BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL BARLET

Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 247-269
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__247_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 247-269.

MONODROMIE ET PÔLES DU PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE $\int_X |f|^{2\lambda}\square$

PAR

DANIEL BARLET (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe non constante. Nous montrons que si la monodromie agissant en degré $p \geqslant 1$ sur la cohomologie de la fibre de Milnor de f admet $\exp(-2i\pi u)$ comme valeur propre de multiplicité k avec $0 \leqslant u < 1$, le prolongement méromorphe de $|f|^{2\lambda}$ admet en $-p-u$ un pôle d'ordre au moins k.

ABSTRACT. — Let $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ be a germ of non constant holomorphic function. We show that if the monodromy acting on the pth-cohomology group of the Milnor's fiber of f admits $\exp(-2i\pi u)$ as eigenvalue of multiplicity k, with $0 \leqslant u < 1$, the meromorphic extension of $|f|^{2\lambda}$ has a pôle of order at least k at $-p-u$.

Introduction

Soit $f: X \to D$ un représentant de Milnor ([1]) d'un germe de fonction holomorphe non constante $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Dans un article précédent (*voir* [2]) nous avons montré comment la présence d'un bloc de Jordan de taille (k, k) pour une valeur propre $e^{-2i\pi u}$ de la monodromie locale en 0 de $\tilde{f}$ contribue effectivement à l'apparition d'un pôle d'ordre au moins k

(*) Texte reçu le 6 novembre 1984, révisé le 9 avril 1986.

Daniel BARLET, C.N.R.S., U.A. n° 750, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-Les-Nancy.

([1]) *Voir* le texte pour une définition précise.

en $-u-\nu$ pour $\nu \in \mathbb{N}$, ν assez grand, pour le prolongement méromorphe de la distribution $\int_X |f|^{2z} \square$ sur X.

Le but du présent article est de préciser une valeur de ν pour laquelle, u étant fixé dans $[0, 1[$, on peut assurer qu'un tel pôle d'ordre au moins k se présente effectivement. On obtient le résultat suivant (théorème 2) :

Si la monodromie agissant de degré $p \geqslant 1$ (c'est-à-dire sur le p-ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor en 0) admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ où $0 \leqslant u < 1$, alors le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \square$ admet un pôle d'ordre au moins k en $-u-p$.

La méthode de démonstration consiste, étant donné le bloc de Jordan considéré dans l'hypothèse, à construire, comme dans [2], lemme A, des formes holomorphes sur X qui vont induire sur $D-\{0\}$ une base du sous-fibré de Gauss-Manin ([1]) en degré p associé à ce bloc. On utilise alors des techniques introduites dans [2] et [3] pour construire à partir de ces formes holomorphes, de nouvelles formes holomorphes sur X qui donneront cette fois-ci une base sur $D-\{0\}$ du sous-fibré associé au bloc de Jordan conjugué de la monodromie (pour la conjugaison ordinaire sur la cohomologie de la fibre de Milnor vue comme complexifiée de la cohomologie à valeur réelle !).

Le renseignement crucial que l'on peut obtenir par cette méthode est que les sections de l'extension de Deligne du fibré de Gauss-Manin en degré p sont des sections méromorphes de la cohomologie de De Rham relative ([2]) ayant des poles d'ordre au plus égal à p (*voir* le théorème 1 et son corollaire 1).

J'espère que ce résultat sera le premier pas vers une meilleure compréhension des liens entre une « filtration de Hodge » et la structure des pôles de $\int_X |f|^{2z} \square$.

([2]) Pour être tout à fait précis, on utilise ici non pas la différentielle relative ordinaire, mais la différentielle $\omega \to d(f\omega)$ pour définir le réseau de la cohomologie de De Rham relative.

Le lecteur intéressé par la situation analogue dans le réel pourra aisément combiner le présent article avec les résultats de [4] pour obtenir un analogue réel du théorème 2 (évidemment dans le cas réel une condition supplémentaire sur la position du réel par rapport au complexe devra être ajoutée à l'hypothèse).

Terminons cette introduction en précisant que, bien entendu, le germe de fonction holomorphe f que l'on considère ici, *n'est pas supposé à singularité isolée.*

Dans ce qui suit nous aurons souvent à considérer la situation suivante :

Soit X une variété analytique complexe lisse et connexe de dimension $n+1$ et soit $f: X \to D$ une application holomorphe surjective sur un disque D de centre 0 dans $\mathbb{C}$.

DÉFINITION. — Nous dirons que $f: X \to D$ est une situation de Milnor si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1° X est une variété de Stein contractible.

2° $f: X - f^{-1}(0) \to D - \{0\}$ induit une fibration C^∞ localement triviale. Soit $s_0 \in D - \{0\}$ un point base; la fibre type $X(s_0) = f^{-1}(s_0)$ (dite fibre de Milnor) vérifie

3° $\dim_{\mathbb{C}} H^p(X(s_0), \mathbb{C}) < +\infty$, $\forall p \geqslant 0$.

Il résulte alors du travail fondamental de Milnor [$\mathscr{M}$] que pour tout germe $\tilde{f}: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ non constant, il existe une base de voisinages ouverts X_α de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et des représentants $f_\alpha: X_\alpha \to D_\alpha$ du germe $\tilde{f}$ où D_α est un disque de centre 0 dans $\mathbb{C}$ tels que pour chaque α $f_\alpha: X_\alpha \to D_\alpha$ soit une situation de Milnor au sens ci-dessus. De plus, d'après [L.T.], th. 2.3.1, on peut choisir les X_α de manière que les fibrations

$$f_\alpha : \quad X_\alpha - f^{-1}(0) \to D_\alpha - \{0\}$$

soient deux à deux homotopiquement équivalentes.

On dira alors que $f_\alpha: X_\alpha \to D_\alpha$ est un *représentant de Milnor* du germe $\tilde{f}$.

La contractibilité peut se voir de la manière suivante : d'abord pour ε assez petit $f^{-1}(0)$ est contractible d'après Lojasiewicz (*voir* [L]).

Considérons une triangulation de la boule fermée $\bar{B}_\varepsilon$ telle que la sphère S_ε et la fibre $\overline{f^{-1}(0)}$ soient réunion de simplexes (ceci est possible d'après [L]). Il existe alors un voisinage compact $\bar{U}$ de $\overline{f^{-1}(0)}$ dans $\bar{B}_\varepsilon$ tel que $U = \bar{U} \cap B_\varepsilon$ se rétracte sur $f^{-1}(0)$. Le champ de vecteur construit par

Milnor au lemme 5.9, p. 52, permet de retracter $B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ dans U. Alors $B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ est contractible.

Soit $f: X \to D$ une situation de Milnor. La trivialité (topologique) locale de la fibration $f: X - f^{-1}(0) \to D - \{0\}$ montre que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on a un système local d'espaces vectoriels complexes $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ sur $D^* = D - \{0\}$.

Nous appellerons fibré de Gauss-Manin (en degré p) le fibré vectoriel holomorphe $GM^p = H^p(f_* \Omega^{\cdot}_{X/f}, d_{/f})/\text{Torsion}$ où $(\Omega^{\cdot}_{X/f}, d_{/f})$ désigne le complexe de De Rham relatif de f. La cohérence sur D du faisceau GM^p est due à Hamm (*voir* [H]). De plus, le fibré vectoriel holomorphe GM^p est naturellement muni d'une connexion (dite de Gauss-Manin) qui est méromorphe et régulière en 0 (on trouvera dans l'appendice de [3] une démonstration due à B. Malgrange de la régularité).

Il est facile de voir que sur $D - \{0\}$ GM^p muni de sa connexion coïncide (canoniquement) avec le fibré à connexion associé au système local $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ mentionné ci-dessus.

Étant donné un point de base $s_0 \in D^*$ le dit système local est décrit par la donnée de l'espace vectoriel $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ et de l'automorphisme T de monodromie de cet espace.

Si on se donne un bloc de Jordan de taille (k, k) de T pour la valeur propre $\lambda = e^{-2i\pi u}$ avec $0 \leqslant u < 1$ ([3]), c'est-à-dire des vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ vérifiant

$$Te_a = \lambda e_a + e_{a-1} \qquad \text{pour} \quad a \in [2, i]$$

et

$$Te_1 = \lambda e_1 \qquad \text{avec} \quad e_1 \neq 0,$$

le lemme A de [2] permet de construire des p-formes holomorphes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sur X et un entier $m \in \mathbb{N}$ qui vérifient

$$1. \qquad d\omega_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_a + \frac{df}{f} \wedge \omega_{a-1}, \qquad \forall a \in [1, k]$$

([3]) Si le lecteur ne veut pas utiliser le théorème de monodromie qui assure que $u \in \mathbf{Q}$ (et donc à $\mathbf{R}$!) il prendra simplement $0 \leqslant \operatorname{Re}(u) < 1$.

avec la convention $\omega_0 \equiv 0$;

2. les $\omega_a | X(s_0)$ forment une base du sous espace de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ engendré par $e_1, \ldots, e_k$.

En particulier le sous fibré de $GM^p/D - \{0\}$ qui est engendré par les sections horizontales valant $e_1, \ldots, e_k$ en s_0 admet $\omega_1, \ldots, \omega_k$ comme base sur $\mathcal{O}_{D-\{0\}}$.

Le résultat clef de cet article est la

PROPOSITION FONDAMENTALE. — Soit $f: X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe non constante à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $u \in]0, 1]$ et $p \in [1, n]$, $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $w_1 \ldots w_k$ des p-formes holomorphes sur X vérifiant

$$dw_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1} \qquad \text{pour} \quad a \in [1, k]$$

avec la convention $w_0 = 0$. Soit s_0 un point base de D^* et notons par W_h le sous-espace vectoriel de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ engendré par les classes des $w_a | X(s_0)$ [qui sont d-fermées sur $X(s_0) = \{f = s_0\}$] pour $a \in [1, h]$.

Soit $\Sigma \subset \{f = 0\}$ un sous ensemble analytique fermé de codimension $\geqslant p+2$ dans X et soit $l_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour h donné dans $[1, k]$ le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0} (df/f) \wedge w_k \wedge \square$ n'ait pas de pôle d'ordre strictement plus grand que $k-h$ sur $X - \Sigma$ en $z = -m-u$. Alors il existe des p-formes holomorphes w_a^* sur X, pour $a \in [-n, h]$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $$dw_a^* = (l_0 - m + p - u)\frac{df}{f} \wedge w_a^* + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}^*$$

pour $a \in [-n, h]$ avec la convention $w_{-n-1}^* = 0$;

2. les $w_a^* | X(s_0)$ pour $a \in [1, h]$ engendrent $\bar{W}_h$ le sous-espace conjugué de W_h pour la conjugaison complexe banale de

$$H^p(X(s_0), \mathbb{C}) = H^p(X(s_0), \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

3. les $w_a^* | X(s_0)$ induisent 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ pour $a \leqslant 0$.

Si l'on suppose de plus que, en $z=-m-u$, le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0} w_a \wedge \square$ a un pôle d'ordre au plus égal à $a-1$ pour $a\in[1, k]$ sur $X-\Sigma$, alors on peut choisir les w_a^* de manière à avoir de plus $w_a^*=0$ pour $a\leqslant 0$.

Démonstration. — Pour σ et j dans $\mathbb{Z}$, σ vérifiant $\sigma\leqslant k$, posons

$$T_j^\sigma=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{|\alpha|}P_\alpha\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma}\wedge\square\right)$$

avec les conventions suivantes : $w_a=0$ pour $a\notin[1, k]$, $P_\alpha(z=z_0, F(z))$ pour F méromorphe dans $\mathbb{C}$, $z_0\in\mathbb{C}$ et $\alpha\in\mathbb{Z}$ désigne le coefficient de $1/(z-z_0)^\alpha$ dans le développement de Laurent de F en z_0, et $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_\beta\wedge\square$ désigne le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ du courant sur X:

$$\varphi\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_\beta\wedge\varphi$$

défini et holomorphe par rapport à z pour $\operatorname{Re}(z)\gg 0$. La somme étant en fait finie, la définition du courant T_j^σ ne pose pas de problème grâce au lemme 1 de [2]. On prendra garde qu'avec nos conventions, la relation

$$dw_a=(m+u)\frac{df}{f}\wedge w_a+\frac{df}{f}\wedge w_{a-1}$$

est vraie seulement si $a\neq k+1$.

Remarquons tout de suite que l'on a pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et tout σ

$$\bar{f}T_{j+1}^\sigma=T_j^\sigma$$

De plus comme l'ordre des pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z}\square$ est toujours majoré par $n+1$ (ceci résulte, par exemple, du théorème de développement asymptotique de [1], puisque la puissance maximale de $\operatorname{Log}|s|$ apparaissant dans les développements est n) on aura $T_j^\sigma=0$ pour $\sigma<-n$. En effet pour que

$$P_\alpha\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma}\wedge\square\right)$$

soit non nul il faut, d'après ce qui précède, que l'on ait $\alpha+\sigma\in[1, k]$ et $\alpha\leqslant n+1$ d'où l'annulation pour $\sigma<-n$.

Remarquons encore que sous l'hypothèse complémentaire que, en $z=-m-u$, $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0} w_a\wedge\square$ n'ait pas de pôle d'ordre $>a-1$ sur $X-\Sigma$ pour $a\in[1, k]$, on aura

$$P_\alpha\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma}\wedge\square\right)=0$$

pour $\sigma\leqslant 0$ et $j\leqslant 0$. En effet pour $\alpha+\sigma=i\in[1, k]$ on aura $\alpha\geqslant i$ et donc annulation puisque $j\leqslant 0$ ([4]). Calculons $\langle d' T_j^\sigma, \varphi\rangle=(-1)^{p+1}\langle T_j^\sigma, d'\varphi\rangle$ pour $\varphi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p, n+1)$: on a pour $\mathrm{Re}(z)\gg 0$ par Stokes ([5])

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1}&\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma}\wedge d'\varphi\\ &=(z+m+u)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j}\frac{df}{f}\wedge w_{\alpha+\sigma}\wedge\varphi\\ &\qquad+\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j}\frac{df}{f}\wedge w_{\alpha+\sigma-1}\wedge\varphi\end{aligned}$$

sauf pour $\alpha+\sigma=k+1$ où la dernière intégrale n'existe pas. Cela donne :

$$\begin{aligned}d' T_j^\sigma=&\textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{|\alpha|}P_{\alpha+1}\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j}\frac{df}{f}\wedge w_{\alpha+\sigma}\wedge\square\right)\\ &+\textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{|\alpha|}P_\alpha\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j}\frac{df}{f}\wedge w_{\alpha+\sigma-1}\wedge\square\right)\\ &+(-1)^{k-\sigma}P_{k-\sigma+1}\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j}\frac{df}{f}\wedge w_k\wedge\square\right)\quad ([6])\end{aligned}$$

([4]) Pour $j\leqslant 0$ et $\varphi\in C_c^\infty(X)$, $\bar{f}^{-j}.\varphi\in C_c^\infty(X)$.

([5]) Qui donne $\int_X d(|f|^{2z}\bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma}\wedge\varphi)=0$.

et donc

$$d' T_j^\sigma = (-1)^{k-\sigma} P_{k-\sigma+1}\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0-j} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square\right).$$

Sous notre hypothèse que le prolongement méromorphe sur $X-\Sigma$ de

$$\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0} \frac{df}{f} \wedge w_k \wedge \square$$

n'ait pas de pôle en $z=-m-u$ d'ordre $>k-h$ on aura $d' T_j^\sigma = 0$ pour $\sigma \leqslant h$ et $j \leqslant 0$ sur $X-\Sigma$.

Calculons maintenant $\langle d'' T_j^\sigma, \psi \rangle = (-1)^{p+1} \langle T_j^\sigma, d'' \psi \rangle$ pour $\psi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n)$: on a pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ d'après Stokes (comme plus haut) :

$$(-1)^{p+1} \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0-j} w_{\alpha+\sigma} \wedge d'' \psi$$

$$= (z+l_0-j) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0-j-1} d\bar{f} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \psi$$

ce qui donne, en écrivant

$$z+l_0-j = (z+m+u) + (l_0-j-m-u)$$

$$d'' T_j^\sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_{\alpha+1}\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0-j-1} d\bar{f} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \square\right) +$$

$$(l_0-j-m-u) \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{|\alpha|} P_\alpha\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0-j-1} d\bar{f} \wedge w_{\alpha+\sigma} \wedge \square\right)$$

([6]) On utilise ici l'identité

$$P_\alpha(z=z_0, (z-z_0)F(z)) = P_{\alpha+1}(z=z_0, F(z))$$

pour F méromorphe et $z_0 \in \mathbb{C}$.

c'est-à-dire

$$d'' T_j^\sigma=(l_0-j-m-u)\,d\bar{f}\wedge T_{j+1}^\sigma-d\bar{f}\wedge T_{j+1}^{\sigma-1}$$

Considérons le courant T_j à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^{n+h+1}$ dont les composantes sont les T_j^σ pour $\sigma\in[-n, h]$. Si $N:\mathbb{C}^{n+h+1}\to\mathbb{C}^{n+h+1}$ est donné par $N(e_\sigma)=-e_{\sigma-1}$ avec la convention $e_{-n-1}=0$ ($(e_{-n}, \ldots, e_h)$ désigne ici la base canonique de $\mathbb{C}^{n+h+1}$), on aura

$$d'' T_j=((l_0-m-j-u)\,Id+N)\,d\bar{f}\wedge T_{j+1}, \qquad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

Mais pour $j\leqslant 0$, l'hypothèse donne aussi $d' T_j=0$ sur $X-\Sigma$ (on utilise ici $\sigma\leqslant h$). De plus on a les relations $\bar{f}T_{j+1}=T_j$, $\forall j\in\mathbb{Z}$. On peut alors appliquer les variantes des lemmes C_1' et C_2' de [3] puisque l'on a $H^i(X-\Sigma, \Omega^q)$ qui est nul pour $i\leqslant p$ et $q\in[0, n+1]$. On obtient alors l'existence sur $X-\Sigma$ de courants vectoriels de degré $p-1$ U_j et de p-formes holomorphes vectorielles S_j pour $j\leqslant 1-p$ qui vérifient pour $j\leqslant -p$ les relations suivantes sur $X-\Sigma$:

(a) $T_j=(-1)^p\bar{S}_j+dU_j+[(l_0-m-j-u)\,Id+N]\,d\bar{f}\wedge U_{j+1}$;

(b) $dS_j=[(l_0-m-j-u)\,Id+N]\,df\wedge S_{j+1}$;

(c) $f\,.\,S_{j+1}=S_j$.

Remarquons que comme Σ est de codimension $\geqslant 2$ dans X les formes holomorphes S_j sur $X-\Sigma$ se prolongent par Hartogs en des formes holomorphes sur X tout entier.

Posons alors $w_\sigma^*=(-1)^\sigma.\,S_{-p}^\sigma$ pour $\sigma\in[-n, h]$.

On aura d'après (b) et (c), par prolongement analytique

$$(1)\qquad dw_\sigma^*=(l_0-m+p-u)\frac{df}{f}\wedge w_\sigma^*+\frac{df}{f}\wedge w_{\sigma-1}^*$$

pour $\sigma\in[-n, h]$ avec la convention $w_{-n-1}^*=0$ et d'après (a)

$$(2)\qquad (-1)^\sigma.\,T_{-p}^\sigma=(-1)^p\,\bar{w}_\sigma^*+dU^\sigma+d\bar{f}\wedge V^\sigma$$

où U^σ et V^σ sont des courants de degré $p-1$ sur $X-\Sigma$. Mais comme les pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z}\square$ sont donnés par des courants à supports dans $\{ f=0 \}$, on a sur $X^*=X-\{ f=0 \}$

$$T^{\sigma}_{-p}=\sum_{-\infty}^{0}(-1)^{|\alpha|}P_{\alpha}\left(z=-m-u,\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{l_0+p}w_{\alpha+\sigma}\wedge\square\right)$$

ce qui donne, compte tenu de la formule de Taylor pour $|f|^{2z}$ en $z=-m-u$

$$(3)\qquad T^{\sigma}_{-p}=\sum_{0}^{\sigma-1}(-1)^{\beta}\frac{(\mathrm{Log}\, f\bar{f})^{\beta}}{\beta!}\bar{f}^{l_0+p}|f|^{-2(m+u)}w_{\sigma-\beta}$$

en particulier on a $T^{\sigma}_{-p}|X^*=0$ pour $\sigma\leqslant 0$.

La variante suivante du lemme D de [2] va nous permettre de calculer les images dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ des $w^*_{\sigma}|X(s_0)$.

LEMME D′. — *Dans la situation de Milnor $f: X\to D$, considérons une forme α de classe C^{∞} et de degré p sur $X^*=X-f^{-1}(0)$ et supposons qu'il existe des courants U, V et W sur X^* vérifiant, au sens des courants sur X^**

$$\alpha=dU+V\wedge df+W\wedge d\bar{f}.$$

Alors pour chaque $s\in D^*=D-\{0\}$, la restriction de α à $X(s)=\{ f=s \}$ est d-fermée. L'élément de $H^p(X(s), \mathbb{C})$ défini par cette classe de De Rham est nul.

Démonstration. — Montrons que la restriction de α à $X(s)$ est d-fermée. Comme la restriction commute avec la différentielle, il suffit de montrer que la restriction de $d\alpha$ à $X(s)$ est nulle. Or $d\alpha=dV\wedge df+dW\wedge d\bar{f}$ au sens des courants sur X^*, et donc on a $d\alpha\wedge df\wedge d\bar{f}\equiv 0$ sur X^*. Comme df ne s'annule pas sur X^*, on en déduit que $d\alpha$ a une restriction nulle sur $\{ f=s \}=X(s)$ pour tout $s\neq 0$.

Reprenons maintenant la construction effectuée dans la preuve du lemme D de [2]. Soit $s_0\in D^*$ et soit D_0 un disque de centre s_0 assez petit pour être contenu dans D^* et pour que l'on ait une trivialisation C^{∞}

$$\begin{tikzcd} F:\ f^{-1}(D_0) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & X(s_0)\times D_0 \arrow[dl] \\ & D_0 & \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{H}_p(X(s_0), \mathbb{Z})$ l'image de $H_p(X(s_0), \mathbb{Z})$ dans $H_p(X(s_0), \mathbb{C})$ et soit $C(s_0)\in\tilde{H}_p(X(s_0), \mathbb{Z})$; notons par C l'unique section horizontale sur D_0 du fibré (trivial) $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$, valant $C(s_0)$ en s_0. Si φ est une $(2n-p)$-forme C^∞ sur $X(s_0)$ à support compact, d-fermée, et représentant l'image du p-cycle $C(s_0)$ dans $H_c^{2n-p}(X(s_0), \mathbb{C})$ via la dualité de Poincaré, posons

$$\Phi = F^*(pr_1^*(\varphi)).$$

Alors Φ est C^∞ d-fermée et à support f-propre sur $f^{-1}(D_0)$ et $\Phi|_{X(s)}$ pour tout s représente l'image de $C(s)$ dans $H_c^{2n-p}(X(s), \mathbb{C})$.

Si on pose $\chi(s) = \int_{C(s)} \alpha$, on a donc $\chi(s) \doteq \int_{X(s)} \alpha \wedge \Phi$. Si $g \in C_c^\infty(D_0)$, on aura

$$\int_{D_0} g(s)\chi(s)\, ds \wedge d\bar{s} = \int_{D_0} g(s)\, ds \wedge d\bar{s} \int_{X(s)} \alpha \wedge \Phi$$

et par Fubini

$$= \int_{f^{-1}(D_0)} \alpha \wedge \Phi \wedge [g(s)\, df \wedge d\bar{f}].$$

Mais $\Phi \wedge [g(s)\, df \wedge d\bar{f}] = \psi$ sur $f^{-1}(D_0)$ vérifie

$$d\psi = 0, \qquad \psi \wedge df = 0, \qquad \psi \wedge d\bar{f} = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi \in C_c^\infty(f^{-1}(D_0)).$$

On a donc

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \alpha \wedge \psi = \langle dU + V \wedge df + W \wedge d\bar{f}, \psi \rangle$$
$$= 0.$$

Ceci montre que la fonction χ, qui est C^∞ sur D_0, définit la distribution nulle sur D_0; elle est donc identiquement nulle et en particulier $\int_{C(s_0)} \alpha = 0$. Ceci prouve que la classe de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ définie par α est nulle (et ce pour tout $s_0 \in D^*$), ce qui achève la démonstration.

Ceci, compte tenu des relations (1), (2) et (3) prouvées ci-dessus, donne les assertions 1, 2 et 3 de la proposition.

Sous l'hypothèse supplémentaire on a, pour $j \leqslant 0$ et $\sigma \leqslant 0$, $T_j^\sigma = 0$ et on peut donc définir $\tilde{T}_j$ courant vectoriel à valeurs dans $\mathbb{C}^h$ de composantes les T_j^σ pour $\sigma \in [1, h]$. On conclut alors de la même manière. Ceci achève la preuve de la proposition.

COROLLAIRE 1 (7). — *Dans la situation de Milnor $f: X \to D$ considérée ci-dessus les blocs de Jordan de T, la monodromie agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$, la cohomologie de la fibre de Milnor en degré p, sont de tailles au plus $p+1$.*

Démonstration. — En effet soit $\pi : \tilde{X} \to X$ est une désingularisation de $\{f=0\}$, c'est-à-dire que $\tilde{X}$ est lisse, π est une modification propre de X et $\{f \circ \pi = 0\}$ est un diviseur à croisements normaux de $\tilde{X}$. Alors les pôles d'ordre $\geqslant p+2$ du prolongement méromorphe de la distribution $\int_X |f \circ \pi|^{2z} \square$ sont concentrés en codimension $\geqslant p+2$: en effet il résulte immédiatement des calculs de [1] que ces pôles sont portés par les intersections d'au moins $p+2$ branches du diviseur $f \circ \pi = 0$ (ceci signifie, pour être précis, que les distributions de la forme

$$P_a\left(z=z_0, \int_{\tilde{X}} |f \circ \pi|^{2z} \square\right) \qquad \text{pour} \quad a \geqslant p+2 \quad \text{et} \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

ont leurs supports dans le sous ensemble analytique fermé de $\tilde{X}$ formé des points au voisinage desquels $f \circ \pi = 0$ a au moins $p+2$ branches irréductibles locales 2 à 2 distinctes).

Mais l'image directe de $|f \circ \pi|^{2z}$ coïncide avec $|f|^{2z}$ au moins pour $\operatorname{Re}(z) \gg 0$, et donc partout.

On obtient, puisque le support de l'image directe d'un courant est contenu dans l'image directe du support, que les pôles d'ordre $\geqslant p+2$ du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \square$ sont contenus dans un ensemble analytique fermé Σ de codimension au moins $p+2$ dans X (on utilise ici le théorème d'image directe de Remmert).

---

(7) On notera que dans [2] on avait obtenu une nouvelle démonstration dans le cadre analytique local du théorème de monodromie (quasi unipotence de la monodromie) mais cette partie du théorème de monodromie manquait.

Prenons alors un bloc de Jordan de taille $\geqslant p+2$ pour $T|H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. Grâce au lemme A de [2] on peut alors trouver $w_1 \ldots w_k \in \Omega^p(X)$, $m \in \mathbb{N}$ et $u \in]0, 1]$ vérifiant

$$dw_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}, \qquad \forall a \in [1, k]$$

(avec la convention $w_0 = 0$) où k est en entier au moins égal à $p+2$ et où les $w_a | H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ forment une base du bloc de Jordan de T considéré.

Appliquons alors la proposition fondamentale avec $h=1$; l'entier l_0 étant arbitraire dans $\mathbb{Z}$, les hypothèses sont vérifiées, puisque de toute façon tous les pôles d'ordre au moins $k \geqslant p+2$ sont portés par Σ. Donc l_0 étant choisi de sorte que l'on ait $l_0 - m + p - u < 0$, le théorème de positivité des exposants caractéristiques de Malgrange (*voir* [M1] ou l'appendice de [3]) combiné avec la relation

$$dw_1^* = (l_0 - m + p - u)\frac{df}{f} \wedge w_1^*$$

montre que $\bar{W}_1 = (0)$ et donc que $W_1 = 0$ où W_1 est l'espace vectoriel engendré par w_1 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. Ceci contredit l'hypothèse que l'on avait effectivement un bloc de Jordan de taille k pour $T|H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ et achève la démonstration de ce corollaire.

Remarque. — Une amélioration de la proposition fondamentale du type contribution « sur-effective » dans le cas où $u=1$ permettrait probablement d'améliorer le corollaire précédent en montrant que pour la valeur propre 1 les blocs de Jordan sont de taille au plus p (pour $p=n$ ce résultat est établi dans [3]).

COROLLAIRE 2 (*voir* [K.M.]). — *Soit $f: X \to D$ la situation de Milnor considérée plus haut, et soit S le lieu singulier de $\{f=0\}$ (8). Si on a* $\operatorname{codim}_X S \geqslant p+2$ *avec $p \geqslant 1$, alors on a $H^q(X(s_0), \mathbb{C}) = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$.*

Démonstration. — Il nous suffit de prouver que pour $1 \leqslant q \leqslant p$ tout vecteur propre de $T|H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ est nul.

(8) S désigne par définition ici $\{x \in X / df_x = 0\}$.

Commençons par considérer le cas d'une valeur propre $\lambda = e^{-2i\pi u} \neq 1$ (donc $0 < u < 1$). D'après le lemme A de [2] on peut trouver une q-forme holomorphe w sur X et un entier $m \in \mathbb{N}$, de manière à avoir

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \text{sur } X$$

et $w|_{X(s_0)}$ induisant un vecteur propre de T agissant sur $H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ pour la valeur propre $\lambda = e^{-2i\pi u}$. Appliquons alors la proposition fondamentale avec $k = h = 1$, $\Sigma = S$. L'hypothèse est alors vérifiée pour tout $l_0 \in \mathbb{Z}$ car tout pôle de $\int_X |f|^{2z} \square$ n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ est porté par S ([9]). On conclut alors à la nullité de $w | H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ comme dans la preuve du corollaire 1.

Traitons maintenant le cas $\lambda = 1$. Il nous suffit de montrer que si $\gamma_0 \in H_q(X(s_0), \mathbb{C})$ vérifie $T\gamma_0 = \gamma_0$ alors on a $\gamma_0 = 0$. Supposons le contraire. Notons par $\gamma(s)$ la section horizontale du fibré de Gauss-Manin $s \to H_q(X(s), \mathbb{C})$ qui vérifie $\gamma(s_0) = \gamma_0$. Elle est uniforme sur D^*. En considérant une décomposition de Jordan de T (et simultanément de T^* agissant sur $H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ on peut trouver des éléments $e_1 \ldots e_k \in H^q(X(s_0), \mathbb{C})$ engendrant un bloc de Jordan de T^* et vérifiant :

$$\langle e_k, \gamma_0 \rangle = 1, \qquad \langle e_a, \gamma_0 \rangle = 0 \quad \text{pour } a \in [1, k-1]$$

Notons par $w_1 \ldots w_k$ des q-formes holomorphes sur X vérifiant

$$dw_a = m\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}, \qquad \forall j \in [1, k]$$

(avec la convention $w_0 = 0$)

$$w_a/X(s_0) \quad \text{induisant } e_a \text{ dans } H^q(X(s_0), \mathbb{C})$$

(*voir* [2] lemme A).

Soit Γ le $(q+1)$-cycle de $X - \{f = 0\}$ obtenu en suivant horizontalement le cycle γ_0 le long du cercle $|s| = |s_0|$ (la T-invariance de γ_0 permet aisément de se convaincre que Γ est bien défini comme $(q+1)$-cycle de

---

([9]) Voir le théorème 2 de [1] en tenant compte du fait que l'hypothèse implique que $\{f = 0\}$ est réduite.

$X-\{f=0\}$). Montrons que l'on a

$$\int_\Gamma \frac{w_a}{f^m} \wedge \frac{df}{f} = 0 \qquad \text{pour} \quad a \in [1, k-1]$$

et

$$\int_\Gamma \frac{w_k}{f^m} \wedge \frac{df}{f} = \pm \frac{2i\pi}{s_0^m}.$$

En effet, on a

$$\int_\Gamma \frac{w_1}{f^m} \wedge \frac{df}{f} = \int_0^{2\pi} \pm i\, d\theta \int_{\gamma(|s_0|e^{i\theta})} \frac{w_1}{f^m}$$

Mais

$$s\frac{\partial}{\partial s}\int_{\gamma(s)} w_1 = s\int_{\gamma(s)} \nabla w_1 = m\int_{\gamma(s)} w_1.$$

Donc

$$\int_{\gamma(s)} \frac{w_1}{f^m} = \left(\frac{s}{s_0}\right)^m \int_{\gamma(s_0)} w_1 \equiv 0$$

car $\int_{\gamma(s_0)} e_1 = 0$ par hypothèse.

Supposons montrer, par récurrence, que l'on ait

$$\int_{\gamma(s)} w_a \equiv 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant a \leqslant k-2$$

et montrons le pour w_{a+1}.

On a encore

$$\int_\Gamma w_{a+1} \wedge \frac{df}{f} = \int_0^{2\pi} \pm i\, d\theta \int_{\gamma(|s_0|e^{i\theta})} w_{a+1}$$

et

$$s\frac{\partial}{\partial s}\int_{\gamma(s)} w_{a+1} = s\int_{\gamma(s)} \nabla w_{a+1} = m\int_{\gamma(s)} w_{a+1} + \int_{\gamma(s)} w_a.$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a alors

$$s\frac{\partial}{\partial s}\int_{\gamma(s)} w_{a+1}=m\int_{\gamma(s)} w_{a+1}$$

et donc

$$\int_{\gamma(s)} w_{a+1}=\left(\frac{s}{s_0}\right)^m\int_{\gamma_0} w_{a+1}=0$$

car $\int_{\gamma_0} e_{a+1}=0$ par hypothèse.

On en déduit alors que $\int_{\gamma(s)} w_{k-1}\equiv 0$ et par le même raisonnement, mais en utilisant maintenant $\int_{\gamma_0} e_k=1$, que

$$\int_{\gamma(s)} w_k=\left(\frac{s}{s_0}\right)^m$$

et donc

$$\int_{\Gamma}\frac{w_k}{f^m}\wedge\frac{df}{f}=\int_0^{2\pi}\pm i\,d\theta\int_{\gamma(|s_0|e^{i\theta})}\frac{w_k}{f^m}$$

donc

$$\int_{\Gamma}\frac{w_k}{f^m}\wedge\frac{df}{f}=\pm\frac{2i\pi}{s_0^m}.$$

Pour obtenir une contradiction (qui montrera que l'hypothèse $\gamma_0\neq 0$ était absurde) il nous suffit donc, d'après la formule de Stokes, de montrer que $w_k/f^m\wedge df/f$ est d-exacte dans $X-\{f=0\}$. Mais la nullité de $H^{q+1}(X-\{f=0\},\mathbb{C})$ résulte facilement de [HL] (théorème 0.2.1) pour $1\leqslant q\leqslant p$. Ceci achève la preuve du corollaire 2.

On remarquera que ce corollaire 2 généralise le résultat de Milnor sur la cohomologie de la « fibre de Milnor » d'une fonction à singularité isolée (bien que beaucoup moins précis, puisque l'on a seulement annulation au niveau de la cohomologie).

La proposition fondamentale va nous permettre de prouver le résultat suivant

THÉORÈME 1. — *Soit $f: X \to D$ un représentant de Milnor* ([10]) *d'un germe de fonction holomorphe non constante à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $u \in]0, 1]$, $p \in [1, n]$, $m \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 1$ un entier. Soit $w_1, \ldots, w_k$ des p-formes holomorphes sur X vérifiant*

$$dw_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1} \qquad \text{pour} \quad a \in [1, k]$$

avec la convention $w_0 = 0$. Soit $s_0 \in D^* = D - \{0\}$ un point base, et notons par W le sous-espace vectoriel de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ engendré par les $w_a | X(s_0)$ (ici $X(s_0) = f^{-1}(s_0)$ est la fibre de Milnor de f, qui est lisse et de Stein, et les $w_a | X(s_0)$ sont des p-formes holomorphes d-fermées sur $X(s_0)$ vue de la relation ci-dessus). Alors il existe des p-formes holomorphes $w_1^*, \ldots, w_k^*$ sur X et $m' \in [0, p]$ vérifiant

(i) *$dw_a^* = (m' + (1-u))(df/f) \wedge w_a^* + (df/f) \wedge w_{a-1}^*$ pour $a \in [1, k]$ avec la convention $w_0^* = 0$;*

(ii) *les classes des $w_a^* | X(s_0)$ dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ engendrent le conjugué complexe $\bar{W}$ du sous-espace W pour la conjugaison complexe banale de :*

$$H^p(X(s_0), \mathbb{C}) = H^p(X(s_0), \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe des p-formes holomorphes w_a^{**} pour $a \in [1, k]$ et un entier m'' qui sera dans $[0, p]$ pour $u \neq 1$ et dans $[-1, p-1]$ pour $u = 1$, vérifiant :*

(i) *$dw_a^{**} = (m'' + u)(df/f) \wedge w_a^{**} + (df/f) \wedge w_{a-1}^{**}$ pour $j \in [1, k]$ avec la convention $w_0^{**} = 0$;*

(ii) *W est engendré par les images dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ des $w_a^{**}/X(s_0)$.*

Preuve du corollaire. — Il suffit, après avoir appliqué une première fois le théorème, de l'appliquer à nouveau aux w_a^*.

([10]) Nous utiliserons que X est lisse de dimension complexe $n+1$, de Stein est contractible, et que $f: X^* \to D^*$ est une fibration C^∞ localement triviale sur $D^* = D - \{0\}$ où $X^* = X - f^{-1}(0)$.

Démonstration du théorème 1. — Compte tenu de la proposition fondamentale, il nous suffit de montrer que $l_0 = m+1$ satisfait l'hypothèse ([11]) de la dite proposition. Ceci est donné par le lemme suivant (puisque $l_0 - m - u$ est alors positif).

LEMME2. — *Soit X une variété complexe lisse et connexe de dimension $n+1$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Soient k et m deux entiers naturels et soit η une forme différentielle C^∞ de type $(n+1,\ n+1)$ à support compact dans X.*

Alors le prolongement méromorphe de

$$F(z) = \int_X |f|^{2z} f^{-m} \bar{f}^k \eta$$

n'a pas de pôles pour $\mathrm{Re}(z) > -k$.

Démonstration. — Le problème est local; on peut alors supposer que X est un voisinage assez petit de 0 dans C^{n+1} et que l'on a $f(0)=0$.

Soit b le polynôme de Bernstein-Sato de f ([12]) et soit P un opérateur différentiel holomorphe sur X dépendant polynomialement de λ et vérifiant

$$\text{(B-S)} \qquad P f^{\lambda+2k+m} = b(\lambda+k) \ldots b(\lambda+2k+m-1) f^{\lambda+k}.$$

Notons par Q le conjugué de P c'est un opérateur différentiel antiholomorphe dépendant polynomialement de $\bar{\lambda}$) et par Q^* l'adjoint de Q. En conjuguant l'identité (B-S) ci-dessus et en substituant z à $\bar{\lambda}$, on obtient

$$\int_X |f|^{2z} f^{-m} \bar{f}^k \eta$$

$$= \frac{1}{b(z+k) \ldots b(z+2k+m-1)} \int_X |f|^{2z} f^{-m} \bar{f}^{2k+m} Q^*[\eta]$$

égalité valable au moins pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ (on utilise ici la O_X linéarité de l'action de Q).

([11]) Ainsi que l'hypothèse complémentaire; on prend $h=k$ et $\Sigma = \varnothing$.

([12]) *Voir* [BJ] ch. 6 ou [K].

Comme l'intégrale du membre de droite donne une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(z+k) \geqslant 0$ ([13]), le prolongement méromorphe du membre de gauche à la bande $\mathrm{Re}(z+k)>0$ se lit sur le membre de droite. Mais M. Kashiwara a prouvé (*voir* [K] ou [BJ], ch. 6, § 1, th. 1.1) que les zéros de b sont des rationnels strictement négatifs, ce qui permet immédiatement de conclure.

Ceci achève la preuve du théorème.

Remarque. – Comme le système reliant les restrictions à $X(s_0)$ des w_j^* et des w_j est triangulaire, on a en fait passage par conjugaison complexe de la filtration

$$W_h = \{\{w_1, \ldots, w_h\}\} \text{ de } W \text{ à}$$
$$W_h^* = \{\{w_1^*, \ldots, w_h^*\}\} \text{ de } W^* = \bar{W};$$

c'est-à-dire $W_h^* = \bar{W}_h$.

En particulier $w_1 \neq 0 \Leftrightarrow w_1^* \neq 0$ dans $H^p(X(s_0)\mathbb{C})$.

THÉORÈME 2. – *Soit $f: X \to D$ un représentant de Milnor d'un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si T_p, la monodromie agissant sur la cohomologie de degré $p \geqslant 1$ de la fibre de Milnor, admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ avec $0 \leqslant u < 1$ alors le prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2z} \square$ admet en $-p-u$ un pôle d'ordre au moins égal à k. De plus les parties polaires d'ordre $\geqslant k$ en $-p-u$ ne sont pas contenues dans un sous-ensemble analytique fermé de X de codimension $\geqslant p+2$* ([14]).

Preuve du théorème 2. – Le lemme A de [2] permet de trouver un entier $m \in \mathbb{N}$ et des p-formes holomorphes $w_1, \ldots, w_k$ sur X vérifiant

$$dw_a = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w_a + \frac{df}{f} \wedge w_{a-1}$$

([13]) Comprendre holomorphe sur $\mathrm{Re}(z+k)>0$ et l^∞_{loc} au bord.

([14]) Ceci signifie qu'il n'existe pas Σ analytique fermé de codimension $\geqslant p+2$ dans X tel que pour tout $a \geqslant k$ le support du courant

$$P_a\left(z=-p-u, \int_X |f|^{2z} \square\right)$$

soit contenu dans Σ.

pour $a \in [1, k]$ avec la convention $w_0 = 0$. On aura de plus $w_1 | X(s_0)$ qui induit un élément non nul de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. En appliquant le corollaire 1 du théorème 1 on peut supposer $m \in [0, p]$ sans perdre cette dernière condition grâce à la remarque qui suit la preuve du théorème.

Montrons que si $\int_X |f|^{2z} \square$ n'a pas de pôle d'ordre $> k-1$ en $z = -p-u$ il en est de même pour $\int_X |f|^{2z} (df/f) \wedge w_a \wedge \square$ pour $a \in [1, k]$. C'est clair pour $a = 1$ car on a $df/f \wedge w_1 = (1/(m+u))\, dw_1$ qui est holomorphe donc C^∞ [$m \in [0, p]$ et $0 \leqslant u < 1 \Rightarrow m+u > 0$, *voir* (15)]. Si cette condition est réalisée pour w_{a-1}, comme $\int_X |f|^{2z} dw_a \wedge \square$ n'a pas de pôle d'ordre strictement plus grand que $k-1$ en $z = -p-u$, l'ordre du pôle éventuel de $\int_X |f|^{2z} (df/f) \wedge w_a \wedge \square$ sera le même que celui de $\int_X |f|^{2z} (df/f) \wedge w_{a-1} \wedge \square$ d'où l'assertion par récurrence. Posons $l_0 = m - p$.

Donc $\int_X |f|^{2z} \bar{f}^{l_0} (df/f) \wedge w_k \wedge \square$ n'a pas de pôle d'ordre $> k-1$ en $z = -m-u$ $\left(\text{sous l'hypothèse, que l'on veut montrer absurde, que } \int_X |f|^{2z} \square \text{ n'ait pas de pôle d'ordre } > k-1 \text{ en } z = -p-u\right)$.

Appliquons alors la proposition fondamentale avec $h = 1$; on obtient alors des formes holomorphes w_a^* pour $a \in [-n, 1]$ vérifiant les propriétés 1, 2, 3 de cette proposition, avec de surcroit la propriété supplémentaire que $w_1^* | X(s_0)$ n'induit pas 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ (car $w_1 | X(s_0)$ n'induit pas 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$; *voir* la remarque qui suit la preuve du théorème 1).

---

(15) Même pour $u = 0$! D'après la positivité des exposants caractéristiques on a $m \geqslant 1$ pour $u = 0$ (*voir* l'appendice de [3]), puisque $p \geqslant 1$.

On aura en particulier

$$dw_1^* = (l_0 - p + m - u)\frac{df}{f} \wedge w_1^* + \frac{df}{f} \wedge w_0^*$$

et on sait que w_0 induit 0 dans $H^p(X(s), \mathbb{C})$ pour tout $s \in D^*$. Comme $p - m + l_0 = 0$ on a

$$dw_1^* = -u\frac{df}{f} \wedge w_1^* + \frac{df}{f} \wedge w_0^*.$$

Soit $\gamma(s)$ une section horizontale du fibré de Gauss-Manin $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$ sur D^* vérifiant $\int_{\gamma(s_0)} w_1^* = 1$ (ceci existe car $w_1^* \mid X(s_0)$ n'induit pas 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$). Posons alors, pour $s \in D^*$

$$F(s) = \int_{\gamma(s)} w_1^*.$$

On a

$$s\frac{\partial}{\partial s}(F(s)) = \int_{\gamma(s)} [-uw_1^* + w_0^*] = -u\,F(s)$$

puisque $w_0^* \mid X(s)$ induit 0 dans $H^p(X(s), \mathbb{C})$ pour $s \in D^*$. On aura donc

$$F(s) = \left(\frac{s}{s_0}\right)^{-u} \quad \text{sur } D^* \qquad \text{avec} \quad u \geqslant 0$$

ce qui contredit le théorème de positivité des exposants caractéristiques de Malgrange (*voir* [M1] ou l'appendice de [3]). Ceci montre donc que l'hypothèse faite, que $\int_X |f|^{2z} \square$ n'ait pas un pôle d'ordre $\geqslant k$ en $z = -p - u$ est absurde, ce qui achève la démonstration du théorème 2 ([16]).

Remarques. — 1. Le théorème précédent implique en particulier que si b désigne le polynôme de Bernstein-Sato de f en 0 (quitte à prendre X

([16]) Pour vérifier l'assertion sur les supports il suffit de considérer que le raisonnement précédent a été effectué sur $X - \Sigma$ avec Σ analytique fermé de codimension $\geqslant p + 2$.

assez petit on peut supposer que l'identité correspondante a lieu sur X), sous l'hypothèse qu'il existe un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ de la monodromie agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$, on a au moins k racines de b (en comptant les multiplicités) de la forme $-q-u$ avec $q\in[0, p]$ $(0\leqslant u<1)$. Ceci conduit au critère suivant.

Critère. — Soit $0\leqslant u<1$ et $p\in[1, n]$. Si b admet au plus k racines (en comptant les multiplicités) de la forme $-q-u$ avec $q\in[0, p]$, alors la monodromie locale de f en un point voisin de 0, en degré p, admet $e^{-2i\pi u}$ comme valeur propre avec une multiplicité $\leqslant k$. Ici $k=0$ est permis (et alors $e^{-2i\pi u}$ n'est pas valeur propre...).

2. Si on a $b(\alpha)=0$ avec $\alpha\leqslant -(n+1)$ alors il existe $\beta> -(n+1)$ vérifiant $b(\beta)=0$ et $\beta-\alpha\in\mathbb{N}$. En effet le résultat de Malgrange [M2] permet d'affirmer que $e^{2i\pi\alpha}$ est valeur propre pour la monodromie locale de f en un point assez voisin de 0, ce qui permet de conclure grâce au théorème 2 et au fait que le polynôme de Bernstein-Sato de f en un point assez voisin de 0 divise b.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration dans les fibres, *Inv. Math.*, vol. 68, 1982, p. 129-174.

[2] Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, t. 17, 1984, p. 293-315.

[3] Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 34, fasc. 4, 1984, p. 75-107.

[4] Contribution effective dans le réel, *Comp. Math.*, vol. 56, 1985, p. 351-359.

[BJ] BJORK (J. E.). — Rings of differential operators, North Holland, 1979.

[H] HAMM (H.). — Zür analytischen und algebraichen Beschreibung der Picard-Lefchetz Monodromie, *Habilitationsschrift*, Göttingen, 1974.

[HL] HAMM (H.) et LÊ DŨNG TRÁNG. — Un théorème de Zariski de type Lefschetz, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, t. 6, 1973, p. 317-366.

[K] KASHIWARA (M.). — B-Functions and holonomic systems, *Inv. Math.*, vol. 38, 1976, p. 33-53.

[K.M.] KATO (M.) et MATSUMOTO (Y.). — On the connectivity of the Milnor fiber of a holomorphic function at a critical point, Manifold Tokyo, 1973, University of Tokyo Press, 1975.

[L.T.] LÊ DŨNG TRÁNG et TEISSIER (B.). — Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II, *Proceedings of Symposia in Pure Math.*, vol. 40, part. 2, 1983, p. 65-103.

[L] LOJASIEWICZ (S.). — Triangulation of semi-analytic sets, *Ann. Scuola Norm. Sup.*

Pisa Sc. Fist. Mat., sér. 3, vol. 18, fasc. 4, 1964, p. 449-474.

[M1] MALGRANGE (B.). — Intégrales asymptotiques et monodromie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4ᵉ série, t. 7, 1974, p. 405-430.

[M2] MALGRANGE (B.). — Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, *Astérisque*, 101-102, 1983, p. 230-242.

[$\mathscr{M}$] MILNOR (J.). — Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies*, n° 61, Princeton, 1968.