

BULLETIN DE LA S. M. F.

SERGE OCHANINE

Modules de SU -bordisme. Couples exacts cohérents

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 79-98

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__79_0

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**MODULES DE SU -BORDISME.
COUPLES EXACTS COHÉRENTS**

PAR

SERGE OCHANINE (*)

RÉSUMÉ. — Le premier d'une série de trois articles consacrés à l'étude des propriétés homologiques des modules de SU -bordisme de complexes cellulaires finis. On introduit la catégorie des couples exacts cohérents dont l'objet type est le couple exact de Conner-Floyd, et l'on étudie les propriétés de finitude de tels objets.

ABSTRACT. — The first of a series of three articles on the homology properties of modules of SU -bordism of finite complexes. A convenient category of coherent exact couples modelled on the Conner-Floyd exact couple is introduced and the finiteness properties of its objects are studied.

Soit X un complexe cellulaire fini. L. Smith [5] a démontré que le Ω^U -module de bordisme complexe $\Omega_*^U(X)$ est de type fini. L'affirmation analogue pour les modules de SU -bordisme est fautive : le Ω^{SU} -module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ est de type infini (cf. 1.17 ci-dessous). Cet article a pour but d'expliquer ce phénomène. On verra, en particulier, que l'exemple de $P_2(\mathbb{C})$ est en un sens le plus mauvais possible.

L. Smith travaille dans la catégorie des modules cohérents. L'anneau Ω^{SU} n'étant pas cohérent, cette catégorie ne convient pas pour l'étude des modules de SU -bordisme. Nous lui substituerons donc une catégorie ∇ de « couples exacts cohérents ». Le §1 est consacré aux propriétés de finitude de tels couples. Par exemple, si t est l'élément non-nul de Ω_1^{SU} , on montre que $t\Omega_*^{SU}(X)$ est un sous-module de type fini de $\Omega_*^{SU}(X)$. Dans le cas où $H_*(X; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion, cela nous renseigne sur le module de torsion de $\Omega_*^{SU}(X)$.

(*) Texte reçu le 16 février 1984, révisé le 12 septembre 1984.

S. OCHANINE. L.P. 13 du C.N.R.S., Université de Paris-Sud, Mathématique, bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Dans le § 2, on détermine les objets projectifs de ∇ . Le rôle spécifique du module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ apparaît à ce stade. On démontre également que ∇ a assez d'objets projectifs. Il en découle, par exemple, l'existence d'une surjection $D \rightarrow \Omega_*^{SU}(X)$, où D est une somme directe finie de modules isomorphes à Ω_*^{SU} ou $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$.

Dans une prochaine publication, ces propriétés de ∇ seront appliquées à la construction de résolutions topologiques de modules de SU -bordisme, analogues à celles de [2], et à l'étude de leur dimension homologique.

Les résultats de cet article ont été en partie obtenus lors d'un séjour à l'Institut des Hautes Études de Princeton (N.J.). Je présente mes vifs remerciements à P. S. Landweber, L. Smith et R. E. Stong pour les entretiens stimulants que j'ai eus avec eux à cette occasion. Je remercie également Michèle Audin qui a lu le manuscrit et a fait de nombreuses suggestions utiles.

1. Couples exacts cohérents

(1.1) L'outil principal de la SU -théorie est un couple exact qui relie le groupe de bordisme Ω_*^{SU} à un groupe de bordisme plus maniable $W_*(X)$ construit à partir des variétés faiblement complexes à déterminants sphériques. Nous supposons que le lecteur est familier avec ces objets et qu'il connaît, par exemple, les faits suivants (cf. [1], [6] chap. X) :

Les groupes $W_*(X)$ forment une théorie homologique multiplicative : il existe un produit naturel

$$W_*(X) \otimes W_*(Y) \rightarrow W_*(X \times Y)$$

qui définit, en particulier, une structure d'anneau commutatif gradué dans $W = W_*(pt)$ et, pour tout X , une structure de W -module gradué dans $W_*(X)$.

Il existe une transformation naturelle d'oubli

$$j : \Omega_*^{SU}(X) \rightarrow W_*(X)$$

de degré 0, compatible avec les structures multiplicatives.

Il existe une transformation naturelle

$$\partial : W_*(X) \rightarrow \Omega_*^{SU}(X)$$

de degré -2 correspondant à la dualisation de la première classe de Chern.

Pour tout X , il existe un couple exact $\mathcal{S}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_*^{SU}(X) & \xrightarrow{t} & \Omega_*^{SU}(X) \\ & \swarrow i & \searrow j \\ & W_*(X) & \end{array}$$

dans lequel t est la multiplication par l'élément non-nul de $\Omega_*^{SU} = \mathbb{F}_2$, noté également t .

L'homomorphisme ∂ est lié à j par les relations suivantes :

- a) $\partial(j(s).e) = s.\partial e$, pour $s \in \Omega_*^{SU}$, $e \in W_*(X)$;
- b) $\partial(w.j(m)) = \partial w.m$, pour $w \in W$, $m \in \Omega_*^{SU}(X)$.

Enfin, la différentielle $d = j\partial$ du couple $\mathcal{S}(X)$ vérifie la relation

c) $d(w.e) = dw.e + w.de - x_1.dw.de$, où $w \in W$, $e \in W_*(X)$, et où $x_1 \in W_2$ est la classe de l'espace projectif $P_1(\mathbb{C})$. On a $dx_1 = 2$.

(1.2) La formule (c) rappelle la formule de Leibnitz pour la différentielle d'une algèbre différentielle graduée. Pour mettre cette ressemblance en relief, posons :

$$\bar{e} = e - x_1.de \quad (e \in W_*(X)).$$

Par un calcul direct, on obtient :

PROPOSITION. — L'endomorphisme $e \mapsto \bar{e}$ est une involution du W -module $W_*(X)$, i. e. :

$$\bar{\bar{e}} = e, \quad \overline{w.e} = \bar{w}.\bar{e} \quad (w \in W, e \in W_*(X)).$$

De plus, $d\bar{e} = -de$. □

La formule (c) de 1.1 devient maintenant :

$$d(w.e) = dw.e + \bar{w}.de \quad (\text{formule de Leibnitz}).$$

(1.3) La structure de l'anneau W est bien connue :

PROPOSITION (cf. [6], chap. X). — L'anneau W est isomorphe à un anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, x_3, x_4, \dots]$, $x_i \in W_{2i}$ ($i \neq 2$). Les générateurs x_i peuvent être choisis de manière à ce que l'on ait :

$$\begin{aligned} x_1 &= [P_1(\mathbb{C})], \quad dx_1 = 2, \\ dx_{2i} &= x_{2i-1} \quad (i \geq 2). \quad \square \end{aligned}$$

On fixera une fois pour toutes un ensemble de générateurs x_i ayant les

propriétés énoncées. Notons que la formule de Leibnitz détermine alors entièrement l'action de d dans W .

Notons $W(n)$ ($1 \leq n < \infty$) le sous-anneau de W engendré par les éléments de degré $\leq 4n$. On a :

$$\begin{aligned} W(1) &= \mathbb{Z}[x_1] \\ W(n) &= \mathbb{Z}[x_1, x_3, \dots, x_{2n}] \quad (2 \leq n < \infty) \\ W(\infty) &= W. \end{aligned}$$

La formule de Leibnitz montre que $W(n)$ est stable par d .

(1.4) Par la suite, « module gradué M » signifiera « module \mathbb{Z} -gradué M pour lequel $M_n = 0$, si $n < 0$ ».

Soit M un $W(n)$ -module gradué. On dira que M est un $W(n)$ -module différentiel, s'il est muni d'un endomorphisme d de degré -2 tel que $d^2 = 0$ et $d(w \cdot m) = dw \cdot m + \bar{w} \cdot dm$ ($w \in W(n)$, $m \in M$). Par exemple, pour tout X , $W_*(X)$ est un W -module différentiel.

La formule de Leibnitz montre que le produit de $W(n)$ induit un produit dans le groupe dérivé $H_*(W(n))$ qui devient ainsi un anneau commutatif. De même, si M est un $W(n)$ -module différentiel, le groupe dérivé $L_*(M)$ est canoniquement un $H_*(W(n))$ -module gradué.

Prenons par exemple $n = 1$. On a dans $W(1)$:

$$d(x_1^2) = dx_1 \cdot x_1 + \bar{x}_1 \cdot dx_1 = 0, \quad \text{car } \bar{x}_1 = -x_1.$$

Soit $c_2 \in H_4(W(1))$ la classe d'homologie de x_1^2 . Comme $d(x_1^{2k}) = 0$ et $d(x_1^{2k+1}) = 2x_1^{2k}$, on obtient $H_*(W(1)) = \mathbb{F}_2[c_2]$. Donc, pour tout $W(1)$ -module différentiel M , $H_*(M)$ est un $\mathbb{F}_2[c_2]$ -module gradué. C'est, en particulier, un \mathbb{F}_2 -espace vectoriel.

(1.5) Soit N un $W(n)$ -module différentiel. Pour tout k tel que $n \leq k < \infty$, considérons le $W(k)$ -module $M = W(k) \otimes_{W(n)} N$. Comme $W(n)$ est un facteur direct dans le $W(n)$ -module $W(k)$, on a une injection canonique $m \mapsto 1 \otimes m$ ($m \in N$) de N dans M . La formule

$$d(w \otimes m) = dw \otimes m + \bar{w} \otimes dm$$

définit dans M une structure de $W(k)$ -module différentiel. Nous allons calculer le module dérivé de M en fonction du module dérivé de N .

(1.6) Considérons d'abord le cas où $k = n + 1 < \infty$. On pose donc

$$M = W(k) \otimes_{W(k-1)} N \quad (k \geq 2).$$

On a dans $W(k)$:

$$d(x_{2k}\bar{x}_{2k}) = dx_{2k} \cdot \bar{x}_{2k} + x_{2k} \cdot d\bar{x}_{2k} = 0;$$

donc $c = x_{2k}\bar{x}_{2k}$ est un cycle de $W(k)$. Il résulte que $H_*(M)$ est canoniquement un $\mathbb{Z}[c]$ -module gradué.

PROPOSITION. — *L'injection canonique $N \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[c]$ -modules gradués :*

$$F : \mathbb{Z}[c] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \xrightarrow{\cong} H_*(M).$$

Démonstration. — Posons, pour simplifier les notations, $u = x_{2k}$, $v = x_{2k-1}$. Comme $W(k) = \mathbb{Z}[u, v] \otimes_{\mathbb{Z}} W(k-1)$, on a :

$$M = \mathbb{Z}[u, v] \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Donc, la multiplication par v dans M est injective. D'autre part, $dv = 0$. Il en résulte une suite exacte de $W(k)$ -modules différentiels

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/vM \rightarrow 0.$$

Le module dérivé de M/vM est facile à calculer : comme $du = v$, on a : $d(u \cdot m) = u \cdot dm$ ($m \in M/vM$), d'où : $H_*(M/vM) \cong \mathbb{Z}[u] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N)$.

On a : $c = u\bar{u} = u^2 - x_1uv = u^2 \pmod{v}$. $W(k)$. Donc l'application composée :

$$\mathbb{Z}[c] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \xrightarrow{F} H_*(M) \xrightarrow{\pi_*} H_*(M/vM) \cong \mathbb{Z}[u] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N)$$

envoie $c^p \otimes h$ ($h \in H_*(N)$) sur $u^{2p} \otimes h$. Elle est donc injective, ce qui entraîne l'injectivité de F .

Comme $H_*(N)$ et $H_*(M)$ sont des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels (cf. 1.4), il suffira alors de comparer les séries de Poincaré de

$$V_1 = \mathbb{Z}[c] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) = \mathbb{F}_2[c] \otimes_{\mathbb{F}_2} H_*(N)$$

et de $V_2 = H_*(M)$. Pour la première, on a :

$$P(V_1, \alpha) = (1 - \alpha^{8k})^{-1} \cdot P(H_*(N), \alpha),$$

car c est de degré $8k$. Pour calculer la seconde, considérons le triangle exact

$$\begin{array}{ccc} H_*(M) & \xrightarrow{i_*} & H_*(M) \\ \circlearrowleft & & \swarrow \pi_* \\ & & H_*(M/vM) \end{array}$$

Si $m \in M$ et $dm=0$, on a : $v.m=d(u.m)$. Donc $v_* = 0$ et le triangle se réduit à une suite exacte courte. Comme δ est de degré $-4k$, on a :

$$\begin{aligned} P(V_2, \alpha) &= (1 + \alpha^{4k})^{-1} \cdot P(H_*(M/vM), \alpha) \\ &= (1 - \alpha^{4k})^{-1} \cdot (1 + \alpha^{4k})^{-1} \cdot P(H_*(N), \alpha) \\ &= P(V_1, \alpha). \quad \square \end{aligned}$$

(1.7) Prenons maintenant $n \leq k \leq \infty$ arbitraires. On notera c_{4m} la classe de $x_{2m}\bar{x}_{2m}$ dans $H_*(W(k))$, $2 \leq m \leq k$. Pour tout $W(k)$ -module différentiel M , $H_*(M)$ est un $\mathbb{Z}[c_2, c_8, c_{12}, \dots, c_{4k}]$ -module gradué. De même, pour tout W -module différentiel M , $H_*(M)$ est un $\mathbb{Z}[c_2, c_8, c_{12}, \dots, c_{4k}, \dots]$ -module gradué.

PROPOSITION. — Si $M = W(k) \otimes_{W(n)} N$ ($n \leq k \leq \infty$), l'injection canonique $N \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[c_{4(n+1)}, \dots, c_{4k}] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \cong H_*(M), \quad \text{pour } k < \infty,$$

et

$$\mathbb{Z}[c_{4(n+1)}, \dots, c_{4l}, \dots] \otimes_{\mathbb{Z}} H_*(N) \cong H_*(M), \quad \text{si } k = \infty.$$

Démonstration. — Le cas où $k < \infty$ est obtenu par récurrence à l'aide de la proposition 1.6. Pour $k = \infty$, on utilise le fait que M est la limite inductive de ses sous-groupes différentiels $M_p = W(p) \otimes_{W(n)} N$ ($p \geq n$). \square

COROLLAIRE. — On a : $H_*(W(k)) = \mathbb{F}_2[c_2, c_8, \dots, c_{4k}]$
 $H_*(W) = \mathbb{F}_2[c_2, c_8, \dots, c_{4k}, \dots].$

Démonstration. — Il suffit de poser $N = W(1)$ et d'utiliser 1.4. \square

Notons que le calcul de $H_*(W)$ est fait également dans [1].

Remarque. — L'isomorphisme de la proposition peut maintenant s'écrire :

$$H_*(M) \cong H_*(W(k)) \otimes_{H_*(W(n))} H_*(N),$$

où la structure de $H_*(W(n))$ -module dans $H_*(W(k))$ est donnée par l'inclusion canonique $W(n) \hookrightarrow W(k)$.

(1.8) Rappelons qu'un A -module est dit *cohérent* s'il est de type fini et si tout sous-module de type fini est de présentation finie (cf. [4], [5]). L'anneau A est dit *cohérent* si le A -module à gauche A est cohérent.

Par exemple, tout anneau noethérien est cohérent.

PROPOSITION (cf. [5]). — Soit k un anneau commutatif noethérien. Alors, l'anneau de polynômes $k[Z_1, \dots, Z_l, \dots]$ est cohérent. \square

Soit M un A -module cohérent. Il est clair que tout sous-module de type fini de M est cohérent. Le quotient de M par un sous-module de type fini est encore cohérent. Plus généralement, on a :

LEMME (cf. [4], [5]). — Si dans un triangle exact $M \rightarrow N$ deux des modules sont cohérents, le troisième l'est aussi.

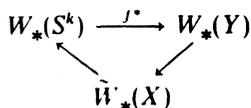


Si l'anneau A est cohérent, un A -module est cohérent si et seulement s'il est de présentation finie. En particulier, un A -module libre de rang fini est cohérent.

(1.9) Il découle de 1.3 et 1.8 que l'anneau W est cohérent. Plus généralement, on a :

PROPOSITION. — Si X est un complexe cellulaire fini, $W_*(X)$ est un W -module cohérent.

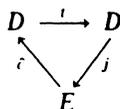
Démonstration (cf. [5]). — Le module $W_*(S^k)$ est libre de rang 2, donc cohérent. Si Y est tel que le module $W_*(Y)$ est cohérent, et si X est le cône d'une application $f: S^k \rightarrow Y$, le triangle exact



et le lemme 1.8 montrent que $\tilde{W}_*(X)$, et donc $W_*(X)$, sont cohérents. On obtient ainsi une preuve par récurrence. \square

(1.10) Les principaux résultats de cet article sont purement algébriques et sont valables pour tout « couple exact cohérent ».

DÉFINITION 1. — On appellera couple exact un triangle exact $\mathcal{D} = (D, E, j, \hat{c})$:



dans lequel :

- a) D est un Ω^{SU} -module gradué ;
- b) E est un W -module gradué ;
- c) t est la multiplication par l'élément non-nul de Ω_1^{SU} ;
- d) \hat{c} et j sont respectivement de degré -2 et 0 et satisfont aux relations suivantes : $j(s.m) = j(s)j(m)$, $\hat{c}(j(s).e) = s.\hat{c}e$, $\hat{c}(w.j(m)) = \hat{c}w.m$, où $s \in \Omega^{SU}$, $w \in W$, $m \in D$, $e \in E$;

e) la différentielle $d=j\partial$ est telle que $d^2=0$ et $d(w.e)=dw.e+\bar{w}.de$ pour $w \in W, e \in E$ (formule de Leibnitz).

Remarque. — Les deux premières relations (d) montrent que si l'on considère E comme Ω^{SU} -module via $j: \Omega^{SU} \rightarrow W$, les morphismes du couple exact sont des morphismes de Ω^{SU} -modules.

DÉFINITION 2. — On dira que le couple exact $\mathcal{D}=(D, E, j, \partial)$ est cohérent, si le W -module E est cohérent.

Par exemple, si X est un complexe cellulaire fini, le couple $\mathcal{S}(X)$ de 1.1 est cohérent, en vertu de 1.9.

(1.11) Soit $\mathcal{D}=(D, E, j, \partial)$ un couple exact. Considérons le couple dérivé \mathcal{D}' :

$$\begin{array}{ccc} tD & \xrightarrow{t} & tD \\ \swarrow i & & \searrow j \\ & H_*(E) & \end{array}$$

Comme E est un W -module différentiel, $H_*(E)$ est canoniquement un $H_*(W)$ -module gradué (cf. 1.4).

Le sous-groupe $\partial W \subset \Omega^{SU}$ est un idéal, car si $s \in \Omega^{SU}$ et $w \in W$, on a : $s.\partial w = \partial(j(s).w)$. Posons $\Lambda = \Omega^{SU}/\partial W$. Comme $t\partial = 0$, le groupe tD est canoniquement un Λ -module gradué. Par ailleurs, $j(\partial w) = dw$, donc ∂w opère trivialement sur $H_*(E)$, et par suite $H_*(E)$ est également un Λ -module. Nous allons étudier les propriétés de cohérence des Λ -modules qui composent \mathcal{D}' .

(1.12) Comme on vient de voir, $H_*(E)$ est à la fois un $H_*(W)$ -module et un Λ -module. Les deux structures sont liées par l'homomorphisme $j_1: \Lambda \rightarrow H_*(W)$ induit par $j: \Omega^{SU} \rightarrow W$. Soit $\bar{H}_*(W)$ l'image de j_1 . C'est l'ensemble des classes de $H_*(W)$ qu'on peut représenter par une classe de SU -bordisme.

PROPOSITION ([1]. cf. [6]. chap. X).

$$H_*(W) = \bigoplus_{k \geq 0} H_{8k}(W).$$

Démonstration. — Considérons le couple \mathcal{S}' dérivé de \mathcal{S} :

$$\begin{array}{ccc} t\Omega^{SU} & \xrightarrow{t} & t\Omega^{SU} \\ \swarrow i & & \searrow j \\ & H_*(W) & \end{array}$$

Sa différentielle $d' = j'\partial'$ est de degré -3 . Elle est donc nulle en vertu de 1.7. Donc $H_*(H_*(W), d') = H_*(W)$. Par ailleurs, $t^3 = 0$ ([1], [6], chap. X). Donc, d'une part, le couple \mathcal{S}'' dérivé de \mathcal{S}' se réduit à une suite de suites exactes courtes

$$0 \rightarrow t^2\Omega_{4n}^{SU} \xrightarrow{j''} H_{4n}(W) \xrightarrow{d''} t^2\Omega_{4n-4}^{SU} \rightarrow 0,$$

et, d'autre part, le couple \mathcal{S}''' dérivé de \mathcal{S}'' est nul, donc $H_*(H_*(W), d'') = 0$, et, comme $d'' = j''\partial''$ est de degré -4 , on a une suite exacte infinie :

$$\dots \rightarrow H_{4n}(W) \xrightarrow{d''} H_{4n-4}(W) \xrightarrow{d''} H_{4n-8}(W) \xrightarrow{d''} H_{4n-12}(W) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, le corollaire 1.7 montre que $H_{8k+4}(W)$ et $H_{8k}(W)$ ($k \geq 0$) sont des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de même dimension. Par récurrence, on obtient alors que $d'' : H_{4n}(W) \rightarrow H_{4n-4}(W)$ est nul pour n pair, et bijectif pour n impair. Comme $j'' : t^2\Omega_{4n}^{SU} \rightarrow H_{4n}(W)$ est injectif et $d'' = j''\partial''$, il s'ensuit que j'' est bijectif pour n pair et nul pour n impair.

Pour terminer la preuve, il reste à remarquer que, par définition de j'' , $\text{im } j'' = \text{im } j_1$. \square

COROLLAIRE. — $\bar{H}_*(W) = \mathbb{F}_2[c_2^2, c_8, c_{12}, \dots]$.

(1.13) Nous pouvons maintenant déterminer Λ .

PROPOSITION. — Il existe un isomorphisme d'anneaux gradués

$$\Lambda \cong \bar{H}_*(W)[t_0]/(t_0^2),$$

où t_0 est l'image de t dans Λ .

Démonstration. — Comme $t^3 = 0$, on a $t^2 \in \partial W$, donc $t_0^2 = 0$. Il suffira alors de prouver qu'il existe dans Λ un sous-anneau gradué $\bar{\Lambda}$ isomorphe à $\bar{H}_*(W)$ et tel que $\Lambda = \bar{\Lambda} \oplus t_0\bar{\Lambda}$.

Posons $\bar{\Lambda} = \bigoplus_k \dots \Lambda_{8k}$. Comme $\bar{H}_*(W) = \bigoplus H_{8k}(W)$, et comme l'homomorphisme $j_1 : \Lambda \rightarrow H_*(W)$ est surjectif, la restriction de j_1 à $\bar{\Lambda}$ est surjective.

Considérons alors $\ker j_1$. La multiplication par t induit un isomorphisme $T : \Lambda \xrightarrow{\sim} t\Omega^{SU}$ de degré $+1$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{t} & t\Omega^{SU} \\ \searrow j_1 & & \swarrow j_1 \\ & & H_*(W) \end{array}$$

est commutatif. Le noyau de j_1 est $t^2\Omega^{SU}$. Or, d'après 1.12, on a un isomorphisme $j'' : t^2\Omega^{SU} \xrightarrow{\sim} H_*(W) = \bigoplus H_{8k}(W)$, qui montre que $t^2\Omega^{SU} = \bigoplus t^2\Omega_{8k}^{SU}$.

Donc

$$\ker j_1 = T^{-1}(t^2\Omega^{SU}) = \bigoplus t_0\Lambda_{8k} = t_0\bar{\Lambda}.$$

En particulier, la restriction de j_1 à $\bar{\Lambda}$ est injective, donc bijective, et on a : $\Lambda = \bar{\Lambda} \oplus t_0\bar{\Lambda}$. \square

COROLLAIRE. — a) L'anneau Λ est cohérent ;

b) Le Λ -module $H_*(W)$ est cohérent.

Démonstration. — a) découle de la proposition 1.8, car

$$\Lambda \cong \bar{H}_*(W)[t_0]/(t_0^2) \cong k[c_2^2, c_8, c_{12}, \dots],$$

où $k = \mathbb{F}_2[t_0]/(t_0^2)$ est noethérien.

Pour prouver (b), notons que $\bar{H}_*(W)$ est le quotient de Λ par un idéal de type fini. C'est donc un Λ -module cohérent. D'autre part,

$$H_*(W) \cong \bar{H}_*(W) \oplus c_2\bar{H}(W)$$

comme Λ -modules. Donc $H_*(W)$ est un Λ -module cohérent. \square

(1.14) La proposition suivante permet de réduire l'étude des W -modules différentiels cohérents à celle des $W(n)$ -modules différentiels noethériens ($n < \infty$).

PROPOSITION. — Soit E un W -module différentiel cohérent. Alors, il existe un $n < \infty$ et un $W(n)$ -sous-module différentiel noethérien E_0 de E tel que l'application canonique $W \otimes_{W(n)} E_0 \rightarrow E$ soit un isomorphisme de W -modules différentiels.

Démonstration. — Comme E est de type fini sur W , on peut trouver une famille finie de générateurs homogènes $e_1, \dots, e_k \in E$. Prenons un W -module gradué libre F engendré par une base $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$, où $\deg u_i = \deg e_i$, $\deg v_i = \deg u_i - 2$ ($1 \leq i \leq k$). Les formules

$$d(w.u_i) = dw.u_i + \bar{w}.v_i$$

$$d(w.v_i) = dw.v_i$$

transforment F en un W -module différentiel. Soit $\pi : F \rightarrow E$ l'unique morphisme de W -modules tel que $\pi(u_i) = e_i$, $\pi(v_i) = de_i$ ($1 \leq i \leq k$). Il est clair que π est un morphisme de modules différentiels, i. e. $d\pi = \pi d$.

Comme E est de présentation finie, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{d} F \xrightarrow{\pi} E \rightarrow 0.$$

où R est un sous-module différentiel de F de type fini. Soit $S \subset R$ un ensemble fini de générateurs de R . Écrivons, pour tout $s \in S$:

$$s = \sum w_i(s)u_i + \sum w'_i(s)v_i \quad (w_i, w'_i \in W).$$

Alors pour un $n < \infty$, on a : $w_i(s), w'_i(s) \in W(n)$ pour tous i et s . Soit R_0 le $W(n)$ -sous-module de R engendré par l'ensemble fini $S \cup dS$, et soit $F_0 \subset F$ le $W(n)$ -module libre engendré par $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$. Il est clair que R_0 et F_0 sont des $W(n)$ -modules différentiels, et comme $S \cup dS \subset F_0$, on a $R_0 \subset F_0$. Il existe donc une suite exacte

$$0 \rightarrow R_0 \xrightarrow{dq} F_0 \rightarrow E_0 \rightarrow 0,$$

où E_0 est un $W(n)$ -module différentiel de type fini, donc noethérien, puisque l'anneau $W(n)$ est noethérien.

On a ensuite un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & W \otimes_{W(n)} R_0 & \rightarrow & W \otimes_{W(n)} F_0 & \rightarrow & W \otimes_{W(n)} E_0 \rightarrow 0 \\ & & \varphi_R \downarrow & & \varphi_F \downarrow & & \varphi_E \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les deux lignes horizontales sont exactes (car W est un $W(n)$ -module libre), et où le morphisme φ_R est surjectif, alors que φ_F est bijectif. Il en découle que φ_E est bijectif. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que E_0 est canoniquement plongé dans $W \otimes_{W(n)} E_0$, donc aussi dans E .

(1.15) Passons au module dérivé.

PROPOSITION. — Soit E un W -module différentiel cohérent. Alors, $H_*(E)$ est un $H_*(W)$ -module cohérent.

Démonstration. — Écrivons, comme dans 1.14. $E = W \otimes_{W(n)} E_0$, où E_0 est un $W(n)$ -module différentiel noethérien. Soit $C(n) \subset W(n)$ le sous-anneau engendré par les cycles x_1^2 , et $x_{2k-1}, x_{2k}, \bar{x}_{2k} (2 \leq k \leq n)$ (cf. 1.4, 1.6). La formule de Leibnitz montre que tout élément de $C(n)$ est un cycle et que la différentielle $d : E_0 \rightarrow E_0$ est un morphisme de $C(n)$ -modules.

Par ailleurs, on a : $x_{2k} \bar{x}_{2k} = x_{2k}^2 - x_1 x_{2k-1} x_{2k}$. On en déduit facilement que $C(n) = \mathbb{Z}[x_1^2, x_3, x_4 \bar{x}_4, x_5, \dots, x_{2n} \bar{x}_{2n}]$. C'est donc un anneau noethérien. De plus, $W(n)$ est un $C(n)$ -module libre de rang fini (avec pour base les monômes $x_1^{i_1} x_4^{i_4} \dots x_{2n}^{i_{2n}}$, où $0 \leq i_i \leq 1$). Donc, E_0 est de type fini sur $C(n)$, donc un $C(n)$ -module noethérien. Comme la projection $C(n) \rightarrow H_*(W(n))$

est surjective (cf. 1.7), $H_*(E_0)$ est de type fini sur l'anneau noethérien $H_*(W(n))$, donc aussi de présentation finie sur $H_*(W(n))$. Le $H_*(W(n))$ -module $H_*(W)$ est libre. Il résulte que $H_*(W) \otimes_{H_*(W(n))} H_*(E_0)$ est de présentation finie sur l'anneau cohérent $H_*(W)$. C'est donc un $H_*(W)$ -module cohérent (cf. 1.8). Il reste à remarquer que ce module est isomorphe à $H_*(E)$ (cf. 1.7). \square

(1.16) Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME. — Soit $\mathcal{D} = (D, E, j, \partial)$ un couple exact cohérent. Alors, dans le couple dérivé \mathcal{D}' , tD et $H_*(E)$ sont des Λ -modules cohérents.

Démonstration. — Commençons par $H_*(E)$. Nous venons de voir que c'est un $H_*(W)$ -module cohérent. Soit $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow H_*(E) \rightarrow 0$ une présentation finie sur $H_*(W)$. Comme F est un $H_*(W)$ -module libre, il est un Λ -module cohérent, en vertu du corollaire 1.13 (b). Le module R est de type fini, il est donc aussi de type fini sur Λ , puisque $H_*(W)$ est de type fini sur Λ (engendré par 1 et c_2). D'après 1.7, cela entraîne que $H_*(E)$ est un Λ -module cohérent.

Dans le couple \mathcal{D}'' dérivé de \mathcal{D}' , on a :

$$E'' = H_*(E', d') = H_*(H_*(E), d').$$

Comme d' commute avec l'action de Λ (cf. 1.11), E'' est aussi un Λ -module cohérent.

Le couple \mathcal{D}'' se réduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow t^2D \xrightarrow{j''} E'' \xrightarrow{\partial''} t^2D \rightarrow 0.$$

Comme E'' est cohérent, t^2D est de type fini, donc, puisque j'' est injectif, t^2D est un Λ -module cohérent.

Considérons alors la suite exacte de Λ -modules :

$$tD \xrightarrow{j'} H_*(E) \xrightarrow{\partial'} tD \xrightarrow{\partial''} t^2D \rightarrow 0$$

extraite du couple \mathcal{D}' . Comme t^2D et $H_*(E)$ sont de type fini, il en est de même pour tD . Donc coker j' est cohérent (cf. 1.8). La suite exacte

$$0 \rightarrow \text{coker } j'' \rightarrow tD \xrightarrow{\partial''} t^2D \rightarrow 0$$

montre alors que tD est un Λ -module cohérent. \square

COROLLAIRE. — Si X est un complexe cellulaire fini, le Ω^{SU} -module $t\Omega_*^{SU}(X)$ est de type fini. \square

Par exemple, si $H_*(X; \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion, on démontre, à l'aide de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch, que $W_*(X)$ n'a pas de torsion. Il découle que $\text{Tor } \Omega_*^{SU}(X) = t\Omega_*^{SU}(X)$ est de type fini sur Ω^{SU} .

(1.17) Voici, pour terminer ce paragraphe, une démonstration de la proposition citée dans l'introduction :

PROPOSITION. — *Le Ω^{SU} -module $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ est de type infini.*

Démonstration. — On sait (cf. [6], chap. X) qu'il existe un isomorphisme de Ω^{SU} -modules $W \cong \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré +2. Si W était de type fini, il en serait de même pour l'idéal $\partial W \subset \Omega^{SU}$. Si $s_{2n} : \Omega_{2n}^{SU} \rightarrow \mathbb{Z}$ est le nombre de Chern correspondant au polynôme Σt_i^n , on aurait alors $s_{2n}((\partial W)_{2n}) = 0$ pour n suffisamment grand. Comme tous les éléments de $\Lambda = \Omega^{SU}/\partial W$ sont d'ordre 2, on aurait aussi $s_{2n}(\Omega_{2n}^{SU}) = 0$ pour n suffisamment grand, ce qui est faux (cf. [6], chap. X). \square

2. Couples exacts projectifs

(2.1) Soient $\mathcal{Q}_\alpha = (D_\alpha, E_\alpha, j_\alpha, \hat{c}_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) des couples exacts. On appelle *morphisme* $\varphi : \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ une paire (f, g) , où $f : D_1 \rightarrow D_2$ est un morphisme homogène de Ω^{SU} -modules gradués, $g : E_1 \rightarrow E_2$ est un morphisme homogène de W -modules gradués, de même degré, et

$$g j_1 = j_2 f, \quad f \hat{c}_1 = \hat{c}_2 g.$$

On notera ∇ la catégorie des couples exacts cohérents et leurs morphismes. Il est clair que ∇ est une catégorie additive, avec le couple $(0, 0, 0, 0)$ pour objet nul. On verra plus loin que ce n'est pas une catégorie abélienne (cf. 2.6).

Si $\varphi : \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ est un morphisme de ∇ , notons $\ker \varphi$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \xrightarrow{f} & \ker f \\ & \searrow & \swarrow \\ & \ker g & \end{array}$$

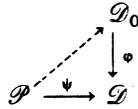
dont les morphismes sont induits par ceux de \mathcal{Q}_1 . Cet objet possède toutes les propriétés des couples exacts cohérents (cf. 1.10) à l'exception, peut-être, de l'exactitude. Notons $\tilde{\nabla}$ la catégorie de tels objets.

On dira que φ est un morphisme *injectif*, si $\ker \varphi = 0$. Il est clair que tout morphisme injectif de ∇ est un monomorphisme. La réciproque est également vraie (cf. 2.6).

De la même manière, on définit un objet coker φ de \tilde{V} et les morphismes surjectifs. Une vérification simple donne :

PROPOSITION. — Si φ est un morphisme surjectif (resp. injectif), $\ker \varphi$ (resp. coker φ) est un couple exact cohérent. \square

(2.2) Soit \mathcal{P} un couple exact cohérent. On dira que \mathcal{P} est projectif, si tout diagramme



de \tilde{V} , où φ est un morphisme surjectif, peut être complété par un morphisme $\bar{\psi} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}_0$ tel que $\varphi \bar{\psi} = \psi$. Voici l'exemple le plus simple d'objet projectif :

PROPOSITION. — Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(pt)$ le couple-base de 1.1, et soit \mathcal{D} un couple de \tilde{V} . Pour tout morphisme homogène $f : \Omega^{SU} \rightarrow D$ de Ω^{SU} -modules gradués, il existe un unique morphisme $(f, g) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$.

Démonstration. — Soit $m = f(1)$. C'est un élément homogène de D qui détermine entièrement f . Si $(f, g) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}$ est un morphisme, on a, pour $w \in W$:

$$g(w) = w \cdot g(1) = w \cdot gj(1) = w \cdot j(m).$$

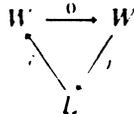
Donc g est également déterminé par m . Ceci prouve l'unicité.

Inversement, la formule $g(w) = w \cdot j(m)$ définit un morphisme homogène $g : W \rightarrow E$, et il est facile de voir que (f, g) est un morphisme de \tilde{V} . \square

COROLLAIRE. — \mathcal{S} est un couple exact projectif. \square

(2.3) Le deuxième exemple de couple exact projectif est $\tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$, noyau du morphisme $\mathcal{S}(P_2(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{S}$ induit par la projection $P_2(\mathbb{C}) \rightarrow pt$. On va d'abord introduire de manière formelle un couple exact \mathcal{I} , en étudiant les propriétés, puis démontrer qu'il est isomorphe à $\tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$.

Soit \mathcal{I} le diagramme :



où L est un W -module libre ayant deux générateurs p et q de degré 2 et 0 respectivement, et où j et ∂ sont définis par :

$$\begin{aligned} j(w) &= dw \cdot p + \bar{w} \cdot q \\ \partial(w \cdot p + v \cdot q) &= w + dv \quad (w, v \in W). \end{aligned}$$

PROPOSITION. — \mathcal{I} est un couple exact cohérent.

Démonstration. — Calcul direct. \square

(2.4) Comme \mathcal{S} , le couple \mathcal{I} possède une propriété universelle :

PROPOSITION. — Soit \mathcal{Q} un couple de \tilde{V} . Pour tout morphisme homogène $g : L \rightarrow E$ de W -modules différentiels, il existe un unique morphisme $(f, g) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q}$.

Démonstration. — On a dans $\mathcal{I} : \partial(w \cdot p) = w$. Donc, si $(f, g) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Q}$ est un morphisme de \tilde{V} , on doit avoir :

$$f(w) = f \hat{c}(w \cdot p) = \hat{c}g(w \cdot p),$$

ce qui prouve l'unicité. Inversement, la formule $f(w) = \hat{c}g(w \cdot p)$ définit un morphisme homogène $f : W \rightarrow D$ de Ω^{SU} -modules, et on vérifie, par un calcul direct, que (f, g) est un morphisme de \tilde{V} . \square

Remarque. — Si E est un W -module différentiel, tout morphisme $g : L \rightarrow E$ de modules différentiels est déterminé par sa valeur sur $p \in L$. De plus, quel que soit l'élément homogène $e \in E$, la formule

$$g(w \cdot p + v \cdot q) = w \cdot e + v \cdot de$$

définit un morphisme de modules différentiels tel que $g(p) = e$. Il en découle :

COROLLAIRE. — \mathcal{I} est un couple exact projectif. \square

(2.5) Nous pouvons maintenant identifier les couples \mathcal{I} et $\tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$.

PROPOSITION. — Il existe un isomorphisme $\mathcal{I} \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré +2.

Démonstration. — Le couple $\tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ est de la forme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{i} & \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) \\ & \searrow j & \swarrow i \\ & \tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})) & \end{array}$$

Le W -module $\tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C}))$ est libre de rang 2 ayant une base (x, y) , $\deg x = 4$,

deg $y=2$. Pour le voir, on peut, par exemple, utiliser la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch.

Par ailleurs, $\tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) \cong W$. Donc $t=0$ dans $\tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$, et par conséquent $H_*(\tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})))=0$. Pour des raisons de dimension, on a : $dy=0$. Il existe donc un $z \in \tilde{W}_4(P_2(\mathbb{C}))$ tel que $dz=y$. Écrivons $z=\lambda x_1 \cdot y + \mu x$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$). Alors, $y=dz=2\lambda y + \mu dx$. Il en découle que dx est un multiple impair de y , mettons $dx=(2v+1)y$ ($v \in \mathbb{Z}$). Alors, si $x'=x-vx_1 \cdot y$, on a $dx'=y$, et d'autre part, (x', y) est encore une base du W -module $W_*(P_2(\mathbb{C}))$.

D'après 2.4, il existe un unique morphisme $(f, g) : \mathcal{S} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}(P_2(\mathbb{C}))$ de degré +2 tel que $g(p)=x', g(q)=y$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{j} & \tilde{W}_*(P_2(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\hat{c}} & \tilde{\Omega}_*^{SU}(P_2(\mathbb{C})) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow f \cong & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & L & \longrightarrow & W \longrightarrow 0
 \end{array}$$

montre alors que f est bijectif. \square

(2.6) Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent. On dira que \mathcal{D} est libre s'il est une somme finie de couples isomorphes à \mathcal{S} ou \mathcal{S} . Il est clair que tout couple libre est projectif. La proposition suivante montre qu'il y a « à peine assez » d'objets libres dans $\tilde{\nabla}$.

PROPOSITION. — Soit \mathcal{D} un objet non-nul de $\tilde{\nabla}$. Alors, il existe un objet libre \mathcal{D}_0 et un morphisme non-nul $\varphi : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$.

Démonstration. — Si $D \neq 0$, on peut prendre $\mathcal{D}_0 = \mathcal{S}$ et utiliser la proposition 2.2. Si $E \neq 0$, on pose $\mathcal{D}_0 = \mathcal{S}$ et on applique 2.4. \square

COROLLAIRE 1. — Tout monomorphisme de ∇ est injectif.

Démonstration. — Soit $\psi : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un morphisme non-injectif de ∇ , et soit $\mathcal{D} = \ker \psi \in \tilde{\nabla}$. D'après la proposition, il existe un morphisme non-nul $\varphi : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ de $\tilde{\nabla}$, où $\mathcal{D}_0 \in \nabla$. Alors, si $\varphi_1 : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}_1$ est le morphisme composé de φ et du morphisme canonique $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1$, on a : $\psi\varphi_1=0$ et $\varphi_1 \neq 0$. Donc, ψ n'est pas un monomorphisme. \square

COROLLAIRE 2. — La catégorie ∇ n'est pas abélienne.

Démonstration. — Supposons ∇ abélienne. Alors, le morphisme $\varphi=(2, 2) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ a un noyau $i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}$ dans ∇ . On a $\varphi i=0$ et i est un monomorphisme, donc un morphisme injectif. Il en résulte que i est composé d'injections $D \subset \ker(2 : \Omega^{SU} \rightarrow \Omega^{SU}) = t\Omega^{SU}$ et $E \subset \ker(2 : W \rightarrow W) = 0$. Donc

$E=0$, d'où $\mathcal{D}=0$ (car $t^3=0$). Ainsi φ est un monomorphisme, donc injectif ; or, nous venons de voir que $\ker \varphi \neq 0$. \square

(2.7) La proposition suivante montre que la catégorie ∇ a « assez d'objets libres » :

PROPOSITION. — Si \mathcal{D} est un couple exact cohérent, il existe un couple cohérent libre \mathcal{D}_0 et un morphisme surjectif $\varphi : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$.

Démonstration. — Comme \mathcal{D} est cohérent, E est un W -module de type fini. A l'aide de la proposition 2.4 et de la remarque qui la suit, on trouve d'abord un couple exact libre $\mathcal{L}_1=(D_1, E_1, j_1, \partial_1)$ isomorphe à une somme directe de couples isomorphes à \mathcal{L} , et un morphisme $\psi_1=(f_1, g_1) : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{D}$ de degré 0, où $g_1 : E_1 \rightarrow E$ est un morphisme surjectif.

De même, le théorème 1.16 dit que tD est un Λ -module cohérent. En particulier, tD est un Ω^{su} -module de type fini. A l'aide de 2.2, on construit alors un couple exact libre $\mathcal{L}_2=(D_2, E_2, j_2, \partial_2)$ isomorphe à une somme directe de couples exacts isomorphes à \mathcal{L} , et un morphisme $\psi_2=(f_2, g_2) : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{D}$ de degré 0, tel que $f_2 : tD_2 \rightarrow tD$ soit surjectif.

Posons $\mathcal{D}_0 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ et $\varphi = \psi_1 + \psi_2$. Par définition, \mathcal{D}_0 est un couple exact libre, et il reste à démontrer que φ est surjectif. Or, $g_1 + g_2 : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E$ est surjectif puisque g_1 l'est. Par ailleurs, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \partial(E_1 \oplus E_2) & \rightarrow & D_1 \oplus D_2 & \xrightarrow{t} & t(D_1 \oplus D_2) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 + f_2 & & \downarrow f_1 + f_2 & & \downarrow f_1 \cdot f_2 \\
 0 & \longrightarrow & \partial E & \longrightarrow & D & \xrightarrow{t} & tD \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dont les lignes horizontales sont exactes. Comme $\partial(g_1 + g_2) = (f_1 + f_2)\partial$, le morphisme $f_1 + f_2 : \partial(E_1 \oplus E_2) \rightarrow \partial E$ est surjectif. De même, le morphisme $f_1 + f_2 : t(D_1 \oplus D_2) = tD_2 \rightarrow tD$ est surjectif. Donc, $f_1 + f_2 : D_1 \oplus D_2 \rightarrow D$ est surjectif. \square

Remarque. — Pour le couple construit \mathcal{D}_0 , on a : $tD_0 = tD_2$. On peut donc préciser l'énoncé de la proposition comme suit : Pour tout morphisme surjectif $f : M \rightarrow tD$ de Λ -modules, où M est un Λ -module libre de rang fini, il existe un couple exact libre \mathcal{D}_0 et un morphisme surjectif $\varphi : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ tels que $tD_0 = M$ et que le morphisme correspondant $tD_0 \rightarrow tD$ coïncide avec f .

COROLLAIRE. — Si X est un complexe cellulaire fini, il existe une surjec-

tion $D \rightarrow \Omega_*^{SU}(X)$, où D est une somme directe finie de modules isomorphes à Ω^{SU} ou W . \square

(2.8) Nous verrons plus loin que tout couple exact projectif est libre. Ce résultat a un analogue dans la catégorie des modules gradués : Soit k un anneau principal, R une k -algèbre positivement graduée connexe et M un R -module gradué. On notera $Q^R(M)$ le k -module gradué $k \otimes_R M$, où k est considéré comme R -module via l'augmentation canonique $R \rightarrow k$.

LEMME (cf. [3], chap. VII ; [2]). — Si le R -module M est projectif, alors :

- a) le k -module $Q^R(M)$ est libre ;
- b) le R -module M est libre ; plus précisément, si a_i ($i \in I$) sont des éléments de M tels que les éléments $1 \otimes a_i$ forment une base de $Q^R(M)$ sur k , les a_i ($i \in I$) forment une base de M sur R . \square

PROPOSITION. — Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent, tel que :

- i) tD est un Λ -module libre ;
- ii) E est un W -module libre.

Alors D est un couple exact libre.

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur

$$r(\mathcal{D}) = rg_\Lambda tD + rg_W E.$$

Si $r(\mathcal{D}) = 0$, on a $\mathcal{D} = 0$, et il n'y a rien à démontrer. Prenons donc un couple exact $\mathcal{D} \neq 0$ satisfaisant aux conditions (i) et (ii) et supposons la proposition vérifiée pour les couples \mathcal{D}_1 , tels que $r(\mathcal{D}_1) < r(\mathcal{D})$.

Soit v la première dimension telle que $E_v \neq 0$. Alors $t : D_{i-1} \rightarrow D_i$ est une surjection pour $i < v$, et, comme $t^3 = 0$, $D_i = 0$ pour $i < v$. De plus, la suite exacte

$$D_{v-1} \xrightarrow{t} D_v \xrightarrow{j} E_v \xrightarrow{t} D_{v-2}$$

montre que $j : D_v \rightarrow E_v$ est un isomorphisme.

Deux cas sont possibles :

(1) $tD_v \neq 0$. Alors $Q^\wedge(tD)_{v+1} \cong tD_v$ est un espace vectoriel non-nul sur \mathbb{F}_2 . D'autre part, $Q^W(E)_v \cong E_v \cong D_v$ est un groupe abélien libre, et on a une surjection :

$$Q^W(E)_v \xrightarrow{t} Q^\wedge(tD)_{v+1}.$$

Il est alors facile de trouver un $a \in D_v$ tel que :

- a) $0 \neq ta \in Q^\wedge(tD)_{v+1}$;

b) $j(a) \in Q^W(E)_v$ engendre un facteur direct.

En incluant ta et $j(a)$ dans les bases de $Q^\wedge(tD)$ et $Q^W(E)$ respectivement, on déduit du lemme que :

a) ta engendre un facteur direct libre du Λ -module libre tD ;

b) $j(a)$ engendre un facteur direct libre du W -module libre E .

Selon 2.2, il existe un unique morphisme $\varphi = (f, g) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que $f(1) = a$. Comme $g(1) = gj(1) = jf(1) = j(a)$, le morphisme $g : W \rightarrow E$ est injectif. Par ailleurs, si $\lambda \in \Omega^{Su}$ et $f(\lambda) = 0$, on a : $0 = jf(\lambda) = gj(\lambda)$. Donc $j(\lambda) = 0$ et $\lambda = t\omega$, avec $\omega \in \Omega^{Su}$. Alors :

$$0 = f(\lambda) = t\omega f(1) = t\omega a = \omega \cdot (ta).$$

Il en découle que $\omega = 0$ dans Λ , donc $\lambda = t\omega = 0$. Ceci prouve l'injectivité de f , et par suite, de φ .

Soit $\mathcal{D}_1 = \text{coker } \varphi \in \nabla$. Il est clair que \mathcal{D}_1 satisfait aux conditions (i) et (ii) et que $r(\mathcal{D}_1) < r(\mathcal{D})$. Donc, par hypothèse, \mathcal{D}_1 est libre et *a fortiori* projectif. Il résulte que $\mathcal{D} \cong \text{im } \varphi \oplus \mathcal{D}_1$ est un couple exact libre.

(2) $tD_v = 0$. Alors $\partial : E_{v+2} \rightarrow D_v$ et, par suite, $d : E_{v+2} \rightarrow E_v$ sont surjectifs. Comme E est un W -module libre, $Q^W(E)$ est un \mathbb{Z} -module libre. En particulier, il existe un scindage $E \cong W^+ \cdot E \oplus Q^W(E)$ de la projection canonique $E \rightarrow Q^W(E)$, où $W^+ = \sum_{i>0} W_i$.

En dimension v , on a : $Q^W(E)_v = E_v$.

En dimension $v+2$, on a : $E_{v+2} = x_1 \cdot E_v \oplus Q^W(E)_{v+2}$.

Notons que $d(x_1 \cdot E_v) = 2E_v$. Comme d est surjectif, on a une surjection

$$d : Q^W(E)_{v+2} \rightarrow E_v \otimes \mathbb{F}_2$$

induite par d .

Prenons un $e_1 \neq 0$ dans $E_v \otimes \mathbb{F}_2$ et soit $e_2 \in E_{v+2}$ tel que $de_2 \otimes 1 = e_1$ et tel que $1 \otimes e_2 \in Q^W(E)_{v+2}$ engendre un facteur direct. Prenons ensuite un $e_3 \in E_v$, tel que $e_3 \otimes 1 = e_1$ dans $E_v \otimes \mathbb{F}_2$ et qui engendre un facteur direct. Alors $e_3 - de_2 \in 2E_v$. Donc, on peut trouver un $e \in E_{v+2}$ de la forme $e_2 + \lambda x_1 \cdot h$ ($h \in E_v, \lambda \in \mathbb{Z}$) tel que $de = e_3$. Comme $1 \otimes e = 1 \otimes e_2$ dans $Q^W(E)$, e et de engendrent un facteur direct libre de rang 2 de E sur W .

D'après la proposition 2.4, il existe un unique morphisme $\varphi = (f, g) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que $g(p) = e, g(q) = de$.

Le morphisme $g : L \rightarrow E$ est manifestement injectif. Si $w \in W$ est tel que $f(w) = 0$, on a aussi $gf(w) = 0$. Or, par définition de f (cf. 2.4) :

$$jf(w) = j\bar{c}(w \cdot e) = dw \cdot e + \bar{w} \cdot de.$$

Donc $\bar{w}=0$, d'où $w=0$. En résumé, $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$ est injectif. On achève la démonstration comme dans le cas (1). \square

(2.9) Voici maintenant le résultat principal de ce paragraphe :

THÉORÈME. — *Soit \mathcal{D} un couple exact cohérent. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) \mathcal{D} est un couple exact projectif ;
- b) \mathcal{D} est un couple exact libre ;
- c) tD est un Λ -module libre et E est un W -module libre.

Démonstration. — Nous avons déjà vu que (b) \Rightarrow (a) et (c) \Rightarrow (b) (cf. 2.8). Pour prouver (a) \Rightarrow (c), considérons un couple exact projectif \mathcal{D} . Il existe un couple exact libre \mathcal{D}_0 et un morphisme surjectif $\varphi : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ (cf. 2.7). Comme \mathcal{D} est projectif, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}_1$, où $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{V}$. En particulier, E est un facteur direct du W -module libre E_0 , alors que tD est un facteur direct du Λ -module libre tD_0 . Le lemme 2.8 montre alors que E est un W -module libre et que tD est un Λ -module libre. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CONNER (P. E.), FLOYD (E. E.). — Torsion in SU -bordism, *Mem. A.M.S.*, vol. 60, 1966.
- [2] CONNER (P. E.), SMITH (L.). — On the complex bordism of finite complexes, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 37, 1969, p. 117-212.
- [3] MAC LANE (S.). — *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
- [4] SERRE (J.-P.). — Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, vol. 61, 1955, p. 197-278.
- [5] SMITH (L.). — On the finite generation of $\Omega^{St}(X)$, *J. Math. Mech.*, vol. 18, 1969, p. 1017-1023.
- [6] STONG (R. E.). — *Notes on cobordism theory*, Princeton Univ. Press, 1968.