BULLETIN DE LA S. M. F.

SALOMON OFMAN

# $d'd''$ et $d''$-cohomologies d'une variété compacte privée d'un point. Application à l'intégration sur les cycles

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 113 (1985), p. 241-254

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__241_0>

*Bull. Soc. math. France,*
113, 1985, p. 241-254.

# $d'd''$ ET $d''$-COHOMOLOGIES D'UNE VARIÉTÉ COMPACTE PRIVÉE D'UN POINT. APPLICATION A L'INTÉGRATION SUR LES CYCLES

PAR

SALOMON OFMAN (*)

RÉSUMÉ. — Après [O2] et [O4], on continue ici l'étude de la $d'd''$-cohomologie. Cela permet de résoudre un problème d'Andreotti-Norguet : déterminer les formes différentielles $d''$-fermées avec singularité en un point, dont l'intégrale est nulle sur tout diviseur.

ABSTRACT. — After [O2] and [O4], we continue here the study of the $\partial\bar\partial$-cohomology. We use the results to solve a problem of Andreotti-Norguet: to precise the $\bar\partial$-closed differential forms with singularity on a point, whose integral on every divisor is zero.

## Introduction

Soit $Z$ une variété analytique complexe (lisse et connexe) de dimension complexe $n$, $\mathscr{A}^{r,s}$ (respectivement $\mathscr{H}$, $\mathcal{O}$, $\Omega^s$) le faisceau des germes de formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ de type $(r, s)$ (respectivement de fonctions pluriharmoniques, de fonctions holomorphes, de formes différentielles holomorphes de degré $s$) sur $Z$, $C_{n-1}(Y)$ l'espace des cycles analytiques compacts de dimension $(n-1)$ de $Y$ ouvert de $Z$. On note

$$V^{n-1,n-1}(Y)=\frac{\operatorname{Ker}(\mathscr{A}^{n-1,n-1}(Y)\xrightarrow{d'd''}\mathscr{A}^{n,n}(Y))}{d'\mathscr{A}^{n-2,n-1}(Y)\oplus d''\mathscr{A}^{n-1,n-2}(Y)}$$

(*) Texte reçu le 11 mai 1984, révisé le 20 mars 1985.

S. OFMAN, U.E.R. de Mathématique et Informatique, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05.

et

$$\Lambda^{n,n}(Y)=\frac{\mathscr{A}^{n,n}(Y)}{d'd''\,\mathscr{A}^{n-1,n-1}(Y)},$$

$$\Lambda_X^{n,n}(Z)=\frac{\mathscr{B}_X^{n,n}(Z)}{d'd''\,\mathscr{B}_X^{n-1,n-1}(Z)},$$

où $\mathscr{B}^{r,s}$ est le faisceau des germes d'hyperformes (formes différentielles à coefficients hyperfonctions) de type $(r, s)$ de $Z$ et $\mathscr{B}_X^{r,s}(Z)$ ses sections à support dans $X$. Ces groupes s'obtiennent aussi comme groupes de cohomologie de faisceau [O4], mais cette dernière propriété n'est pas indispensable pour la compréhension du présent mémoire.

Dans [A-N] est définie une application

$$\rho_0 : H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \to H^0(C_{n-1}(Y), \mathscr{O})$$

(respectivement $\tilde{\rho}_0 : V^{n-1,n-1}(Y) \to H^0(C_{n-1}(Y), \mathscr{H})$); si $Z$ est une variété algébrique projective et $Y$ le complémentaire d'un point $O$ de $Z$, il est montré que la suite

$$H^{n-1}(Y, \Omega^{n-2}) \xrightarrow{d} H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{\rho_0} H^0(C_{n-1}(Y), \mathscr{O}) \tag{1}$$

est exacte (resp. l'application $\tilde{\rho}_0$ est injective) modulo la classe des espaces vectoriels de dimension finie. Dans [O3] on montre que $\tilde{\rho}_0$ est en fait injective et on donne une condition suffisante pour que la suite (1) soit exacte.

Le but de cet article est de calculer sous des conditions générales le noyau de l'application naturelle : $H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \to V^{n-1,n-1}(Y)$ qui à une forme différentielle $d''$-fermée associe sa classe dans $V^{n-1,n-1}(Y)$.

Ce résultat, en fait indépendant du contexte ci-dessus, permet de montrer que la condition suffisante de [O3] est aussi nécessaire et, qu'en l'absence de toute condition, l'obstruction à l'exactitude de (1) est exactement un espace vectoriel isomorphe à $H^0(Z, \Omega^2)$. Le cas où $Z$ est une surface analytique est traité dans un premier chapitre. En effet d'une part la démonstration est plus simple et d'autre part les résultats sont plus généraux.

Remarquons enfin que [A-N] démontre en fait l'exactitude de (1) (resp. l'injectivité de $\tilde{\rho}_0$) modulo la classe des espaces vectoriels de dimension finie pour $Y$ complémentaire dans $Z$ d'une sous-variété $X$ intersection complète de codimension $q+1$ et que [O4] a précisé le noyau de $\tilde{\rho}_0$ dans ce même cas; on espère généraliser prochainement à cette situation les résultats du présent mémoire.

## Chapitre I
## Cas d'une surface analytique complexe (lisse et connexe)

(A) Soit $\dim_{\mathbb{C}} Z=2$, $O$ un point de $Z$, $Y=Z\setminus\{O\}$.

LEMME 1. — *Si $H^0(Z, \Omega^2)=0$ alors la suite*

$$(*)\qquad H^1(Y, \mathcal{O}) \xrightarrow{d} H^1(Y, \Omega^1) \xrightarrow{i} V^{1,1}(Y)$$

*est exacte.*

*Démonstration.* — Soit $\varphi\in\dot{\varphi}\in H^1(Y, \Omega^1)$; $i(\dot{\varphi})=0$ équivaut à $\varphi=d'\alpha+d''\beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ sur $Y$ resp. de type $\underline{(0,1)\ \text{et}\ (1,0);\ \text{alors}}$ $d''\alpha$ induit une classe dans $H^0(Y, \bar{\Omega}^2)=H^0(Y, \Omega^2)\cong H^0(Z, \Omega^2)=0$ d'où $d''\alpha=0$ et $\dot{\varphi}\in dH^1(Y, \mathcal{O})$.

PROPOSITION 1. — *Soit $Z$ une surface analytique complexe. La suite*

$$O\to H^2_{\{O\}}(Z, \mathcal{O}) \xrightarrow{d} H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^1) \xrightarrow{d} H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^2)$$

*est exacte.*

*Démonstration.* — Soient $\mathscr{Z}^i=\mathrm{Ker}\,[\Omega^i \xrightarrow{d} \Omega^{i+1}]$, $U$ un ouvert de $Z$ contenant $O$ isomorphe à un polydisque de $\mathbb{C}^2$, $V=U\setminus\{O\}$. Des suites exactes :

$$(1)\qquad O\to\mathbb{C}\to\mathcal{O}\to\mathscr{Z}^1\to O,$$

$$(2)\qquad O\to\mathscr{Z}^1\to\Omega^1\to\mathscr{Z}^2=\Omega^2\to O,$$

on tire l'exactitude de :

$$(3)\qquad O\to H^1(V, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} H^1(V, \mathscr{Z}^1)\to O,$$

$$(4)\qquad H^0(V,\Omega^1)\to H^0(V,\Omega^2)\to H^1(V, \mathscr{Z}^1)\to H^1(V, \Omega^1)\to H^1(V, \Omega^2).$$

De la commutativité de :

$$\begin{array}{ccc} H^1(V, \mathcal{O}) & & \\ {}^{d}\downarrow & \searrow^{d} & \\ H^1(V, \mathscr{Z}^1) & \rightarrow & H^1(V, \Omega^1) \end{array}$$

et de l'isomorphisme (3) on tire l'exactitude de :

$$(5)\qquad \begin{array}{c} H^0(V, \Omega^1) \xrightarrow{d_1} H^0(V, \Omega^2) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}) \xrightarrow{d_2} H^1(V, \Omega^1) \rightarrow H^1(V, \Omega^2), \\ H^0(V, \Omega^1) = H^0(U, \Omega^1) \quad \text{et} \quad H^0(V, \Omega^2) = H^0(U, \Omega^2); \end{array}$$

soit $\chi \in H^0(V, \Omega^2)$, $d\chi = O$ implique $\chi = d'\tilde{\chi}$ avec $d''\tilde{\chi} = O$ d'où $d_1$ est surjective autrement dit $d_2$ est injective.

La proposition résulte immédiatement de la commutativité de :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(V, \mathcal{O}) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H^2_{\{O\}}(U, \mathcal{O}) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H^2_{\{O\}}(Z, \mathcal{O}) \\ \downarrow^{d} & & \downarrow^{d} & & \downarrow^{d} \\ H^1(V, \Omega^1) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H^2_{\{O\}}(U, \Omega^1) & \overset{\cong}{\rightarrow} & H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^1). \end{array}$$

(B) On suppose désormais que $Z$ est compacte et a son premier nombre de Betti pair.

Soient $b^{i,j} = \dim_{\mathbb{C}} H^j(Z, \Omega^i)$, $b^p = \dim_{\mathbb{C}} H^p(Z, \mathbb{C})$ et $i$ l'application naturelle : $H^s(Y, \Omega^r) \rightarrow V^{r,s}(Y)$.

LEMME 2. — *On a les isomorphismes :* $V^{1,1}(Z) \cong H^1(Z, \Omega^1) \cong \Lambda^{1,1}(Z)$.

*Démonstration.* — (1) L'application $\tilde{j}: \Lambda^{1,1}(Z) \rightarrow \tilde{H}^{1,1}(Z)$ est surjective, $\tilde{H}^{1,1}(Z)$ étant le sous-espace de $H^2(Z, \mathbb{C})$ représentable par des formes différentielles de type $(1, 1)$ $d$-fermées. Mais $\tilde{H}^{1,1}(Z)$ s'identifie à $H^1(Z, \Omega^1)$ dans la décomposition de Hodge de $H^2(Z, \mathbb{C})$ [G] d'où $j: \Lambda^{1,1}(Z) \rightarrow H^1(Z, \Omega^1)$ est surjective. Elle est aussi injective :

$$\varphi^{1,1} = d\theta \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{1,1} = d(\alpha^{0,1} + \beta^{1,0}) = d'\alpha^{0,1} + d''\beta^{1,0}$$

et $d''\alpha^{0,1} = d'\beta^{1,0} = 0$

alors d'après la décomposition : $H^1(Z, \mathbb{C}) = H^0(Z, \Omega^1) \oplus H^1(Z, \mathcal{O})$ on a $\alpha^{0,1} + d''f = \chi^{0,1}$, $\beta^{1,0} + d'g = \zeta^{1,0}$,

avec

$$d'\chi = d''\chi = d'\zeta = d''\zeta = 0 \quad \text{d'où} \quad \varphi = d'd''(g - f).$$

Alors par dualité, on a

$$V^{1,1}(Z) \cong H^1(Z, \Omega^1) \quad [O1].$$

THÉORÈME 1. — *L'espace* $dH^1(Y, \mathcal{O})$ *est un sous-espace vectoriel de* Ker $i$ *de codimension* $b^{2,0}$.

*Démonstration.* — Du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^1) \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "d_2"'] & \Lambda^{2,2}_{\{O\}}(Z) \arrow[d, "j"] \\ & H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^2) \end{tikzcd}$$

[où $d_i$ est induit par la différentielle et $j$ est l'application naturelle qui à une classe de

$$\Lambda^{2,2}_{\{O\}}(Z) = \frac{\mathscr{B}^{2,2}_{\{O\}}(Z)}{d'd''\mathscr{B}^{1,1}_{\{O\}}(Z)},$$

associe sa classe de $d''$-cohomologie à support dans $\{O\}$], on tire : $\operatorname{Ker} d_1 \subset \operatorname{Ker} d_2$ ce qui équivaut à : $dH^2_{\{O\}}(Z, \mathcal{O}) \supset \operatorname{Ker} d_1$ (prop. 1) (l'inclusion inverse est triviale).

On considère alors le diagramme commutatif où les lignes horizontales sont exactes

$$\text{(A)} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(Z, \mathcal{O}) \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "d"] & H^1(Y, \mathcal{O}) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "d"] & H^2_{\{O\}}(Z, \mathcal{O}) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "d"] & H^2(Z, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^1(Z, \Omega^1) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "i'"] \arrow[dr, "r"] & H^1(Y, \Omega^1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "i"] & H^2_{\{O\}}(Z, \Omega^1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "d_1"] & H^2(Z, \Omega^1) \arrow[r] & 0 \\ & V^{1,1}(Z) \arrow[r, "r'"] & V^{1,1}(Y) \arrow[r, "\partial'_1"] & \Lambda^{2,2}_{\{O\}}(Z) & & \end{tikzcd}$$

et $r$ est induit par l'isomorphisme $H^1(Z, \Omega^1) \cong V^{1,1}(Z)$ (lemme 2).

Soit $\dot\varphi \in \operatorname{Ker} i$, $d_1 \partial_1 \dot\varphi = \partial'_1 i \dot\varphi = 0 \Rightarrow \partial_1 \dot\varphi = d\tilde\theta$ (prop. 1), d'où l'on a :

$$\tilde\theta = \partial_2 \tilde\varphi + \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde\theta_j (\tilde\varphi \in H^1(Y, \mathcal{O})),$$

où $k$ est égal à $b^{0,2}$ et les $p_2 \tilde\theta_j$ forment une base de $H^2(Z, \mathcal{O})$). Alors, on a :

$$d\tilde\theta = d\partial_2 \tilde\varphi + \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j$$

où

$$\theta_j = d\tilde{\theta}_j \quad \text{et} \quad p_1\theta_j = dp_2\tilde{\theta}_j = 0$$

(décomposition de Hodge) d'où $\theta_j = \partial_1 \dot{\varphi}_j$ et $d_1\theta_j = \partial'_1 i\dot{\varphi}_j = 0$;
on en tire $i\dot{\varphi}_j = r'\psi'_j = r\psi_j$ ($\psi'_j \in V^{1,1}(Z)$ et $\psi_j \in H^1(Z, \Omega^1)$).

Soit $\dot{\varphi}'_j = \dot{\varphi}_j - r_1\psi_j$ alors :

1° $\varphi'_j \in \operatorname{Ker} i$;

2° $\partial_1\dot{\varphi}'_j = \partial_1\dot{\varphi}_j = \theta_j$; les $\theta_j$ sont linéairement indépendants comme image par l'application linéaire injective $d$ d'un système libre, les $\dot{\varphi}'_j$ forment donc également un système libre de $H^1(Y, \Omega^1)$;

3° les $(\dot{\varphi}'_j)$ et $dH^1(Y, \mathcal{O})$ forment une somme directe : soit

$$\dot{\varphi} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \dot{\varphi}'_j = d\tilde{\varphi}\,(\tilde{\varphi} \in H^1(Y, \mathcal{O}))$$

alors

$$\partial_1\dot{\varphi} = \sum_{j=1}^k \alpha_j\theta_j = \partial_1 d\tilde{\varphi} = d\partial_2\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^k \alpha_j d\tilde{\theta}_j$$

d'où

$$d\left[\partial_2\tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^k \alpha_j\tilde{\theta}_j\right] = 0,$$

$$\partial_2\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^k \alpha_j\tilde{\theta}_j = 0, \alpha_j = 0\,(j \in \{1, \ldots, k\}) \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = 0.$$

Soit alors $\dot{\varphi} \in H^1(Y, \Omega^1)$ telle que $\dot{\varphi} \in \operatorname{Ker} i$ et $\dot{\varphi} \perp (\dot{\varphi}'_j)$; on a :

$$d_1\partial_1\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \partial_1\dot{\varphi} \in \operatorname{Im} d \Rightarrow \partial_1\dot{\varphi} = d\partial_2\tilde{\varphi} + d\sum_{j=1}^k \alpha_j\tilde{\theta}_j$$
$$\Leftrightarrow \partial_1(\dot{\varphi} - d\tilde{\varphi}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j\partial_1\dot{\varphi}'_j \Leftrightarrow \dot{\varphi} - d\tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^k \alpha_j\dot{\varphi}'_j \in \operatorname{Ker}\partial_1$$
$$\Leftrightarrow \dot{\varphi} - d\tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^k \alpha_j\dot{\varphi}'_j = r_1\psi\,(\psi \in H^1(Z, \Omega^1)),$$

d'où l'on déduit

$$i\left(\dot{\varphi} - d\tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^k \alpha_j\dot{\varphi}'_j\right) = 0 = ir_1\psi = r\psi = r'\psi'$$

et $\psi = \psi' = 0$ (injectivité de $r'$ [04])

d'où $\dot{\varphi} = d\tilde{\varphi} + \sum_{j=1}^k \alpha_j\dot{\varphi}'_j = d\tilde{\varphi}$;

les $(\dot{\varphi}_i)$ formant une somme directe avec $dH^1(Y, \mathcal{O})$, on a :

$$\operatorname{Ker} i \subset dH^1(Y, \mathcal{O}) \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_k.$$

L'inclusion inverse étant évidente, on tire :

$$\operatorname{Ker} i = dH^1(Y, \mathcal{O}) \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_k$$

avec $k = b^{0,2}$, mais l'isomorphisme :

$$(H^2(Z, \mathcal{O}))' \cong H^0(Z, \Omega^2) \text{ donne } b^{0,2} = b^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Z, \Omega^2)$$

et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. — *La suite*

$$(*) \qquad H^1(Y, \mathcal{O}) \xrightarrow{d} H^1(Y, \Omega^1) \xrightarrow{i} V^{1,1}(Y)$$

*est exacte si et seulement si le genre géométrique* $b^{2,0}$ *de la surface* $Z$ *est nul.*

(C) Nous allons donner un exemple de construction naturelle d'une classe d'obstruction à l'exactitude de $(*)$.

Nous considérerons ici pour simplifier le cas où $Z = \mathbf{T}_2$, tore complexe à deux dimensions et nous étudierons plus en détail la situation générale dans un article ultérieur.

1. *Définition.* — Soit $Z$ une variété analytique complexe. On appelle $(r, s)$-courant de Dirac au point $O$ de $Z$ un courant de type $(r, s)$ à support $\{O\}$ et d'ordre zéro.

*Remarque.* — Si $T$ est un $(0, n)$-courant de Dirac en $O$, il existe une carte $U$ contenant $O$ munie de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$, dans laquelle $T \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = k\,\delta_O$ où $\delta_O$ est le courant de Dirac (de degré maximal) en $O$ et $k \in \mathbb{C} - \{0\}$.

A toute forme différentielle $\varphi$ de type $(r, s)$ $d''$-fermée dans un ouvert $Y$ de $Z$, on associera sa classe de $d''$-cohomologie $\dot{\varphi}$ dans $H^s(Y, \Omega^r)$.

2. On suppose désormais $Z = \mathbf{T}_2$.

On a les suites exactes transposées :

$$(1) \quad 0 \to H^1(\mathbf{T}_2, \mathcal{O}) \to H^1(\mathbf{T}_2 - \{O\}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\partial_2} H^2_{\{O\}}(\mathbf{T}_2, \mathcal{O}) \xrightarrow{p_2} H^2(\mathbf{T}_2, \mathcal{O}) \to 0$$

$$(1') \quad 0 \leftarrow H^1(\mathbf{T}_2, \Omega^2) \leftarrow H^1(\mathbf{T}_2 - \{O\}, \Omega^2) \xleftarrow{\delta_2} H^0(\{O\}, \Omega^2) \xleftarrow{r_2} H^0(\mathbf{T}_2, \Omega^2) \leftarrow 0.$$

PROPOSITION 2. — *Soit $T'$ un (0,2)-courant de Dirac en $O$; $T'$ définit une classe $\dot{T}'$ dans $H^2_{\{O\}}(\mathbf{T}_2, \mathcal{O})$ qui n'appartient pas à* $\operatorname{Im}\partial_2$.

*Démonstration.* — D'après l'exactitude de (1), il suffit de montrer que $p_2 T' \neq 0$. Soit $f = dz_1 \wedge dz_2$ une 2-forme différentielle holomorphe sur $\mathbf{T}_2$, où $(z_1, z_2)$ sont des coordonnées sur le revêtement universel de $\mathbf{T}_2$, et $U$ un ouvert contenant $O$ muni des coordonnées $(z_1, z_2)$ en sorte que dans $U$, $T' \wedge dz_1 \wedge dz_2 = k.\delta_O$. On a :

$$p_2 \dot{T}'(f) = \dot{T}'(r_2 f) = T' \wedge dz_1 \wedge dz_2 (1) = k \neq 0,$$

vu l'isomorphisme $H^2_{\{O\}}(\mathbf{T}_2, \mathcal{O}) \cong H^2_{\{O\}}(U, \mathcal{O})$.

On considère alors le diagramme commutatif (A) où $Y = \mathbf{T}_2 - \{O\}$ et on note $T = dT'$ et $\dot{T}$ la classe de $d''$-cohomologie de $T$ dans $H^2_{\{O\}}(\mathbf{T}_2, \Omega^1)$.

PROPOSITION 3. — *Il existe une forme différentielle $\varphi$ de type* (1,1) *$d''$-fermée dans $\mathbf{T}_2 - \{O\}$ vérifiant :*

(i) $\partial_1 \dot{\varphi} = \dot{T}$;

(ii) $\dot{\varphi} \in \operatorname{Ker} i$;

(iii) $\dot{\varphi} \notin dH^1(\mathbf{T}_2 - \{O\}, \mathcal{O})$.

*Remarque.* — La propriété (i) contraste avec la conclusion de la proposition 2 qui exprime que $\dot{T}'$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\partial_2 \psi$.

*Démonstration.* — (i) et (ii) On a $d_1 \dot{T} = 0$ car $\dot{T}$ est $d$-exacte et d'autre part $p_1 \dot{T} = dp_2 \dot{T}' = 0$ car $p_2 \dot{T}'$ admet un représentant $\tilde{T}' = C\, d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$ où $C$ est une constante complexe. Il existe donc $\dot{\varphi} \in H^1(\mathbf{T}_2 - \{O\}, \Omega^1)$ telle que $\partial_1 \dot{\varphi} = \dot{T}$ et de plus d'après la commutativité de (A) : $\partial'_1 \circ i(\dot{\varphi}) = 0$. Il est clair alors (au besoin en ajoutant une forme différentielle $d''$-fermée dans $Z$ tout entier et en utilisant l'isomorphisme $i'$) que l'on peut choisir $\dot{\varphi}$ dans $\operatorname{Ker} i$.

(iii) Supposons que $\dot{\varphi} \in dH^1(\mathbf{T}_2 - \{O\}, \mathcal{O})$, il existe une forme différentielle $\gamma$ (resp. $\gamma'$) $d''$-fermée (resp. $\mathscr{C}^\infty$) dans $\mathbf{T}_2 - \{O\}$ de type (0,1) (resp. (1,0)) telle que l'on ait : $\varphi = d'\gamma + d''\gamma'$ et $d(\dot{T}' - \partial_2 \dot{\gamma}) = 0$.

Soit alors $g$ une 2-forme différentielle holomorphe dans un polydisque $U$ contenant $O$, $g$ étant $d$-fermée est $d$-exacte dans $U$; il existe $\alpha$ forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$ dans $U$ de type (1,0) telle que $g = d\alpha$ et

$$(\dot{T}' - \partial_2 \dot{\gamma})(g) = d(\dot{T}' - \partial_2 \dot{\gamma})(\alpha) = 0$$

et d'après l'isomorphisme $(H^0(\{O\}, \Omega^2))' \cong H^2_{\{O\}}(\mathbf{T}_2, \mathcal{O})$, on a : $\dot{T}' = \partial_2 \dot{\gamma}$ contrairement à l'hypothèse.

(D) Nous allons donner quelques exemples et contre-exemples relatifs à l'exactitude de $(*)$ :

1. *Exemples :*

surfaces réglées, surfaces d'Enriques, surfaces bielliptiques, surfaces de Hopf, surfaces de Godeaux.

2. *Contre-exemples :*

surfaces K3, tores complexes (dans ces deux cas $dH^{n-1}(Z\setminus\{O\}, \mathcal{O})$ est un hyperplan de Ker $i$).

On peut aussi choisir des surfaces algébriques pour lesquelles la codimension dans Ker $i$ de $dH^1(Z\setminus\{O\}, \mathcal{O})$ est aussi grande que l'on veut : il suffit de considérer les surfaces de Fermat de $\mathbb{P}_3$ d'équation homogène : $X^n+Y^n+Z^n+T^n=0$.

(E) On note $\rho_0$ l'application : $H^1(Y, \Omega^1) \to H^0(C_1(Y), \mathcal{O})$ (resp. $\tilde{\rho}_0$ : $V^{1,1}(Y) \to H^0(C_1(Y), \mathcal{H})$) induite par intégration sur les courbes complexes compactes de $Y$ des formes différentielles de type $(1,1)$ [O3].

COROLLAIRE 2. — *Soit $Z$ une surface complexe algébrique projective. Alors* Ker $\rho_0$ *est un sous-espace vectoriel de* Ker $i$ *de codimension* $b^{2,0}$.

*Démonstration.* — Si $\varphi\in\dot{\varphi}\in H^1(Y, \Omega^1)$ s'écrit : $\varphi=d'\alpha+d''\beta$ alors $\varphi\in\operatorname{Ker}\rho_0$ (car tout cycle analytique définit un courant d'intégration $d$-fermé), et inversement

$$\dot{\varphi}\in\operatorname{Ker}\rho_0 \;\Rightarrow\; i(\dot{\varphi})\in\operatorname{Ker}\tilde{\rho}_0 \;\Leftrightarrow\; i(\dot{\varphi})=0 \text{ [O3]} \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}\rho_0=\operatorname{Ker} i.$$

COROLLAIRE 3. — *Soit $Z$ une surface algébrique projective. La suite :*

$$(**)\qquad H^1(Y, \mathcal{O}) \xrightarrow{d} H^1(Y, \Omega^1) \xrightarrow{\rho_0} H^0(C_1(Y), \mathcal{O})$$

*est exacte si et seulement si $Z$ est de genre géométrique zéro.*

On tire immédiatement des exemples et des contre-exemples à l'exactitude de $(**)$ à partir de ceux découlant du corollaire 1 : la suite $(**)$ est exacte par exemple pour les surfaces réglées, elle ne l'est pas pour les tores algébriques ou les surfaces de Fermat de $\mathbb{P}_3$.

## Chapitre II
## Cas d'une variété analytique complexe (lisse et connexe) de dimension complexe $n \geqslant 2$

On considère toujours $O$ un point de $Z$ et $Y = Z \setminus \{O\}$.

PROPOSITION 1. — *Soit $Z$ une variété analytique de dimension complexe $n \geqslant 3$. La suite*

$$H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-3}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^n)$$

*est exacte.*

*Démonstration.* — La suite est clairement un complexe. Soient :

$$\begin{array}{ll}
(0) & 0 \to \mathscr{Z}^0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{Z}^1 \to 0, \\
(1) & 0 \to \mathscr{Z}^1 \to \Omega^1 \to \mathscr{Z}^2 \to 0, \\
 & \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots, \\
(n-2) & 0 \to \mathscr{Z}^{n-2} \to \Omega^{n-2} \to \mathscr{Z}^{n-1} \to 0, \\
(n-1) & 0 \to \mathscr{Z}^{n-1} \to \Omega^{n-1} \to \mathscr{Z}^n \to 0,
\end{array}$$

où $\mathscr{Z}^0 = \mathbb{C}$ et $\mathscr{Z}^n = \Omega^n$ car saturé en $dz$.

Soit $U$ un ouvert de $Z$ contenant $O$, isomorphe à un polydisque de $\mathbb{C}^n$. De l'exactitude de $(k)$ : $0 \to \mathscr{Z}^k \to \Omega^k \to \mathscr{Z}^{k+1} \to 0$, on a :

$$H^{n-2}_{\{O\}}(U, \Omega^k) \to H^{n-2}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{k+1}) \to H^{n-1}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^k) \to H^{n-1}_{\{O\}}(U, \Omega^k).$$

Les deux termes extrêmes étant nuls, on en déduit un isomorphisme :

$$H^{n-2}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{k+1}) \cong H^{n-1}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^k),$$

et ainsi par récurrence sur $(k)$ :

$$H^1_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n+k-2}) \cong H^{n-1}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^k) = 0$$

d'après Hartogs.

L'exactitude des suites $(n-4), \ldots, (0)$ donne les isomorphismes :

$$H^{n+1}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-3}) \cong H^{n+2}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-4}) \cong \ldots \cong H^{2n-2}_{\{O\}}(U, \mathbb{C}) = 0$$

et de même

$$H^{n+1}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-2}) \cong H^{n+2}_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-3}) \cong \ldots \cong H^{2n-1}_{\{O\}}(U, \mathbb{C}) = 0.$$

Les suites $(n-3)$, $(n-2)$ et $(n-1)$ donnent alors l'exactitude de :

(*a*) $0 \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-3}) \to H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-3}) \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-2}) \to 0,$

(*b*) $0 \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-2}) \to H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-2}) \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-1}) \to 0,$

(*c*) $0 \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n-1}) \to H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-1}) \to H^n_{\{O\}}(U, \mathscr{Z}^{n}).$

En regroupant les suites (*a*), (*b*) et (*c*), on tire l'exactitude de :

$$H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-3}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-2}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{d} H^n_{\{O\}}(U, \Omega^{n}).$$

THÉORÈME 1. — *Soit $Z$ une variété analytique compacte de dimension complexe $n$ vérifiant :*

(i) $H^1(Z, \Omega^1) \cong \Lambda^{1,1}(Z)$,

(ii) *Toute $p$-forme holomorphe sur $Z$ est $d$-fermée* ($p = 2,3$).

*Soit $i$ l'application naturelle :* $H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \to V^{n-1,n-1}(Y)$.

*Alors $dH^{n-1}(Y, \Omega^{n-2})$ est un sous-espace vectoriel de* Ker $i$ *de codimension complexe $b^{2,0}$.*

*Démonstration.* — (i) On considère le diagramme commutatif où les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{n-1}(Z, \Omega^{n-2}) \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "d"] & H^{n-1}(Y, \Omega^{n-2}) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "d"] & H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "d"] & H^n(Z, \Omega^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{n-1}(Z, \Omega^{n-1}) \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "i", "s"'] \arrow[dr, "r"] & H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "i"] & H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-1}) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "d_1"] & H^n(Z, \Omega^{n-1}) \arrow[r] & 0 \\
 & V^{n-1,n-1}(Z) \arrow[r, "r'"] & V^{n-1,n-1}(Y) \arrow[r, "\partial'_1"] & \Lambda^{n,n}_{\{O\}}(Z) & &
\end{tikzcd}$$

On a : $H^{n-1}(Z, \Omega^{n-1}) \cong (H^1(Z, \Omega^1))' \cong (\Lambda^{1,1}(Z))'$ (hypothèse), d'où l'isomorphisme $H^{n-1}(Z, \Omega^{n-1}) \cong V^{n-1,n-1}(Z)$.

Cet isomorphisme permet de définir l'application $r$ :

$$H^{n-1}(Z, \Omega^{n-1}) \to V^{n-1,n-1}(Y).$$

De la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} H^n_{\{O\}}(Z,\Omega^{n-1}) & \xrightarrow{d_1} & \Lambda^{n,n}_{\{O\}}(Z) \\ & \searrow^{d_2} & \downarrow \\ & & H^n_{\{O\}}(Z,\Omega^n) \end{array}$$

et de la proposition 1, on a : $dH^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) \supset \operatorname{Ker} d_1$. Soit

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} \in \operatorname{Ker} i, \qquad d_1 \partial_1 \dot{\varphi} = \partial'_1 i \dot{\varphi} = 0 \\ \Rightarrow\ & \partial_1 \dot{\varphi} = d\tilde{\theta} \quad (\tilde{\theta} \in H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2})) \quad \text{(prop. 1)} \\ \Rightarrow\ & \partial_1 \dot{\varphi} = d\partial_2 \tilde{\varphi} + d\textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{\theta}_j \end{aligned}$$

où $k = b^{n-2,n} = b^{2,0}$ et les $p_2 \tilde{\theta}_j$ forment une base de $H^n(Z, \Omega^{n-2})$; on pose $\theta_j = d\tilde{\theta}_j$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-3}) & \xrightarrow{p_3} & H^n(Z, \Omega^{n-3}) \\ \downarrow^{d} & & \downarrow^{d} \\ H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) & \xrightarrow{p_2} & H^n(Z, \Omega^{n-2}) \end{array}$$

d'où l'on tire : $\sum_{j=1}^k \alpha_j \theta_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{\theta}_j\right) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{\theta}_j \in dH^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) \quad \text{(prop. 1)} \\ &\Rightarrow \quad p_2\left(\textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{\theta}_j\right) \in p_2\, dH^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-3}) = dp_3\, H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-3}) = 0 \\ &\Rightarrow \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j p_2(\tilde{\theta}_j) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_j = 0 \qquad (j \in \{1, \ldots, k\}); \end{aligned}$$

les $\theta_j$ forment donc un système libre de $H^n_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-1})$.

(ii) Le reste de la démonstration est alors identique au cas d'une surface. On a

$$p_1\, \theta_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_j = \partial_1\, \dot{\varphi}_j \qquad \text{et} \qquad i\, \dot{\varphi}_j = r\, \psi_j;$$

on pose de même $\dot{\varphi}'_j = \dot{\varphi}_j - r_1 \psi_j$. Alors $\dot{\varphi}'_j \in \operatorname{Ker} i$ et les $(\dot{\varphi}'_j)$ forment un système libre.

Soit

$$\dot{\varphi} = \textstyle\sum_{j=1}^k \alpha_j \dot{\varphi}'_j = d\tilde{\varphi}$$

on a successivement

$$\partial_1 \dot{\varphi} = d\partial_2 \tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j d\tilde{\theta}_j$$

$$\partial_2 \tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \tilde{\theta}_j \in dH^{n}_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-3}) \text{ (prop. 1)}$$

$$p_2\left(\partial_2 \tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \tilde{\theta}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j p_2(\tilde{\theta}_j) = 0$$

$$\alpha_j = O \qquad (j \in \{1, \ldots, k\})$$

d'où les $(\dot{\varphi}'_j)$ et $dH^{n-1}(Y, \Omega^{n-2})$ forment une somme directe.
Soit $\dot{\varphi}$ appartenant à $\operatorname{Ker} i$ orthogonal aux $(\varphi'_j)$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_1 \dot{\varphi} \in dH^{n}_{\{O\}}(Z, \Omega^{n-2}) \;&\Rightarrow\; \partial_1 \dot{\varphi} = d\partial_2 \tilde{\varphi} \\ &\quad + d\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \tilde{\theta}_j \;\Leftrightarrow\; \dot{\varphi} - d\tilde{\varphi} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \dot{\varphi}'_j = r_1 \psi, \\ ir_1 \psi = r\psi = r'\psi' = 0 \;&\Rightarrow\; \psi = 0 \text{ [O4]} \;\Leftrightarrow\; \dot{\varphi} = d\tilde{\varphi} \\ &\Rightarrow\; \operatorname{Ker} i = dH^{n-1}(Y, \Omega^{n-2}) \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}\dot{\varphi}'_k. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Soit $Z$ une variété kälhérienne compacte de dimension complexe $n$; alors $dH^{n-1}(Y, \Omega^{n-2})$ est un sous-espace vectoriel de* $\operatorname{Ker} i$ *de codimension $b^{2,0}$.*

*Démonstration.* — $Z$ vérifie l'hypothèse (ii) du théorème 1 (toute forme holomorphe est harmonique) et on a $H^1(Z, \Omega^1) \cong V^{1,1}(Z) \cong \Lambda^{1,1}(Z)$ [O2].

COROLLAIRE 1. — *Soit $Z$ une variété kälhérienne compacte; la suite*

$$(1) \qquad H^{n-1}(Y, \Omega^{n-2}) \xrightarrow{d} H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{i} V^{n-1,n-1}(Y)$$

*est exacte si et seulement si $b^{2,0} = 0$.*

COROLLAIRE 2. — *Soit $Z$ une variété algébrique projective; $dH^{n-1}(Y, \Omega^{n-2})$ est un sous-espace vectoriel de* $\operatorname{Ker} \rho_0$ *de codimension (complexe) $b^{2,0}$.*

COROLLAIRE 3. — *Soit $Z$ algébrique projective. La suite :*

$$(2) \qquad H^{n-1}(Y, \Omega^{n-2}) \xrightarrow{d} H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{\rho_0} H^0(C_{n-1}(Y), \mathcal{O})$$

*est exacte si et seulement si $b^{2,0} = 0$.*

*Démonstration.* — $\tilde{\rho}_0$ est injectif [O3] d'où $\dot{\varphi} \in H^{n-1}(Y, \Omega^{n-1})$ est dans $\operatorname{Ker} \rho_0$ si et seulement si $i(\dot{\varphi}) = 0$.

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES A L'EXACTITUDE DE LA SUITE (2)

1. *Exemples :*

$Z = \mathbb{P}_n$ [B];

$Z = G_{m,k}$ [O3], où $G_{m,k}$ est la grassmanienne des $k$-plans de $\mathbb{C}^m$ $(n = k(m-k))$.

2. *Contre-exemples :*

Les tores algébriques en toutes dimensions (la codimension dans $\operatorname{Ker} \rho_0$ de $dH^{n-1}(\mathbf{T}_n \setminus \{O\}, \Omega^{n-2})$ étant $n(n-1)/2$ si $Z = \mathbf{T}_n$ est un tore de dimension $n$).

## BIBLIOGRAPHIE


[A-N] A. ANDREOTTI and F. NORGUET. — Cycles of algebraic manifolds and $\partial\bar{\partial}$-cohomology, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, vol. 25, 1971, p. 59-114.

[B] D. BARLET. — Espace des cycles et $d'd''$-cohomologie de $\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_k$, *Lect. Notes in Math.*, n° 409, Fonctions de plusieurs variables complexes (Sém. F. Norguet), Springer-Verlag, p. 98-213.

[G] P. GAUDUCHON. — Structure de Hodge d'une surface complexe, in *Séminaire de Géométrie*, 1981-1982, École Polytechnique, preprint.

[O1] S. OFMAN. — Résidu et dualité, Fonctions de plusieurs Variables Complexes V, *Lect. Notes in Math.*, p. 1, 22.

[O2] S. OFMAN. — Injectivité de la transformation obtenue par intégration sur les cycles analytiques. A. Cas d'une variété kählérienne compacte, idem, p. 183, 189.

[O3] S. OFMAN. — Injectivité de la transformation obtenue par intégration sur les cycles analytiques. B. Cas d'une variété algébrique projective privée d'un point, idem, p. 190, 200.

[O4] S. OFMAN. — Injectivité de la transformation obtenue par intégration sur les cycles analytiques. C. Cas du complémentaire d'une sous-variété, idem, p. 201, 228.