BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES PEYRIÈRE

Comparaison de deux notions de dimension

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__97_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 97-103.

COMPARAISON DE DEUX NOTIONS DE DIMENSION

PAR

JACQUES PEYRIÈRE (*)

RÉSUMÉ. — On définit un ensemble aléatoire plan à la manière de Cantor, en prenant une intersection dénombrable de réunions de rectangles s'aplatissant au fur à mesure que leur diamètre diminue. On établit une relation liant presque sûrement la dimension de Hausdorff de cet ensemble et sa dimension associée à une pseudo-métrique.

ABSTRACT. — A random planar set is defined à la Cantor by taking the intersection of a countable family of unions of rectangles which are flatter and flatter as their diameter tends to zero. A relation, which holds with probability one, links the Hausdorff dimension of this set and its dimension associated to a pseudo-metric.

I. Introduction

Considérons une famille $\mathscr{E}$ de parties du carré $[0, 1]\times[0, 1]$ telle que tout point x de ce carré appartienne à des éléments de $\mathscr{E}$, non vides et dont le diamètre soit arbitrairement petit (on utilise la métrique euclidienne ou une distance équivalente).

Soit E une partie du carré $[0, 1]\times[0, 1]$. Désignons par α et ε deux nombres strictement positifs et posons

$$H_{\alpha,\varepsilon}(E, \mathscr{E}) = \inf\{\textstyle\sum_j (\text{diamètre}(R_j))^\alpha;\ E \subset \bigcup_j R_j,\ R_j \in \mathscr{E} \text{ et diamètre } (R_j) \leqq \varepsilon\},$$

$$H_\alpha(E, \mathscr{E}) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_{\alpha,\varepsilon}(E, \mathscr{E})$$

et

$$\dim_{\mathscr{E}} E = \inf\{\alpha > 0;\ H_\alpha(E, \mathscr{E}) = 0\}.$$

(*) Texte reçu le 16 octobre 1984, révisé le 17 septembre 1985.

J. PEYRIÈRE, Université Paris-Sud, U.A. 757, Analyse Harmonique, Mathématiques (Bât. 425), 91405 Orsay Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/01 97 7/$ 2.70

Lorsque $\mathscr{E}$ est constitué de toutes les parties du carré, ou simplement de toutes les boules, on obtient la dimension de Hausdorff que dans la suite nous noterons dim.

Dans [8] nous donnons des conditions sur $\mathscr{E}$ assurant l'identité $\dim_{\mathscr{E}} = \dim$. Cependant plusieurs situations amènent à considérer des familles ne donnant pas lieu à cette identité. Il s'agit de cas où $\mathscr{E}$ est constitué des boules associées à une pseudo-métrique. On n'a pas alors de relation simple entre $\dim_{\mathscr{E}}$ et dim. Notre propos est de nous placer dans la situation considérée par S. LOVEJOY et D. SCHERTZER [5] à propos de la turbulence atmosphérique et de montrer qu'il existe une relation affine liant presque sûrement dim E et $\dim_{\mathscr{E}} E$ lorsque E est un ensemble aléatoire convenable. Il existe d'autres situations où apparaissent des dimensions relatives à une pseudo-métrique, notamment celle considérée par A.-M. CHOLLET [3] et A.-M. CHOLLET et J. CHAUMAT [4] dans laquelle obtenir un résultat analogue à celui de cet article semble plus difficile. Dans le cas déterministe, des problèmes analogues ont été étudiés par T. J. Bedford [1], C. McMullen [6] et B. B. Mandelbrot [7].

II. Position du problème et résultats

Si F est un ensemble fini, on note F^* l'ensemble des mots construits avec F comme alphabet. La longueur d'un élément j de F^* est notée $|j|$, le mot de longueur nulle ω. Muni de la concaténation, F^* est un monoïde : si j et k appartiennent à F^*, on note jk le mot obtenu en mettant les mots j et k bout à bout. On identifie $(F \times G)^*$ à une partie de $F^* \times G^*$.

Soit a et ν deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On pose

$$\mathbb{N}_a = \{0, 1, \ldots, a-1\},$$

A chaque élément j de $\mathbb{N}_a^*$ on associe l'intervalle

$$I_a(j) = [\textstyle\sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k a^{-k}, \sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k a^{-k} + a^{-|j|}[$$

et à chaque j de $\mathbb{N}_{a^\nu}^*$ l'intervalle

$$I_{a,\nu}(j) = [\textstyle\sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k a^{-\nu k}, \sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k a^{-\nu k} + a^{-\nu |j|}[.$$

Si $j = (j^1, j^2)$ appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$, on note $\mathrm{R}(j)$ ou $\mathrm{R}(j^1, j^2)$ le rectangle $I_a(j^1) \times I_{a,\nu}(j^2)$.

Si j appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et k à $\mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}$, on pose

$$Q(j, k) = I_a(j^1 k) \times I_{a,\nu}(j^2).$$

On obtient ainsi un carré de côté $a^{-\nu|j|}$. On a

$$R(j) = \bigcup \{Q(j, k);\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}\}$$

et

$$Q(j, k) = \bigcup \{R(j^1 k, j^2 l);\ l \in \mathbb{N}_{a^\nu}^{(\nu-1)|j|}\}.$$

On considère maintenant un entier b strictement compris entre a^ν et $a^{\nu+1}$ et une suite $\{A(j)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$ de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et à valeurs dans l'ensemble des parties à b éléments de $\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$, chacune de ces parties étant équiprobable. Si j appartient à $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et k à $\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$, on pose

$$W(jk) = \frac{1}{b} 1_{A(j)}(k),$$

de sorte que l'on a

$$P\left(W(jk) = \frac{1}{b}\right) = 1 - P(W(jk) = 0) = b a^{-(\nu+1)}.$$

On définit une fonction aléatoire μ sur les rectangles $\{R(j)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$ ainsi :

- $\mu(R(\omega)) = 1$;
- $\mu(R(jk)) = W(jk)\,\mu(R(j))$ si $j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*$ et $k \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu}$.

Notons que $\mu(R(j))$ ne peut prendre que les valeurs 0 et $b^{-|j|}$.

Cette fonction se prolonge en une probabilité, encore notée μ, sur la tribu de Borel de $R(\omega) = [0, 1[\times [0, 1[$. Le support de cette mesure est le compact aléatoire

$$F = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup \{\overline{R(j)};\ |j| = n \text{ et } \mu(R(j)) \neq 0\}.$$

On a le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathscr{E} = \{R(j)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^*}$. *Presque sûrement on a*

$$\dim F = \frac{1}{\nu} \dim_{\mathscr{E}} F + \frac{\nu - 1}{\nu} = \frac{\log b}{\nu \log a} + \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

III. Démonstration

Montrons d'abord que l'on a $\dim_{\mathscr{E}} F = \log b/\log a$. On utilise comme diamètre d'un rectangle la longueur de son plus grand côté. L'ensemble F est recouvert par b^n des rectangles $\{R(j)\}_{|j|=n}$, donc

$$H_{\alpha, a^{-n}}(E, \mathscr{E}) \leqslant b^n a^{-\alpha n},$$

d'où l'inégalité $\dim_{\mathscr{E}} F \leqslant \log b/\log a$. D'autre part, si l'on considère un recouvrement de F par des éléments de $\mathscr{E}$, $F \subset \bigcup_l R(j_l)$, on a

$$1 = \mu(F) \leqslant \sum_l \mu(R(j_l)) \leqslant \sum_l [\text{diamètre}(R(j_l))]^{\log b/\log a},$$

d'où l'inégalité inverse.

D'autre part, l'ensemble F, étant recouvert par b^n des rectangles $\{R(j)\}_{|j|=n}$, l'est par $b^n a^{(\nu-1)n}$ des carrés $\{Q(j, k)\}_{|j|=n,\, k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}}$, donc

$$\dim F \leqslant \frac{\log b + (\nu-1)\log a}{\nu \log a}.$$

Reste à montrer l'inégalité opposée.

Les variables $\{A(j)\}_j$ sont définies sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Considérons la probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathscr{F}$, produit de $\mathscr{A}$ par la tribu de Borel de $[0, 1[^2$, telle que l'on ait $\mathbb{P}(A \times R) = E(\mu(R)\, 1_A)$. L'espérance correspondante sera notée $\mathbb{E}$.

Puisque l'on a

$$\mu(Q(j, k)) = \Sigma \{\mu(R(j^1 k, j^2 l));\ l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}\}$$

on peut écrire

$$\mu(Q(j, k)) = T(j, k)\, \mu(R(j))$$

où

$$T(j, k) = \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)|j|}} W(j^1 k_1, j^2 l_1)\, W(j^1 k_1 k_2, j^2 l_1 l_2) \ldots \\ W(j^1 k_1 \ldots k_{(\nu-1)|j|}, j^2 l_1 \ldots l_{(\nu-1)|j|}),$$

ce que l'on écrira

$$T(j, k) = \sum_{l \in N_a^{(\nu-1)|j|}} W_{j,k}(l_1)\, W_{j,k}(l_1 l_2) \ldots W_{j,k}(l_1 l_2 \ldots l_{(\nu-1)|j|}).$$

Posons

$$T_n = \sum_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n} \sum_{k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}} T(j,\,k)\, 1_{Q(j,\,k)}$$

et notons $Q_n(x)$ celui des carrés $\{Q(j,\,k)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n,\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}}$ qui contient x.

Nous allons montrer que $1/n^2 \log T_{n^2}$ tend vers $-(\nu-1)\log a$ presque sûrement relativement à $\mathbb{P}$. Admettons le provisoirement. On en déduit que, P-presque sûrement pour μ-presque tout x, $-[\log \mu(Q_{n^2}(x))]/(n^2 \nu \log a)$ tend vers

$$d = \frac{\log b}{\nu \log a} + \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

Ceci, grâce à un théorème de P. BILLINGSLEY ([2], p. 144) prouve l'inégalité $\dim_{\mathscr{E}_1} F \geqslant d$ où $\mathscr{E}_1$ désigne la famille des carrés

$$\{Q(j,\,k)\}_{j \in (\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^{n^2},\ k \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n^2}}.$$

Mais, comme le quotient des logarithmes des côtés des carrés correspondant à n^2 et $(n+1)^2$ tend vers 1, on a $\dim_{\mathscr{E}_1} = \dim$. La démonstration sera donc complète après que nous aurons prouvé le lemme suivant.

LEMME. — *On a* $\mathbb{E}(1/n \log T_n + (\nu-1)\log a)^2 = o(1/n)$.

Démonstration. — Calculons $\mathbb{E}(\varphi(T_n))$ où φ est une fonction borélienne de signe constant. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(T_n)) &= \textstyle\sum_{j,\,k} E[\mu(Q(j,\,k))\, \varphi(T(j,\,k))] \\ &= \textstyle\sum_{j,\,k} E[T(j,\,k)\, \varphi(T(j,\,k))\, \mu(R(j))] \\ &= a^{(\nu-1)n} E[T(j,\,k)\, \varphi(T(j,\,k))],\end{aligned}$$

où j et k sont deux éléments quelconques respectivement de $(\mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_{a^\nu})^n$ et de $\mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}$. On a

$$\mathbb{E}(\varphi(T_n)) = a^{(\nu-1)n} \sum_{l \in \mathbb{N}_a^{(\nu-1)n}} E[W_{j,\,k}(l_1)\, W_{j,\,k}(l_1 l_2) \ldots W_{j,\,k}(l_1 \ldots l_{(\nu-1)n})\, \varphi(T(j,\,k))].$$

Là encore, tous les termes sont égaux. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(T_n)) &= a^{(\nu^2-1)n} E[W_{j,\,k}(0)\, W_{j,\,k}(00) \ldots W_{j,\,k}(00\ldots0)\, \varphi(T(j,\,k))] \\ &= E\left[\varphi(T(j,\,k)) \,\middle|\, W_{j,\,k}(0) = W_{j,\,k}(00) = \ldots = W_{j,\,k}(0^{(\nu-1)n}) = \frac{1}{b}\right]\end{aligned}$$

(bien sûr, ici $0^{(\nu-1)n}$ désigne le mot composé de $(\nu-1)\,n$ zéros).

Nous allons maintenant donner une autre expression de $\mathbb{E}(\varphi(T_n))$ en définissant un processus ayant même distribution que $\{T_n\}$. Considérons une suite $\{X(l)\}_{l \in \mathbb{N}_{a^\nu}^*,\, |l| \geq 1}$ telle que

1. La v. a. $X(l)$ est indépendante de l'ensemble des variables $\{X(l')\}_{|l'| < |l|}$.

2. Pour tout $n \geqslant 0$, la loi conjointe des variables $\{X(0^n k)\}_{0 \leq k < a^\nu}$ est identique à celle des variables $\{1_{(0,k) \in A(\omega)}\}_{0 \leq k < a^\nu}$ sachant que $(0, 0) \in A(\omega)$.

3. Si $|l| \geqslant 1$ et si l n'est pas composé uniquement de zéros, la loi conjointe des v. a. $\{X(lk)\}_{0 \leq k < a^\nu}$ est identique à celle des variables $\{1_{\{0^l k \in A(\omega)\}}\}_{1 \leq k < a^\nu}$.

On pose

$$Y_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad Y_n = \sum_{l \in \mathbb{N}_{a^\nu}^n} X(l_1) X(l_1 l_2) \ldots X(l_1 \ldots l_n).$$

Les variables T_n et $b^{-(\nu-1)n} Y_{(\nu-1)n}$ sont alors équidistribuées. La variable Y_n n'est autre que le nombre d'individus à l'instant n pour un processus de Galton-Watson à deux types :

– un individu donne naissance à au moins un individu et à au plus b;

– un individu de type 1 donne naissance à un individu de type 1 et, en moyenne, à $((b-1)(a^\nu - 1))/(a^{\nu+1} - 1)$ individus de type 2;

– un individu de type 2 donne naissance, en moyenne à $ba^\nu/a^{\nu+1}$ individus de type 2 et à aucun de type 1;

– la population à l'instant 0 est composée d'un individu de type 1.

Il résulte des propriétés des processus de Galton-Watson que $Z_N = (a/b)^n Y_n$ tend presque sûrement et en moyenne quadratique vers une variable Z presque sûrement non nulle. Puisque chaque individu donne naissance à au moins un individu, il existe un nombre $h > 0$ tel que $E(Z^{-h})$ soit fini. Les variables

$$\{\log Z_n\}_{n \geq 0} \qquad \text{et} \qquad \{(\log Z_n)^2\}_{n \geq 0}$$

sont donc uniformément intégrables et l'on a

$$E(\log Z_n) = E(\log Z) + o(1) \qquad \text{et} \qquad E[(\log Z_n)^2] = E[(\log Z)^2] + o(1).$$

Autrement dit, on a

$$E\left(\log \frac{Y_n}{b^n}\right) = -n \log a + E(\log Z) + o(1)$$

et

$$E\left[\left(\log\frac{Y_n}{b^n}\right)^2\right]=n^2(\log a)^2-2n\log a\,E(\log Z)+o(n)$$

d'où

$$E\left(\log\frac{Y_n}{b^n}+n\log a\right)^2=o(n),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEDFORD (T. J.). — Crinkly curves, Markov Partitions and Dimension. Ph. D. Thesis (Warwick University, U.K., 1984).

[2] BILLINGSLEY (P.). — *Ergodic theory and information*, J. Wiley, 1965.

[3] CHOLLET (A.-M.). — Ensemble de zéros à la frontière de fonctions analytiques, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, 1976, p. 51-80.

[4] CHOLLET (A.-M.) et CHAUMAT (J.). — *Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudo-convexes*, Prépubl. Orsay, 34T14.

[5] LOVEJOY (S.) and SCHERTZER (D.). — The dimension and intermittency of atmospheric dynamics, *Turbulent Shear Flow*, vol. 4, 1984, p. 7-33, Ed. Launder.

[6] MCMULLEN (C.). — *Nagoya Math. J.*, **96** (1984) p. 1.

[7] MANDELBROT (B. B.). — Self affine fractal sets. In Fractals in Physics (Trieste, 1985). Edited by L. Pietronero and E. Tosatti. North Holland Publishing Company 1986.

[8] PEYRIÈRE (J.). — Mesures singulières associées à des découpages aléatoires d'un hypercube, *Le volume de Colloquium Mathematicum en l'honneur de S. Hartman* (à paraître).