraines [K] que si  $L$  est brunnien le produit  $\langle e_1 \dots e_p \rangle$  contient un seul élément ; le corollaire (4.12) montre que cet élément est de la forme  $c \cdot [\gamma_{1p}]$ .

### 5. Tambourin marqué et preuve des théorèmes

Dans ce paragraphe nous allons donner un algorithme pour décrire les chaînes  $m_{ip}$  d'un système de définition qui vérifient les propriétés *a*), *b*) et *c*) de la proposition (4.10) et calculer l'entier  $c$  tel que  $c \cdot [\gamma_{1p}]$  soit le produit de Massey de l'entrelacs brunnien  $L$  (cf. corollaire (4.13)).

R. Porter et V. G. Turaev (cf. [P] et [T]) ont montré que les produits de Massey (cohomologiques) associés à un entrelacs correspondent exactement aux invariants  $\mu$  de Milnor. Grâce au tambourin marqué et au polynôme d'enlacement nous obtenons une preuve géométrique simple de ce résultat pour le nombre  $\mu(1, \dots, p)$  de Milnor d'un entrelacs brunnien (cf. corollaire (5.9)).

#### (5.1) CONSTRUCTION DU TAMBOURIN MARQUÉ

Soit  $\{D_1, \dots, D_p\}$  un bon système de disques de  $L$  et  $*$  un point base (cf. (4.6) et (4.8)). Le tambourin marqué correspondant à ces disques est constitué du disque  $D_p$  muni de l'ensemble  $R$  des courbes et arcs orientés de l'intersection de  $D_p$  avec  $\bigcup_{i=2}^{p-1} D_i$ . De plus :

I. On associe à chaque composante connexe  $\delta$  de  $R$  une bulle qui contient l'entier  $i$  lorsque  $\delta$  appartient à  $D_i \cap D_p$ .

II. On écrit dans chaque composante connexe  $\Delta$  de  $D_p \setminus R$  munie de l'orientation induite par  $D_p$  un monôme (non commutatif)  $\alpha\alpha(\Delta)$ . L'entier  $a$

est le nombre d'enlacement de  $l_1$  avec le bord de  $\Delta$ . Le mot  $\alpha(\Delta)$  du groupe libre  $G$  de base  $x_2 \dots x_{p-1}$  est construit par proximité sur  $D_p$  en suivant la règle suivante :

a) On écrit le mot trivial 1 dans la composante connexe de  $D_p \setminus R$  qui contient le point base  $*$ .

b) Si les composantes connexes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de  $D_p \setminus R$  ont dans leur adhérence un arc commun  $\delta$  appartenant à  $D_i \cap D_p$  (la bulle de  $\delta$  désigne  $i$ ) alors :

$$\alpha(\Delta_2) = X_i \alpha(\Delta_1) \text{ si } \delta \text{ a l'orientation du bord de } \Delta_2.$$

$$\alpha(\Delta_2) = X_i^{-1} \alpha(\Delta_1) \text{ si } \delta \text{ a l'orientation du bord de } \Delta_1.$$

Voici une figure décrivant l'aspect général d'un tambourin marqué :

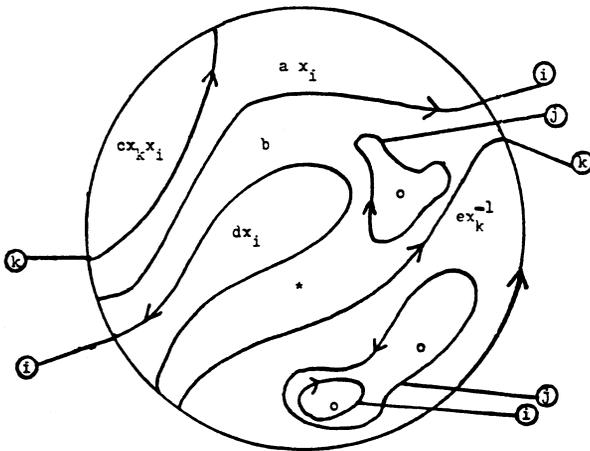


Figure 12. — Physiognomie d'un tambourin marqué.

Les indices  $i, j$  et  $k$  sont dans  $\{2, \dots, p-1\}$  et les entiers  $a, b, c, d$  et  $e$  sont dans  $\mathbb{Z}$ .

*Remarque.* — Si  $\Delta$  est une composante connexe de  $D_p \setminus R$  dont le bord ne rencontre pas  $l_p$  alors  $\mathcal{L}(l_1, h) = 0$ . Par conséquent le monôme du tambourin marqué écrit dans  $\Delta$  est nul.

(5.2) EXEMPLES DE TAMBOURIN MARQUÉ

1) Pour l'entrelacs boroméen, voir la figure 5 du § 1.

- 2) Pour le « radiateur » voir figure 7 au § 2.  
 3) Pour le « serpent à deux têtes » voir figure 9 au § 2.

(5.3) *Remarque.* — Si la frontière commune de deux composantes connexes distinctes de  $D_p \setminus R$  est non vide, elle est constituée soit d'un seul arc « ribbon » soit d'une unique courbe fermée.

(5.4) *Remarque.* — Les monômes de tambourin marqué dépendent à multiplication à droite près par un mot constant du choix du point base  $*$ . Une fois  $*$  choisi la construction par proximité est bien définie car chaque arc de  $R$  décompose  $D_p$  en deux composantes connexes (cf. Remarque (5.3)).

(5.5) DÉFINITION. — Le polynôme non commutatif  $Q$  en  $(p-2)$  variables obtenu en faisant la somme des monômes d'un tambourin marqué est le polynôme de ce tambourin.

(5.6) THÉORÈME. — A multiplication à gauche et à droite près par un élément du groupe libre  $G$  le polynôme d'enlacement  $P$  de  $L$  et le polynôme  $Q$  d'un tambourin  $\tilde{\tau}$  de  $L$  sont égaux.

(5.7) COROLLAIRE. — A multiplication à gauche et à droite près par un élément de  $G$  le polynôme d'un tambourin ne dépend que du type de l'entrelacs  $L$ .

*Preuve du théorème (5.6).* — Cette preuve repose sur une description du tambourin marqué  $\tilde{\tau}$  à partir du revêtement universel  $\Pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  du complémentaire  $Y$  de l'entrelacs  $l_2 \cup \dots \cup l_{p-1}$ .

Soit  $D_1 \dots D_p$  le bon système de disques de  $L$  avec le point base  $*$  utilisé pour obtenir le tambourin  $\tilde{\tau}$ .

Soit  $Z$  le complémentaire dans  $S^3$  de  $\bigcup_{i=2}^{p-1} D_i$ . Après choix d'un point base dans  $\tilde{Y}$ ,  $\pi^{-1}(Z)$  est réunion disjointe sur les mots  $\alpha$  de  $G$  des sous-espaces  $\alpha \cdot \tilde{Z}$  où  $\tilde{Z}$  est la composante connexe de  $\pi^{-1}(Z)$  qui contient le point base de  $\tilde{Y}$ . La restriction de  $\pi$  à  $\tilde{Z}$  est un difféomorphisme de  $\tilde{Z}$  sur  $Z$ .

Notons  $D_p$  la composante connexe de  $\pi^{-1}(D_p)$  telle que  $\pi^{-1}(*) \cap \tilde{D}_p \subset \tilde{Z}$ ,  $\tilde{l}_p$  le bord de  $\tilde{D}_p$  et  $\tilde{l}_1$  la composante de  $\pi^{-1}(l_1)$  se trouvant dans  $\tilde{Z}$ . Avec ces choix de relevé dans  $\tilde{Y}$  de  $D_p$ ,  $l_p$  et  $l_1$  on va obtenir  $Q = P$ . Comme  $D_2 \dots D_p$  font partie d'un bon système de disques (4.6) la trace sur  $\tilde{D}_p$  de l'image inverse de  $\pi^{-1}(\bigcup_{i=2}^{p-1} D_i)$  est formée soit d'arcs joignant deux points du bord de  $\tilde{D}_p$  soit de courbes fermées et il n'y a pas de points doubles.

Par conséquent le disque  $\tilde{D}_p$  munit des arcs orientés de  $\tilde{D}_p \cap \pi^{-1}(\bigcup_{i=2}^{p-1} D_i)$  donne une figure ayant l'apparence suivante :

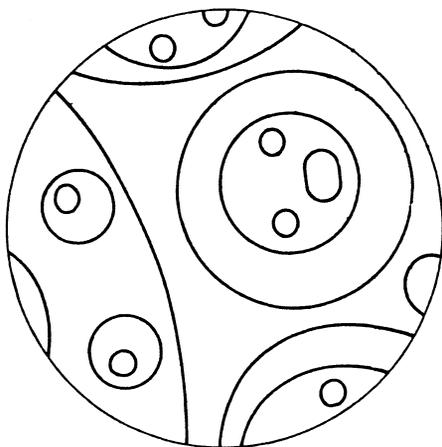


Figure 13.

A partir de cette figure on retrouve  $\tilde{\mathcal{C}}$  comme suit :

- a) Chaque arc de  $\tilde{D}_p \cap \pi^{-1}(D_i)$  est muni d'une bulle désignant l'entier  $i$ .
- b) Si  $\Delta$  est une composante connexe de  $(\tilde{D}_p \cap (\alpha, \tilde{Z}))$  on écrit dans  $\Delta$  le monôme  $\mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_1, b\Delta) \cdot \alpha$ .

En outre on a

$$\mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_1, \tilde{l}_p) = \sum_{\alpha \in G} \mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_1, b\Delta)$$

Le polynôme d'enlacement  $P = \sum_{\alpha \in G} \mathcal{L}(\alpha, \tilde{l}_1, \tilde{l}_p) \alpha$  est le polynôme  $Q$  de  $\tilde{\mathcal{C}}$ .  $\square$

Le corollaire (5.7) se déduit directement du théorème (5.6) et de la propriété (2.7).  $\square$

Au moyen du tambourin  $\tilde{\mathcal{C}}$  nous allons décrire un système de Massey de  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$  et calculer le produit de Massey  $c[\gamma_{1p}]$  de  $L$  (cf. (4.13)).

(5.8) THÉORÈME. — Soit  $P$  le polynôme d'enlacement d'un entrelacs brunniens  $L$ , le produit de Massey  $\langle e_1, \dots, e_p \rangle$  de  $L$  est égal à

$$- \left( \frac{\hat{c}^{p-2} P}{\hat{c}x_2 \dots \hat{c}x_{p-1}} \right)_{(1 \dots 1)} [\gamma_{1p}].$$

(5.9) LEMME. — Le système de Massey  $\{m_{ij}\}$  vérifiant les propriétés a), b) et c) de la proposition (4.10) et le tambourin marqué construits à partir du bon système de disque  $\{D_1, \dots, D_p\}$  de point base  $*$  de l'entrelacs  $L$  sont liés par l'égalité :

$$m_{ip} = \sum_{\Delta} \left( \frac{\partial^{p-i} \alpha(\Delta)}{\partial x_i \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)} [\bar{\Delta}]$$

où  $2 \leq i \leq p$ ,  $\Delta$  parcourt les composantes connexes de  $D_p \setminus R$  et  $[\bar{\Delta}]$  est la classe dans  $C_2(X_{ip}, bX_{ip})$  de l'adhérence de  $\Delta$ .

*Preuve du lemme.* — La preuve du lemme se fait par récurrence descendante sur  $i$  où  $2 \leq i \leq p$  et par proximité sur les composantes connexes de  $D_p \setminus R$ . Rappel :  $R = D_p \cap (D_2 \cup \dots \cup D_{p-1})$ .

1<sup>er</sup> cas :  $i=p$  alors  $m_{pp} = [D_p] = \sum_{\Delta} [\bar{\Delta}]$ .

2<sup>e</sup> cas : On suppose le lemme vrai pour  $m_{i+1}$  où  $2 < i+1 \leq p$ , on veut démontrer le lemme pour  $i$ . Après avoir effectué une décomposition cellulaire de  $D_p$  suivant les arcs de  $R$  on trouve pour tout  $\Delta$  un coefficient  $m_i(\Delta)$  dans  $\mathbb{Z}$  tel que :

$$m_{ip} = \sum_{\Delta} m_i(\Delta) [\bar{\Delta}].$$

Pour montrer le lemme il suffit donc de montrer pour toute composante connexe  $\Delta$  de  $D_p \setminus R$  :

$$m_{ip} = \sum_{\Delta} m_i(\Delta) [\bar{\Delta}].$$

Pour montrer le lemme il suffit donc de montrer pour toute composante connexe  $\Delta$  de  $D_p \setminus R$  :

$$(\square) \quad m_i(\Delta) = \left( \frac{\partial^{p-i} \alpha(\Delta)}{\partial x_i \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)}$$

Par construction (c) dans (4.10) si  $\Delta$  contient le point base  $*$  alors  $m_i(\Delta) = 0$  pour tout  $i$  entre 2 et  $(p-1)$  ; or si  $\Delta$  contient  $*$ ,  $\alpha(\Delta) = 1$  par a) dans (5.1). Donc l'égalité est vérifiée pour  $\Delta$  tel que  $*$  est dans  $\Delta$ . On suppose  $(\square)$  démontrée pour une composante connexe  $\Delta$  de  $D_p \setminus R$ . Par proximité on choisit une composante connexe  $\Delta'$  de  $D_p \setminus R$  qui a un arc  $\delta$  dans  $D_k \cap D_p$  pour frontière commune avec  $\Delta$ . Par construction ((5.1)) on a alors :

$$\alpha(\Delta') = \lambda_i^{\delta} \alpha(\Delta) \quad \text{où} \quad \lambda = +1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Si  $k \neq i$   $\delta$  n'appartient pas à l'intersection de  $D_i$  avec  $m_{i+1,p}$  et donc :

$$m_i(\Delta) = m_i(\Delta') = m_{i+1}(\Delta) = m_{i+1}(\Delta')$$

En outre si  $k \neq i$  on a :

$$\left( \frac{\partial^{p-i}\alpha(\Delta)}{\hat{c}x_i \dots \hat{c}x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)} = \left( \frac{\partial^{p-i}(x_k^\lambda \alpha(\Delta))}{\hat{c}x_i \dots \hat{c}x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)}$$

et l'égalité  $(\square)$  est vérifiée grâce à l'hypothèse de récurrence descendante sur  $i$ .

Si  $i = k$  on a par hypothèse de récurrence :

$$m_{i+1}(\Delta) = \left( \frac{\partial^{p-i-1}\alpha(\Delta)}{\hat{c}x_{i+1} \dots \hat{c}x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)}$$

mais aussi  $m_{i+1}(\Delta) = m_{i+1}(\Delta')$  car  $k \neq i+1$ .

Le bord de la chaîne  $m_{ip}$  est égal à  $m_{ii} \cap m_{(i+1)p}$  vu que, par hypothèse  $m_{ij} = 0$  lorsque  $1 \leq i < j < p$ .

Le bord de  $m_{ip}$  doit donc contenir  $m_{i+1}(\Delta) = m_{i+1}(\Delta')$  fois la classe de l'arc  $\delta$ .

Les conventions sur l'orientation de  $\delta$  et la construction de  $\alpha(\Delta') = x_k^\lambda \alpha(\Delta)$  donnent :

$$m_i(\Delta') = m_i(\Delta) + \lambda m_{i+1}(\Delta).$$

En outre en (2.11) on rappelait la règle de dérivation qui, appliquée à l'élément  $x_k^\lambda \alpha(\Delta)$  de  $Z[G]$ , permet d'obtenir :

$$\left[ \frac{\hat{c}}{\hat{c}x_i} \left( x_i^\lambda \left( \frac{\partial^{p-i-1}\alpha(\Delta)}{\hat{c}x_{i+1} \dots \hat{c}x_{p-1}} \right) \right) \right]_{(1\dots 1)} = m_{i+1}(\Delta)\lambda + m_i(\Delta)$$

ce qui termine la preuve de l'égalité  $(\square)$  pour  $\Delta'$  et par conséquent la preuve du lemme.  $\square$

Montrons le théorème (5.8).

Comme  $L$  est brunnien il existe un système de Massey  $\{ m_{ij} \}$  pour  $\{ e_i \}_{1 \leq i \leq p}$  qui vérifie les propriétés  $a)$ ,  $b)$  et  $c)$  de la proposition (4.10). Dans ce cas  $\langle e_1 \dots e_p \rangle = [m_{11} \cap m_{2p}]$ .

On applique le lemme (5.9) pour la chaîne  $m_{2p}$ . Vu que

$$[m_{11} \cap \bar{\Delta}] = -\mathcal{L}(l_1, b\Delta) \cdot [\gamma_{1p}]$$

on obtient :

$$\langle e_1 \dots e_p \rangle = \sum_{\Delta} \left( \frac{\partial^{p-2}\alpha(\Delta)}{\hat{c}x_i \dots \hat{c}x_{p-1}} \right)_{(1\dots 1)} \cdot (-1) \cdot \mathcal{L}(l_1, b\bar{\Delta}) [\gamma_{1p}]$$

et donc par construction de  $Q$  ((5.5)) on a :

$$\langle e_1 \dots e_p \rangle = - \left( \frac{\partial^{p-2} Q}{\partial x_2 \dots \partial x_{p-1}} \right)_{(1 \dots 1)} [\gamma_{1p}].$$

Comme  $P=Q$  (théorème (5.6)) on a obtenu le théorème (5.8).  $\square$

(5.10) COROLLAIRE. — *Si  $L$  est brunnien, on a l'égalité :*

$$\langle e_1 \dots e_p \rangle = - \mu(1 \dots p) [\gamma_{1p}].$$

Ce corollaire est conséquence directe du théorème (5.8) et de la proposition (3.2).  $\square$

*Remarques.*

(5.11) Le corollaire (5.10) est la version homologique d'un cas particulier du théorème de R. Porter [P] et V. G. Turaev [T]. Le cup produit et la forme d'intersection sont calculés avec des conventions qui font apparaître le signe  $(-1)^p$  dans la formule donnée par R. Porter et  $(-1)$  dans notre corollaire (5.10).

(5.12) Pour calculer des produits de Massey sur des exemples particuliers E. J. O'Neill [O'N] et aussi R. Fenn et P. Taylor [F-T] ont déjà utilisé des intersections en homologie.

(5.13) J. P. May [May] précise l'indétermination des produits de Massey dans des situations très générales. Cette précision servirait à l'étude des invariants  $\bar{\mu}$  (cf. [Mi<sub>2</sub>]) mais n'est pas utile dans le cas particulier (l'invariant  $\mu(1, \dots, p)$  d'un entrelacs brunnien) que nous étudions ici.

(5.14) Edwards [E] considère une intégrale dérivée de l'intégrale de Gauss définissant le nombre d'enlacement qui associe à un entrelacs brunnien à trois composantes un entier, égal à 1 si l'entrelacs est le borroméen. Probablement la moitié de ce nombre, qui est un nombre d'enlacement dans un revêtement ramifié à deux feuillets, est congru modulo 2 au nombre de Milnor  $\mu(1, 2, 3)$ . Il est frappant de constater que les idées de K. T. Chen [Ch<sub>2</sub>], qui sont le point de départ du travail de Milnor, reviennent indépendamment chez Edwards qui en fait redéfinit des intégrales de chemin itérées comme le fait Chen (Voir [Ch<sub>1</sub>]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Ch<sub>1</sub>] CHEN (K. T.). — Algebras of iterated path integrals and fundamental groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 156, 1971, p. 359-379.

- [Ch<sub>2</sub>] CHEN (K. T.). — Isotopy invariants of links. *Annals of Math.* (2) vol. 56, 1952, p. 343-353.
- [E] EDWARDS (S. F.). — Statistical mechanics with topological constraints I et II. *Proc. phys. soc.* (Grande-Bretagne), 1967, vol. 91 et série 2, 1968, vol. 1.
- [F-T] FENN (R.) et TAYLOR (P.). — *Generalised Borromean ring and higher order linking numbers* (à paraître).
- [F] FOX (R. H.). — Free differential calculus I. *Ann. of Math.*, t. 57, 1953, p. 547-560.
- [G] GOLDSMITH (D.). — *A linking invariant of classical link concordance*. Knot theory. Proceedings. Plans sur Bex, 1977, (685).
- [K] KRAINES (D.). — Massey Higher products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 124, 1966, p. 431-449.
- [L] LAUFER (H. B.). — Some numerical link invariants. *Topology*, vol. 10, 1971.
- [Ma<sub>1</sub>] MASSEY (W. S.). — Some higher order cohomology operations, p. 145-154. *Symposium International de Topologia Algebraica*. Mexico City, 1958.
- [Ma<sub>2</sub>] MASSEY (W. S.). — Higher order linking numbers. *Conf. on algebraic topology* (Univ. of Illinois at Chicago circle, 1968). Univ. of Chicago at Chicago circle, Chicago, Illinois, p. 174-205.
- [May] MAY (J. P.). — Matric Massey products. *J. Algebra*, vol. 12, 1969, p. 533-568.
- [Mi<sub>1</sub>] MILNOR (J.). — Link groups. *Annals of Math.*, (2), 1954, p. 177-195.
- [Mi<sub>2</sub>] MILNOR (J.). — Isotopy of links. Algebraic geometry and topology. *A symposium in the honor of S. Lefschetz*, p. 280-306. Princeton Univ. press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [Mu<sub>1</sub>] MURASUGI (K.). — On Milnor's invariant for links, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 124, 1966, p. 94-110.
- [Mu<sub>2</sub>] MURASUGI (K.). — On Milnor's invariant for links II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 148, 1970, p. 41-61.
- [Mu<sub>3</sub>] MURASUGI (K.). — *Nilpotent coverings of links and Milnor's invariant*. Preprint.
- [O'N] O'NEILL (E. J.). — Higher order Massey Products and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 248, 1979, p. 37-66.
- [P] PORTER (R.). — Milnor's  $\mu$  invariants and Massey products. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 257, n° 1, 1980, p. 39-71.
- [T] TURAEV (V. G.). — Milnor invariants and Massey products. *Zapiski Neuchnykh seminarov leningradskovo otdeleniya matematicheskovo instituta im. A.V. Stekhlor, Akad. Nauk SSSR*, vol. 66, 1976, p. 189-203.