

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC AUBRY

JEAN-MICHEL LEMAIRE

Sommes connexes fibrées en cercles

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 459-462

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__459_0

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOMMES CONNEXES FIBRÉES EN CERCLES

PAR

MARC AUBRY et JEAN-MICHEL LEMAIRE (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'en dimension cinq toute variété compacte, simplement connexe, sans bord, admet une action de cercle libre si et seulement si elle est sans torsion : ceci fournit des exemples de sommes connexes non triviales admettant une action de cercle libre; d'autres exemples en dimension six étaient déjà connus par un résultat de Goldstein et Lininger.

ABSTRACT. — We show that any five dimensional compact simply connected manifold without boundary admits a free circle action if and only if it is torsion-free: we thus obtain examples of non-trivial connected sums which support a free circle action; other examples in dimension six were already known by a result of Goldstein and Lininger.

Cette note a pour but de cerner davantage la réponse à une question de W. Hsiang à laquelle S. HALPERIN vient d'apporter de nouveaux développements [H] : quelles sont les variétés compactes, sans bord, 1-connexes, qui admettent une action de cercle sans point fixe et une décomposition en somme connexe non triviale?

S. Halperin montre qu'une telle variété M vérifie nécessairement $\pi_{2i}(M) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$, pour un certain $i > 0$. Ainsi $S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3$ n'admet pas d'action libre de cercle.

En fait, GOLDSTEIN et LININGER [GL] avaient déjà classé les variétés de dimension 6 répondant à cette question dont l'homologie est sans torsion : ce sont :

$$(S^2 \times S^4)^{\#k-1} \# (S^3 \times S^3)^{\#k}$$

et :

$$\eta_4 \# (S^2 \times S^4)^{\#k-2} \# (S^3 \times S^3)^{\#k}$$

(*) Texte reçu le 20 février 1985.

M. AUBRY et J.-M. LEMAIRE, Laboratoire de Mathématiques, U.A.-C.N.R.S. 168, parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

où $(X)^{\#n}$ représente la somme connexe de n exemplaires de la variété X et η_4 l'espace total du fibré non trivial en S^4 au-dessus de S^2 . En dimension 6, ce sont les seuls cas 1-connexes dont l'homologie soit sans torsion.

En particulier $S^2 \times S^4 \# S^3 \times S^3$ n'admet pas d'action libre de cercle, mais :

$$S^2 \times S^4 \# S^3 \times S^3 \# S^3 \times S^3$$

en admet une. Nous montrons que, pour tout $n, m \geq 0$, la somme connexe $(S^2 \times S^3)^{\#n}$ de même que $\eta_3 \# (S^2 \times S^3)^m$ (où η_3 désigne l'espace total du S^3 -fibré non trivial au-dessus de S^2), est l'espace total d'un S^1 -fibré principal, et donc répond à la question pour $n \geq 2, m \geq 1$.

Dans tout ce qui suit, « variété » signifiera variété C^∞ compacte sans bord. Soit X une variété 1-connexe de dimension 4, et soit :

$$c \in H^2(X; \mathbb{Z}), \quad c \neq 0.$$

L'espace total M du fibré S^1 -principal classé par c est une variété de dimension 5, qui est 1-connexe si et seulement si $c\mathbb{Z}$ est un facteur direct dans $H^2(X; \mathbb{Z})$: ceci résulte immédiatement de la considération du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(X) & \rightarrow & \pi_2(K(\mathbb{Z}, 2)) & \rightarrow & \pi_1(M) & \rightarrow & \pi_1(X) = 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \\ H_2(X) & \rightarrow & H_2(K(\mathbb{Z}, 2)) & \rightarrow & H_1(M) & \rightarrow & H_1(X) = 0 \end{array}$$

dont les lignes sont respectivement les suites exactes d'homotopie et d'homologie (de Serre) de la fibration :

$$M \rightarrow X \xrightarrow{c} K(\mathbb{Z}, 2).$$

De plus, pour toute fibration $S^1 \rightarrow M \rightarrow X$, où M (resp. X) est une variété de dimension 5 (resp. 4), M 1-connexe implique M sans torsion. En effet, la suite exacte d'homotopie montre que X est 1-connexe. D'où, par le théorème des coefficients universels, $H^2(X)$ – et $H^2(M)$ – sont sans torsion. La suite spectrale de Serre montre alors que :

$$H^3(M) \simeq \text{Ker}(d^2 : H^2(X) \otimes H^1(S^1) \rightarrow H^4(X))$$

est sans torsion.

Rappelons le résultat suivant, dû à SMALE [S] (dans le cas $w_2=0$) et à BARDEN [B] (pour $w_2 \neq 0$) : les variétés 1-connexes de dimension 5 sont classées par leur H_2 et par un invariant lié à l'ordre d'un élément du H_2 détecté par w_2 ; en particulier, toute variété 1-connexe M vérifiant

$$w_2(M)=0 \quad (\text{resp } w_2(M) \neq 0)$$

et $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ est difféomorphe à :

$$(S^2 \times S^3)^{\#r} \quad (\text{resp } \eta_3 \# (S^2 \times S^3)^{\#r-1}).$$

Soit donc $p : M \rightarrow X$ la projection du fibré en cercles classé par $c \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Le fibré tangent à M est somme directe de p^*TX et du fibré tangent le long des fibres, qui est trivial de rang 1. Donc :

$$w_2(M) = p^* w_2(X).$$

Ainsi si nous prenons :

$$X = (S^2 \times S^2)^{\#m}, \quad m \geq 1$$

et

$$c = (a_1, a'_1, \dots, a_m, a'_m) \in \mathbb{Z}^{2m},$$

avec

$$\text{pgcd}(a_1, a'_1, \dots, a_m, a'_m) = 1,$$

la variété M est 1-connexe et vérifie $w_2(M) = 0$, car :

$$w_2(X) = 0 \quad \text{et} \quad H_2(M) = \mathbb{Z}^{2m-1}.$$

D'après le théorème de Smale, M est difféomorphe à $(S^2 \times S^3)^{\#2m-1}$ et nous avons donc construit des fibrés principaux :

$$S^1 \rightarrow (S^2 \times S^3)^{\#2m-1} \rightarrow (S^2 \times S^2)^{\#m}.$$

De même, prenons $X = (S^2 \times S^2)^{\#m} \# \mathbb{C}P(2)$, muni du S^1 -fibré obtenu en recollant sur un voisinage du collier le fibré de Hopf sur $\mathbb{C}P(2)$ et le fibré trivial sur $(S^2 \times S^2)^{\#m}$: la classe caractéristique de ce fibré est un générateur du facteur $H^2(\mathbb{C}P(2))$ dans $H^2(X)$. D'autre part, $w_2(X)$ n'est autre que la réduction mod. 2 de cette classe et par construction :

$$0 = p^* w_2(X) = w_2(M).$$

Comme $H_2(M) = \mathbb{Z}^{2m}$, la variété M est difféomorphe à $(S^2 \times S^3)^{\# 2m}$ et l'on a défini un fibré principal pour chaque m

$$S^1 \rightarrow (S^2 \times S^3)^{\# 2m} \rightarrow (S^2 \times S^2)^{\# m} \# \mathbb{C}P(2).$$

Finalement, nous avons fibré $(S^2 \times S^3)^{\# n}$ en cercles pour tout n .

Enfin, si l'on prend $X = \mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2)$ muni du S^1 -fibré classé par un générateur d'un des facteurs de $H^2(X)$, la variété obtenue M est simplement connexe et a la cohomologie de $S^2 \times S^3$, mais vérifie $w_2(M) \neq 0$. C'est l'espace total du S^3 -fibré non trivial au-dessus de S^2 , d'après le théorème de Barden. De même, si l'on prend :

$$X = \mathbb{C}P(2) \# \mathbb{C}P(2) \# (S^2 \times S^2)^{\# n}$$

muni du S^1 -fibré classé par un générateur d'un des facteurs de $H^2(X)$, on obtient la variété :

$$M = \eta_3 \# (S^2 \times S^3)^{\# n}.$$

Conclusion. — D'après le théorème de Barden,

$$(S^2 \times S^3)^{\# n} \quad \text{et} \quad \eta_3 \# (S^2 \times S^3)^{\# n},$$

pour $n \geq 0$, représentent toutes les variétés de dimension 5, 1-connexes, dont le H_2 est sans torsion. Ce qui précède permet d'affirmer qu'une variété 1-connexe de dimension 5 admet une action de cercle libre si et seulement si elle est sans torsion.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BARDEN (D.). — Simply connected five manifolds, *Ann. Math.*, vol. 82, 1965, p. 365-385.
- [GL] GOLDSTEIN (R.) and LININGER (L.). — A classification of 6-manifolds with free S^1 -actions, *Lect. Notes Math.*, vol. 298, p. 316-323, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag.
- [H] HALPERIN (S.). — *Rational homotopy and torus actions*, preprint, Toronto, 1984.
- [S] SMALE (S.). — On the structure of 5-manifolds, *Ann. Math.*, vol. 75, 1962, p. 38-46.