

BULLETIN DE LA S. M. F.

ZHI-YING WEN

Sur quelques théorèmes de convergence du processus de naissance avec interaction des voisins

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 403-429

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__403_0

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES THÉORÈMES DE CONVERGENCE
DU PROCESSUS DE NAISSANCE
AVEC INTERACTION DES VOISINS**

par

ZHI-YING WEN (*)

RÉSUMÉ. — On étudie une classe de processus de naissance qui généralisent les processus de Galton-Watson classiques en ce sens que la population est structurée et qu'une certaine dépendance est autorisée entre les descendance de voisins. On obtient des conditions nécessaires et suffisantes à la non dégénérescence du processus et à l'existence de moments. On établit aussi un théorème de limite centrale et une loi du logarithme itéré.

ABSTRACT. — This paper deals with a class of birth processes which generalize the classical Galton-Watson processes: the population is given a structure and some statistical dependence is allowed between the offsprings of neighbours. Necessary and sufficient conditions are given in order the process of non-degenerate and moments exist. A central limit theorem and a law of iterated logarithm are also established.

Introduction

Les processus de Galton-Watson classiques ont été étudiés par de nombreux auteurs dont S. ASMUSEEN ([1], [2]), K. B. ATHREYA [3], T. E. HARRIS [5], C. C. HEYDE ([6], [7], [8]). L'étude de divers modèles de B. Mandelbrot a conduit J. PEYRIÈRE ([10], [11], [12]) à introduire des processus de naissance qui diffèrent des processus de Galton-Watson sur deux points. Le premier est que la population à l'instant n est arrangée en graphe, le second est qu'une certaine dépendance est autorisée entre les

(*) Texte reçu le 16 octobre 1984.

Zhi-Ying WEN, Université Paris-XI, Bât. n° 425, U.R. 754, 91405 Orsay Cedex.

descendances des individus d'une même génération. Dans cet article nous étudions ces processus dans le cas où il y a un seul type d'individus.

Dans la section 1 de cet article, on étudiera la condition de non-dégénérescence, et dans la section 2, on discutera de l'existence de moments et de la convergence dans L^p ($1 < p \leq 2$). Dans [12], J. PEYRIÈRE a démontré le théorème de limite centrale pour ce processus, on donnera deux nouvelles démonstrations de ce théorème; elles paraissent plus simples et plus directes. En appliquant un théorème de V. SHERGIN [13] et la méthode de S. ASMUSEEN [2], une loi de logarithme itéré sera démontré dans la section 4. Tous les résultats sont obtenus dans les mêmes conditions que celle du processus de Galton-Watson.

Dans cet article, on adoptera les notions suivantes :

On note X_n le nombre d'individus à la n -ième génération, on suppose toujours $X_0 = 1$; les $\gamma_{n,i}$ ($n=0, 1, 2, \dots, i=1, 2, \dots$) représentent le nombre de descendants du i -ième individu de la n -ième génération, ils ont la même distribution que γ . Comme pour le processus de Galton-Watson, on a

$$X_n = \sum_{i=0}^{X_{n-1}} \gamma_{n,i}$$

On note F la fonction de distribution de γ , m l'espérance de γ , σ^2 sa variance, \mathcal{F}_n la σ -algèbre engendrée par les $\gamma_{k,i}$, $k=0, 1, \dots, n-1$, $i=1, 2, \dots$

En outre, on suppose que

$$p_0 = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 1) = P(\gamma = 0) = 0,$$

$$p_1 = P(\gamma = 1) < 1, \quad m = E(\gamma) < \infty.$$

On dit qu'une suite $\{X_n\}_{n \geq 0}$ de variables aléatoires est l -dépendante, s'il existe un entier l , tel que, quels que soient X_r, X_s satisfaisant $|r-s| > l$, les X_r et X_s sont indépendantes. On supposera que, pour chaque n , la suite $\{\gamma_{n,i}\}_i$ est l -dépendante. Nous appellerons le processus $\{X_n\}$, processus de Galton-Watson l -dépendant.

1. La condition de non-dégénérescence

D'abord, on établit quelques lemmes et propositions.

PROPOSITION 1.1. — Soit $Z_n = X_n/m^n$, alors on a

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = m X_n;$$

(i) $E(X_{n+1} | X_0 = 1) = m E(X_n | X_0 = 1) = m^{n+1};$
 $E(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = m^k X_n.$

(ii) $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale positive, elle converge donc presque sûrement vers une limite que l'on note Z ; en outre

$$0 \leq Z < \infty, \text{ p. s.,}$$

$$E(Z | \mathcal{F}_0) \leq Z_0, E(Z | Z_0 = 1) \leq 1.$$

La démonstration est facile et on l'omet.

PROPOSITION 1.2. — X_n tend vers l'infini presque sûrement.

Démonstration. — Si X_n ne tend pas vers l'infini, alors la suite X_n est constante à partir d'un certain rang n_0 , alors, si $n \geq n_0$

$$P(X_{n+1} = X_n | X_{n_0}) \leq p_1$$

alors

$$P(X_{n_0+k} = X_{n_0+k-1} = \dots = X_{n_0} | X_{n_0}) \leq p_1^k.$$

Remarquons $p_1 < 1$, donc p_1^k tend vers zéro quand k tend vers zéro quand k tend vers l'infini, ce qui achève la démonstration.

On dira que $(n + 1, j)$ descend de (n, i) si l'on a, $i \leq X_n$ et

$$\sum_{1 \leq l < i} \gamma_{n, l} < j \leq \sum_{1 \leq l \leq i} \gamma_{n, l}$$

$(n + k, j)$ descend de (n, i) s'il existe une suite $j_0, j_1, j_2, \dots, j_k$ telle que $j_0 = i$, $j_k = j$ et telle que $(n + l, j_l)$ descende de $(n + l - 1, j_{l-1})$ pour $l = 1, 2, \dots, k$.

Maintenant, on note $X_{N, i}$ le i -ième individu de la n -ième génération, et $Z_{N, i}$ la limite correspondant à la proposition 1.1 (ii) appliquée à $X_{N, i}$; soit $X_{N, i, k}$ le nombre d'éléments de la génération $N + k$ descendant de $X_{N, i}$, alors, on a

$$X_{N, i, k} = \text{nombre de } (N + k, j) \text{ qui descendent de } (N, i)$$

et

$$Z_{N, i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m^k} X_{N, i, k}$$

mais

$$X_{N+k} = \sum_{i=1}^{X_N} X_{N, i, k}$$

donc

$$\begin{aligned} Z &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{N+k}}{m^{N+k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{m^N} \sum_{i=1}^{X_N} \frac{X_{N, i, k}}{m^k} \\ &= \frac{1}{m^N} \sum_{i=1}^{X_N} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_{N, i, k}}{m^k} = \frac{1}{m^N} \sum_{i=1}^{X_N} Z_{N, i} \end{aligned}$$

Donc on a démontré

LEMME 1.1. — Les $Z_{N, i}$, $i=1, 2, \dots, X_{N-1}$ sont l -dépendantes conditionnellement à \mathcal{F}_n , avec $P(Z_{N, i} \leq \alpha | \mathcal{F}_N) = P(Z \leq \alpha | X_0 = 1)$; en outre on a

$$Z = \frac{1}{m^N} \sum_{i=1}^{X_N} Z_{N, i}$$

PROPOSITION 1.1.3. — $P(Z > 0) > 0$ entraîne $P(Z > 0) = 1$.

Démonstration. — Compte tenu de l'hypothèse $P(Z > 0) > 0$, on a

$$q = P(Z = 0) < 1.$$

En utilisant le théorème de convergence des martingales [14], on a

$$\begin{aligned} I(Z=0) &= P(Z=0 | \mathcal{F}_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z=0 | \mathcal{F}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{n, i}=0, i=1, 2, \dots, X_n | \mathcal{F}_n) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{n, 1}=0, Z_{n, 1+(l+1)}=0, \dots, Z_{n, 1+(l+1)[(X_n-1)/(l+1)}=0 | \mathcal{F}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{(X_n-1)/(l+1)} P(Z_{n, 1+i(l+1)}=0 | \mathcal{F}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} q^{(X_n-1)/(l+1)} = 0, \quad \text{P. S.} \end{aligned}$$

les trois dernières égalités sont dues respectivement au lemme 1.1 et à la proposition 1.2.

Maintenant, énonçons le théorème principal de cette section.

THÉORÈME 1.1. — Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $Z_n \rightarrow Z$ dans L^1 ;
- (ii) $E(Z) = 1$;

(iii) $P(Z > 0) = 1;$

(iv) $E(\gamma \log \gamma) = \int_0^\infty x \log^+ x dF(x) < \infty.$

Démonstration. — On a

$$Z = 1 + \sum_{i=1}^{X_N} \{Z_{n+1} - Z_n\}$$

grâce à la proposition 1.1 (ii), $\{Z_{n+1} - Z_n\}_{n \geq 0}$ est une suite d'incrémentes de martingale, on l'approchera par une autre suite d'incrémentes de martingale bornée dans L^2 . On pose

(1.1') $Z'_{n+1} = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,i} I(\gamma_{n,i} \leq m^n)$

(1.1) $R_n = Z_n - E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(Z_{n+1} - Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)$
 $= \frac{1}{m^{n+1}} E(\sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,i} I(\gamma_{n,i} > m^n) | \mathcal{F}_n)$

$$= \frac{Z_n}{m} \int_{m^n}^\infty x dF(x)$$

donc, la suite $\{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\}_{n \geq 0}$ est une suite d'incrémentes de martingale.

LEMME 1.2. — On a

- (i) $\sum_{n=0}^\infty (P(Z'_{n+1} = Z_{n+1})) < \infty;$
- (ii) $\sum_{n=0}^\infty (\text{Var}(Z'_{n+1} - Z_n + R_n)) < \infty;$
- (iii) $\sum_{n=0}^\infty ER_n = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^\infty \int_{m^n}^\infty x dF(x) < \infty$

si et seulement si

$$\int_0^\infty x \log^+ x dF(x) < \infty.$$

Démonstration. — (i) Soit

$$\Delta_n = \cup_{i=1}^{X_n} \{\omega; \gamma_{n,i} > m^n\}$$

alors

$$P(Z'_{n+1} \neq Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(1_{\Delta_n} | \mathcal{F}_n)$$

on a

$$E(1_{\Delta_n} | \mathcal{F}_n) \leq X_n \int_{m^n}^{\infty} dF(x)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(Z'_{n+1} \neq Z_{n+1}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} E X_n \int_{m^n}^{\infty} dF(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} m^n \int_{m^n}^{\infty} dF(x) \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m^n I(x > m^n) dF(x), \end{aligned}$$

pour x fixé, il existe un k , tel que $m^k \leq x < m^{k+1}$, donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^n I(x > m^n) = \sum_{n=0}^k m^n = \frac{m^k - 1}{m - 1} < \frac{mx}{m - 1} = O(x),$$

ce qui entraîne (i).

(ii) D'abord, remarquons

$$\begin{aligned} E(Z'_{n+1} E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)) &= E[E(Z'_{n+1} E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)) | \mathcal{F}_n] \\ &= E[E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)]^2, \end{aligned}$$

d'après (1.1)', on a

$$\text{Var}\{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\} = \text{Var}\{Z'_{n+1} - E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)\} = E[\text{Var}(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)].$$

maintenant, on pose

$$\begin{aligned} A_n &= E(\gamma_{n,i} I(\gamma_{n,i} \leq m^n)) = \int_0^{m^n} x dF(x), \\ B_n &= E(\gamma_{n,i}^2 I(\gamma_{n,i} \leq m^n)) = \int_0^{m^n} x^2 dF(x), \end{aligned}$$

par suite, on estime la variance conditionnelle de Z'_{n+1} ,

$$(1.2) \quad E(Z'_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m^{2n+2}} E[\sum_{i,j=1}^{X_n} \gamma_{n,i} \gamma_{n,j} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) I(\gamma_{n,j} \leq m^n) | \mathcal{F}_n] \\
 &= \frac{1}{m^{2n+2}} E[\sum_1 + \sum_2 | \mathcal{F}_n]
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \sum_1 &= \sum_{|i-j| > l} \gamma_{n,i} \gamma_{n,j} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) I(\gamma_{n,j} \leq m^n); \\
 \sum_2 &= \sum_{|i-j| \leq l} \gamma_{n,i} \gamma_{n,j} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) I(\gamma_{n,j} \leq m^n).
 \end{aligned}$$

Remarquons les faits suivants :

(1) si $|i-j| > l$, les $\gamma_{n,i}$ et $\gamma_{n,j}$ sont indépendants, donc

$$\begin{aligned}
 E[\gamma_{n,i} \gamma_{n,j} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) I(\gamma_{n,j} \leq m^n)] \\
 &= E(\gamma_{n,i} I(\gamma_{n,i} \leq m^n)) \cdot E(\gamma_{n,j} I(\gamma_{n,j} \leq m^n)) \\
 &= A_n^2;
 \end{aligned}$$

(2) si $|i-j| \leq l$, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
 E(\gamma_{n,i} \gamma_{n,j} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) I(\gamma_{n,j} \leq m^n)) \\
 &\leq [E(\gamma_{n,i}^2 I(\gamma_{n,i} \leq m^n)) \cdot E(\gamma_{n,j}^2 I(\gamma_{n,j} \leq m^n))]^{1/2} \\
 &= B_n;
 \end{aligned}$$

(3) par calcul, on obtient que le nombre des termes de \sum_2 est

$$\beta_n = (2l + 1) X_n - l(l + 1)$$

[ou bien $(2l + 1) X_n + O(1)$], donc, on en déduit

$$(1.3) \quad E(\sum_1 | \mathcal{F}_n) = (X_n^2 - X_n - \beta_n) A_n^2$$

$$(1.4) \quad E(\sum_2 | \mathcal{F}_n) \leq \beta_n B_n$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad [E(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n)]^2 &= \frac{1}{m^{2n+2}} [E(\sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,i} I(\gamma_{n,i} \leq m^n) | \mathcal{F}_n)]^2 \\
 &= \frac{X_n^2 A_n^2}{m^{2n+2}}
 \end{aligned}$$

Compte tenu de (1.2) à (1.5), on a

$$\text{Var}(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \frac{\beta_n B_n}{m^{2n+2}} \leq \frac{c X_n B_n}{m^{2n+2}}$$

où c est une constante positive.

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Var}\{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} E \text{Var}(Z'_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &\leq \frac{c}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{m^n} = \frac{c}{m^2} \int_0^{\infty} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(x < m^n)}{m^n} dF(x), \end{aligned}$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{I(x \leq m^n)}{m^n} = O\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui entraîne (ii).

(iii) Remarquons (1.1) et $EZ_n = 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} ER_n &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\frac{Z_n}{m} \int_{m^n}^{\infty} x dF(x)\right) \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} x \sum_{n=0}^{\infty} I(x > m^n) dF(x), \end{aligned}$$

on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} I(x > m^n) = O(\log x)$$

donc (iii) est vrai. \square

Utilisant les théorèmes de convergence des martingales [14], le lemme de Borel-Cantelli et le lemme 1.2, on obtient

LEMME 1.3. — (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \{Z'_{n+1} - Z_n + R_n\}$ converge presque sûrement et dans L^2 ;

(ii) $Z_n = Z'_n$ à partir d'un certain rang.

Démonstration du théorème 1.1. — L'équivalence entre (i) et (ii) du théorème 1.1 est due à la théorie des martingales ([14], pp. 319-320). Parce que $EZ = 1$ implique $P(Z > 0) > 0$, donc, par la proposition 1.2, aussi (iii).

Pour démontrer le théorème, il nous reste à démontrer que (iii) implique (iv) et (iv) implique (ii).

(iii)⇒(iv). Soit $Z^* = \text{knf}_n Z_n$. Si $Z^*(\omega) = 0$, il existe une sous-suite Z_{n_k} tel que $Z_{n_k} \rightarrow 0$, quand $k \rightarrow \infty$; mais $Z_n \rightarrow Z$, presque sûrement, on a donc presque sûrement $\{\omega; Z^*(\omega) = 0\} \subset \{\omega = 0\}$; clairement, $Z(\omega) = 0$ implique $Z^*(\omega) = 0$, on obtient donc

$$P(Z^* > 0) = P(Z > 0) = 1.$$

Par le lemme 1.3, nous avons vu que $\sum_{n=0}^{\infty} \{Z_{n+1} - Z_n + R_n\}$ converge presque sûrement, d'autre part, observons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (Z'_{n+1} - Z_n) = Z - 1,$$

alors, $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converge presque sûrement. Par conséquent, on a presque sûrement

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} R_n \geq \frac{Z^*}{m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{m^n}^{\infty} x dF(x) \right),$$

mais $P(Z^* > 0) = 1$, donc il existe un ω , tel que $Z^*(\omega) > 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{m^n}^{\infty} x dF(x) < \infty.$$

D'après le lemme 1.2 (iii), ce qui entraîne

$$\int_0^{\infty} x \log^+ x dF(x) < \infty. \quad \square$$

(iv)⇒(i). Si

$$\int_0^{\infty} x \log^+ x dF(x) < \infty,$$

par le lemme 1.2 (iii), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ER_n < \infty.$$

Grâce à $R_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converge dans L^1 , et il en est de même pour $\sum_{n=0}^{\infty} \{Z'_{n+1} - Z_n\}$ par le lemme 1.3 (i), donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\sum_{N+1}^{\infty} (Z'_{n+1} - Z_n)] = 0,$$

mais $Z_{n+1} \geq Z'_{n+1}$ et $EZ_n = 1$, on en déduit que

$$EZ = E\left[1 + \sum_{n=0}^N (Z_{n+1} - Z_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Z_{n+1} - Z_n)\right] \\ \geq 1 + E\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} (Z'_{n+1} - Z_n)\right)$$

alors $EZ \geq 1$. Mais d'après le lemme de Fatou, on a aussi $EZ \leq 1$, donc

$$EZ = 1. \quad \square$$

2. Conditions d'existence des moments

LEMME 2.1. — Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires l -dépendantes, ayant la même distribution d'espérance m et de variance σ^2 . Alors, si $n \geq l+1$, on a

$$\text{Var } S_n = An - B$$

où

$$A = \sigma^2 + 2\lambda_l - 2lm^2, \quad B = 2\lambda'_l - l(l+1)m^2, \\ \lambda_l = \sum_{j=1}^l EX_1 X_{1+j}, \quad \lambda'_l = \sum_{j=1}^l j EX_1 X_{1+j}.$$

Démonstration :

$$ES_n^2 = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = nEX_1^2 + \sum_{i \neq j, |i-j| \leq l} EX_i X_j + \sum_{|i-j| > l} EX_i X_j,$$

compte tenu de la stationnarité de la suite, on en déduit

$$\sum_{i \neq j, |i-j| \leq l} EX_i X_j = 2(n-l) \sum_{j=1}^l EX_1 X_{1+j} + 2 \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^k EX_1 X_{1+j} \\ = 2n \sum_{j=1}^l EX_1 X_{1+j} - 2\left(l \sum_{j=1}^l EX_1 X_{1+j} - \sum_{k=1}^{l-1} \sum_{j=1}^k EX_1 X_{1+j}\right) \\ = 2n\lambda_l - 2\lambda'_l,$$

de plus, le nombre des termes dans $\sum_{i \neq j, |i-j| \leq l}$ est $l(2n-l-1)$. D'autre part, utilisons la l -dépendance de la suite, on a

$$\sum_{|i-j| > l} EX_i X_j = \sum_{|i-j| > l} EX_i EX_j = [n^2 - n - l(2n-l-1)]m^2,$$

donc,

$$\text{Var } S_n = ES_n^2 - (ES_n)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= n EX_1^2 + 2n\lambda_l - \lambda'_l + [(n^2 - n - l(2n - l - 1))]m^2 - n^2 m^2 \\
 &= n(\sigma^2 + 2\lambda_l - 2lm^2) - [2\lambda'_l - l(l+1)m^2] \\
 &= An - B. \quad \square
 \end{aligned}$$

Maintenant, utilisons la stationnarité de notre processus. Pour chaque m, n , on a

$$E \gamma_{m, i} \gamma_{m, j} = E \gamma_{n, i} \gamma_{n, j}$$

Donc, on peut définir une suite $\{\gamma_i\}_{i \geq 0}$ stationnaire de v. a. d'espérance m et de variance σ^2 , qui a même distribution que la suite $\{\gamma_{n, i}\}_{i \geq 0}$ pour chaque n .

On note

$$\begin{aligned}
 \lambda_l &= \sum_{j=1}^l E \gamma_1 \gamma_{1+j} & \lambda'_l &= \sum_{j=1}^l j E \gamma_1 \gamma_{1+j} \\
 A &= \sigma^2 + 2\lambda_l - 2lm^2, & B &= 2\lambda'_l - l(l+1)m^2.
 \end{aligned}$$

PROPOSITION 2. 1. — Si $X_0 \geq l + 1$, on a

(i)
$$\text{Var}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = AX_n - B;$$

(ii)
$$\tau_{n+1}^2 = \text{Var}(X_{n+1} | X_0) = \frac{A m^n (m^{n+1} - 1) X_0}{m - 1} - \frac{B (m^{2n+2} - 1)}{m^2 - 1};$$

(iii)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} Z_n = \frac{AX_0}{m(m-1)} - \frac{B}{m^2-1}.$$

Démonstration. — (i) On l'obtient immédiatement du lemme 2. 1.

(ii) On vérifie sans peine que l'on a

$$\tau_{n+1}^2 = E \text{Var}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \text{Var} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n),$$

d'après (i) et la proposition 1. 1 (i)

$$\tau_{n+1}^2 = AX_0 m^n - B + m^2 \tau_n^2,$$

on en déduit par itération

$$\tau_{n+1}^2 = AX_0 m^n (\sum_{k=0}^n m^k) - B (\sum_{k=0}^n m^{2k})$$

$$= AX_0 \frac{m^n(m^{n+1}-1)}{m-1} - B \frac{m^{2n+2}-1}{m^2-1}.$$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var } Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_{n+1}^2}{m^{2n+2}} = \frac{AX_0}{m(m-1)} - \frac{B}{m^2-1}.$ \square

Remarque. — Quand X_0 est inférieur à $l+1$, en général, on ne peut pas obtenir une formule comme (iii). Par exemple, on prend $X_0=1, l=1, p_1 > 0$, alors $X_1 \geq 2$ presque sûrement. On obtient

$$\tau_{n+1}^2 = \frac{A m^n (m^n - 1)}{m - 1} - \frac{B (m^{2n} - 1)}{m^2 - 1} + m^{2n} \sigma^2$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Var } Z_{n+1} &= \frac{A(1-(1/m^{2n}))}{m^2(m-1)} - \frac{B(1-(1/m^{2n}))}{m^2(m^2-1)} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{m^2} \rightarrow \frac{A}{m^2(m-1)} - \frac{B}{m^2(m^2-1)} + \frac{\sigma^2}{m^2} \end{aligned}$$

qui n'est pas égal à $(A/m(m-1)) - (B/(m^2-1))$.

Mais, on peut démontrer que $\text{Var } Z_n$ converge quand-même. Pour cela, on définit un temps d'arrêt fini

$$\tau = \inf [n \geq 1; X_n \geq l+1],$$

et on utilise le résultat de la proposition 2.1.

LEMME 2.2. — Soit $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables l -dépendantes aléatoire positive, $\varphi(x) = x^{p-1}, x \geq 0, 1 < p \leq 2$, alors, on a

$$ES_n \varphi(S_n) \leq ES_n \cdot \varphi(ES_n) + \sum_{i=1}^n E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)),$$

où $\Lambda_{i,n}$ désigne l'ensemble $\{j, 1 \leq j \leq n, |i-j| \leq l\}$ et $\Lambda_{i,n}^c$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\} - \Lambda_{i,n}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(S_n \varphi(S_n)) &= E(\sum_{i=1}^n \gamma_i \varphi(S_n)) = \sum_{i=1}^n E \gamma_i \varphi(\sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \gamma_j + \sum_{j \in \Lambda_{i,n}^c} \gamma_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^n E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^n E(\gamma_i \varphi(\sum_{j \in \Lambda_{i,n}^c} \gamma_j)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^n E(\gamma_i) E(\varphi(S_n)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + \sum_{i=1}^n E(\gamma_i) \varphi(ES_n) \\
&= \sum_{i=1}^n E[\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j)] + E(S_n) \varphi(ES_n),
\end{aligned}$$

à cause de la concavité de φ , on a les premières et deuxièmes inégalités, et l'inégalité de Jensen entraîne la troisième. La troisième égalité est due à l'hypothèse de l -dépendance.

THÉORÈME 2.1. — On suppose que Z a le sens de la proposition 1.1, si le p -ième moment de γ est fini, alors on a

$$c_1 E \gamma^p \leq EZ^p \leq c_2 E \gamma^p,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives, $1 < p \leq 2$.

Démonstration. — (i) On prend $n = X_n$, $\gamma_i = \gamma_{n,i}/m^{n+1}$ dans le lemme 2.2, on a

$$S_n = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,i} = Z_{n+1},$$

d'après le lemme 2.2, on obtient par calcul

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad E(Z_{n+1} \varphi(Z_{n+1}) | \mathcal{F}_n) &\leq E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) \varphi(E(Z_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

mais

$$E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n) = \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} E(\gamma_i \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n),$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
E(\gamma_i \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n) &= E\left(\frac{\gamma_{n,i}}{m^{n+1}} \left(\frac{\gamma_{n,i}}{m^{n+1}}\right)^{p-1}\right) = \frac{E(\gamma_{n,i} \gamma_{n,i}^{p-1})}{m^{(n+1)p}} \\
&\leq \frac{1}{m^{(n+1)p}} (E \gamma_{n,i}^p)^{1/p} [E(\gamma_{n,i})^{p-1}]^{1/q} = \frac{1}{m^{(n+1)p}} E \gamma^p,
\end{aligned}$$

où $(1/p) + (1/q) = 1$. En outre, on remarque que, pour chaque i ,

$$\text{Card } \Lambda_{i,n} \leq 2l + 1.$$

donc

$$(2.2) \quad E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_i, n} \varphi(\gamma_j) \mid \mathcal{F}_n) \leq \frac{3lE\gamma^p}{m^{(n+1)p}}.$$

Parce que $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ est une martingale, (2.1) et (2.2) donnent

$$(2.3) \quad E(Z_{n+1} \varphi(Z_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \leq Z_n \varphi(Z_n) + \frac{3lX_n}{m^{(n+1)p}} E\gamma^p.$$

Substituons $\varphi(x)$ par x^{p-1} et prenons l'espérance dans (2.3), on a

$$E(Z_{n+1} \varphi(Z_{n+1}) - Z_n \varphi(Z_n)) = E(Z_{n+1}^p - Z_n^p) \leq \frac{3lE\gamma^p}{m^p} \cdot \frac{1}{m^{(p-1)n}},$$

d'après le lemme de Fatou, on en déduit

$$\begin{aligned} EZ^p &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} EZ_n^p = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (EZ_{k+1}^p - EZ_k^p) \right\} \\ &\leq 1 + \frac{3lE\gamma^p}{m^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{(p-1)k}} = O(E\gamma^p), \end{aligned}$$

ce qui démontre la deuxième inégalité du théorème 2.1.

(2) A cause de la convexité et de l'inégalité de Jensen, on a

$$(2.4) \quad E\gamma^p = EX_1^p = m^p EZ_1^p = m^p E(E(Z \mid \mathcal{F}_1))^p \leq m^p EZ^p$$

d'après le théorème 1.1 et la théorie de martingale ([14], théorème 4.1), $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots, Z_\infty = Z\}$ est une martingale, donc on a la troisième égalité de (2.4). \square

THÉORÈME 2.2. — Si l'on a

$$E\gamma(\log^+ \gamma)^{\alpha+1} < \infty \quad \text{pour un } \alpha > 0,$$

alors, on a

$$EZ(\log^+ Z)^\alpha < \infty.$$

Démonstration. — Définissons

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 x, & 0 \leq x \leq x_0 \\ [\log^+ x]^\alpha + c_2, & x_0 \leq x < \infty \end{cases}$$

où $x_0 > 1$, $(d^2/dx^2)(\log x)^a < 0$ quand $x \geq x_0$; $c_1 = (d/dx)(\log x)^a|_{x=x_0}$, $c_2 = c_1 x_0 - (\log x_0)^a$; donc, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ est croissante et concave. Soit

$$X_n = n, \quad \gamma_i = \frac{\gamma_{n,i}}{m^{n+1}}, \quad S_n = \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^{X_n} \gamma_{n,i} = Z_{n+1},$$

comme dans la démonstration du théorème 2.1, on obtient

$$E(Z_{n+1} \varphi(Z_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \leq E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) \varphi(E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n)) + \sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n).$$

Maintenant, on estime les termes $E(\gamma_i \varphi(\gamma_j))$, remarquons que la fonction φ est croissante, on a

$$E(\gamma_i - \gamma_j) [\varphi(\gamma_i) - \varphi(\gamma_j)] \geq 0,$$

donc

$$2E \frac{\gamma}{m^{n+1}} \varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right) = E \gamma_i \varphi(\gamma_i) + E \gamma_j \varphi(\gamma_j) \geq E \gamma_i \varphi(\gamma_j) + E \gamma_j \varphi(\gamma_i).$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{X_n} E(\gamma_i \sum_{j \in \Lambda_{i,n}} \varphi(\gamma_j) | \mathcal{F}_n) \leq (2l+1) X_n E \frac{\gamma}{m^{n+1}} \varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right) \leq \frac{3l X_n}{m^{n+1}} E \gamma \varphi\left(\frac{\gamma}{m^{n+1}}\right).$$

En suite, on répète le procédé du théorème 2.1 et on obtient

$$EZ \varphi(Z) \leq \varphi(1) + \frac{3l}{m} \int_0^\infty x \sum_{n=0}^\infty \varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right) dF(x).$$

Pour chaque x fixé, on peut choisir k , tel que

(★)
$$\frac{x}{m^{k+1}} \leq x_0 < \frac{x}{m^k}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right) &= \sum_{n=0}^{k-1} \varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right) + \sum_{n=k}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \left(\left[\log^+ \left(\frac{x}{m^{n+1}} \right) \right]^{\alpha} + c_2 \right) + c_1 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x}{m^{n+1}}, \end{aligned}$$

mais, d'après (★), on a

$$k = O(\log x), \quad \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x}{m^{n+1}} = O(x),$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{m^{n+1}}\right) = O([\log^+ x]^{\alpha+1}),$$

ce qui achève la démonstration. \square

En appliquant les théorèmes 1.1, 2.1, la proposition 2.1 et le théorème de convergence de martingale, on obtient

THÉORÈME 2.3. — *Sous l'hypothèse que le p -ième moment de γ est fini, Z_n tend vers Z dans L^p ($1 < p \leq 2$). En outre, on a $P(Z=0)=0$; en particulier, Z_n tend vers Z dans L^2 ; et si $X_0 \geq l+1$, on a*

$$\text{Var } Z = \frac{AX_0}{m(m-1)} - \frac{B}{m^2-1},$$

où A, B ont les mêmes sens que dans la proposition 2.1.

Remarque. — Dans le cas d'une lettre considérée dans [12] par J. PEYRIÈRE, le théorème du paragraphe 3.4 de celui-ci est un cas particulier du théorème ci-dessus, de plus, on a obtenu une expression précisée de $\text{Var } Z$.

3. Un théorème de limite centrale

LEMME 3.1. — *Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires l -dépendantes, équidistribuées, d'espérance nulle et de variance σ^2 . Soit $s_n^2 = \text{Var}(S_n)$. Alors on a*

$$P\left(\frac{S_n}{s_n} \leq y\right) \rightarrow \Phi(y), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx.$$

Démonstration. — Définissons deux suites de nombres entiers $\{k_n\}_{n \geq 1}$ et $\{n_i\}_{0 \leq i \leq k_n}$ de la façon suivante :

$$k_n = [n^{2/3}], \quad n_i = \left[\frac{in}{k_n} \right].$$

On note

$$\lambda_n = \min_i \left\{ \left[\frac{(i+1)n}{k_n} \right] - \left[\frac{in}{k_n} \right] \right\}.$$

On définit deux suites de variables aléatoires $\{Y_{n,i}\}$ et $\{Z_{n,i}\}$ ainsi :

$$Y_{n,i} = X_{n_i+1} + X_{n_i+2} + \dots + X_{n_i+\lambda_n-i};$$

$$Z_{n,i} = X_{n_i+\lambda_n-l+1} + X_{n_i+\lambda_n-l+2} + \dots + X_{n_i+1},$$

alors

$$S_n = \sum_{i=0}^{k_n-1} Y_{n,i} + \sum_{i=0}^{k_n-1} Z_{n,i} = S'_n + S''_n.$$

On note

$$s_n'^2 = \text{Var}(S'_n), \quad s_n''^2 = \text{Var}(S''_n).$$

Remarquons les faits suivants :

(i) Pour chaque $p > q$,

$$(n_{p+1} - n_p) - (n_{q+1} - n_q) = \left[\frac{(p+1)n}{k_n} \right] - \left[\frac{pn}{k_n} \right] - \left[\frac{(q+1)n}{k_n} \right] + \left[\frac{qn}{k_n} \right]$$

$$\leq \frac{p+1}{k_n}n - \frac{p}{k_n}n + 1 - \frac{q+1}{k_n}n + 1 + \frac{q}{k_n}n = 2,$$

donc, quand n est suffisamment grand, le nombre des termes de chaque $Y_{n,i}$ est $\lambda_n - l$, il est supérieur strictement à l , et le nombre des termes de chaque $Z_{n,i}$ est compris entre l et $l+2$. Parce que la suite $\{X_n\}$ est l -dépendante et stationnaire, les variables $Y_{n,i}$ sont indépendantes et équidistribuées. Les variables $Z_{n,i}$ sont indépendantes.

(2) Chaque terme X_r de S_n'' est indépendant de tous les termes X_s de S_n' sauf d'au plus $l+1$ d'entre eux. Par un calcul similaire à celui du lemme 2.1, on peut obtenir

$$s_n^2 = \text{Var } S_n = n\sigma^2 + 2n\lambda_l + O(1),$$

où λ_l a le même sens que dans le lemme 2.1, donc

$$(3.1) \quad \frac{s_n^2}{k_n^2} = \frac{n(\sigma^2 + 2\lambda_l) + O(1)}{n^{2/3}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

d'après (1), (2), on a

$$(3.2) \quad |E(S_n' S_n'')| \leq k_n(l+1)(l+2) |E(X_i X_j)| \leq k_n(l+2)^2 \sigma^2$$

où $|i-j| \leq l$;

$$E(S_n'^2) = \sum_{i=0}^{k_n-1} E(Z_{n,i}^2) \leq k_n(l+2)^2 \sigma^2$$

mais

$$E(S_n^2) = E(S_n'^2) + 2E(S_n' S_n'') + E(S_n''^2),$$

par (3.2) et (3.3), on a

$$|E(S_n^2) - E(S_n'^2)| \leq 3k_n(l+2)^2 \sigma^2.$$

Utilisant (3.1), on obtient

$$(3.4) \quad \frac{s_n'}{s_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(3.5) \quad E\left(\frac{S_n''}{S_n}\right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Parce que

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{s_n'}{s_n} \cdot \frac{S_n'}{s_n'} + \frac{S_n''}{s_n},$$

donc, $S_n/s_n \rightarrow \Phi$ en distribution si $S_n'/s_n' \rightarrow \Phi$ en distribution par (3.4) et (3.5). Mais les $Y_{n,i}$ sont indépendantes et ont même distribution, en appliquant une généralisation du théorème de limite centrale (BILLINGSLEY

[4], théorème 27. 2), on obtient $S'_n/s'_n \rightarrow \varphi$ en distribution, et ce qui achève la démonstration. \square

Maintenant, supposons que les $Z_{n, i}, i=1, 2, \dots, X_n$ ont le même sens que dans le lemme 1. 1, d'après le lemme 1. 1, on a les faits suivants :

(1) les $Z_{n, i}$ ont la même distribution que Z conditionnellement à \mathcal{F}_n , c'est-à-dire

$$(3. 6) \quad P(Z_{n, i} \leq y | \mathcal{F}_n) = P(Z \leq y), \quad \text{P. S.}$$

(2) les $Z_{n, i}$ sont l -dépendantes conditionnellement à \mathcal{F}_n ;

(3)

$$(3. 7) \quad Z - Z_n = \frac{1}{m^n} \sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n, i} - 1).$$

Evidemment, les $Z_{n, i} - 1, i=1, 2, \dots, X_n$ satisfont les hypothèses du lemme 3. 1.

D'autre part, pour chaque $\omega_0, P(Z_{n, i} < y | \mathcal{F}_n)(\omega_0)$ définit une fonction de distribution, en utilisant (3. 6), la stationnarité de la suite $\{Z_{n, i}\}$ et le théorème d'existence de Kolmogorov, on peut définir une suite $\{Z_i\}_{i \geq 1}$, telle que

(i) elle a la même distribution que Z ;

(ii) pour chaque n , on a

$$(3. 8) \quad E(Z_{n, i} Z_{n, j}) = E(Z_i Z_j);$$

(iii) pour chaque n et k fixés, on a

$$(3. 9) \quad P\left(\sum_{i=1}^k (Z_{n, i} - 1) \leq y | \mathcal{F}_n\right) = P\left(\sum_{i=1}^k (Z_i - 1) \leq y\right) \quad \text{P. S.}$$

THÉORÈME 3. 1. — La loi de $(Z - Z_n) m^n / ((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n)^{1/2}$ converge étroitement vers une loi de Gauss normale, où τ^2 est la variance de $Z - 1$ et

$$\lambda_l = \sum_{j=1}^l E(Z_1 - 1)(Z_{1+j} - 1).$$

Première démonstration. — En appliquant (3. 9) et la définition de l'espérance conditionnelle, on peut vérifier sans peine qu'on a

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n, i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n)^{1/2}} \leq y | \mathcal{F}_n\right)(\omega_0) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n(\omega_0)} (Z_i - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_l) X_n(\omega_0))^{1/2}} \leq y\right), \quad \text{P. S.}$$

compte tenu de (3.7) et (3.8), et on remarque la suite

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n(\omega_0)} (Z_i - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) X_n(\omega_0))^{1/2}} \leq y\right)$$

est exactement une sous-suite de la suite

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_i - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) n)^{1/2}} \leq y\right)$$

pour chaque ω_0 , d'après le lemme 3.1, elle tend vers $\Phi(y)$ quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) X_n)^{1/2}} \leq y \mid \mathcal{F}_n\right) \rightarrow \Phi(y) \quad \text{P. S.}$$

Prenons l'espérance, on obtient le résultat que nous voulons.

Deuxième démonstration. — Étant donné X_n , remarquons que les $Z_{n,i}$ et X_n sont indépendantes, on a quand-même

$$m^n(Z - Z_n) = \sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i} - 1),$$

maintenant

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) X_n)^{1/2}} \leq y\right) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y \mid X_n = k\right) P(X_n = k) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right) P(X_n = k), \end{aligned}$$

mais, d'après le lemme (3.1), $P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right)$ tend vers $\Phi(y)$ quand k tend vers l'infini, donc, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un K , tel que,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i} - 1)}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right) - \Phi(y) < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que $k > K$; d'autre part, d'après la proposition 1.1, on peut choisir n suffisamment grand, tel que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i-1})}{((\tau^2 + 2\lambda_i) X_n)^{1/2}} \leq y\right) P(X_n = k) \\ \leq \sup_{1 \leq k \leq K} P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i-1})}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right) P(1 \leq X_n \leq K) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

alors, on a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i-1})}{((\tau^2 + 2\lambda_i) X_n)^{1/2}} \leq y\right) - \Phi(y) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i-1})}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right) P(X_n = k) - \Phi(y) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ P\left(\frac{\sum_{i=1}^k (Z_{n,i-1})}{((\tau^2 + 2\lambda_i) k)^{1/2}} \leq y\right) - \Phi(y) \right\} P(X_n = k) \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=K+1}^{\infty} P(X_n = k) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Notre deuxième démonstration est ainsi terminée.

4. Loi de logarithme itéré

LEMME 4.1. — (i) Soit $\{T_n\}_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$(4.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n < \infty \quad \text{P. S.}$$

où

$$\Delta_n = \sup_{y \in \mathbb{R}} |P(T_n \leq y | \mathcal{F}_n) - \Phi(y)|$$

alors

$$(4.2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{(2 \log n)^{1/2}} \leq 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{(2 \log n)^{1/2}} \geq -1 \quad \text{P. S.};$$

(ii) On peut remplacer les inégalités par égalités dans (4.2), si les T_n sont \mathcal{F}_{n+k} -mesurable pour certain $k \geq 1$.

Démonstration. — Remarquons les identités

$$(2\pi)^{-1}(1 - \Phi(y)) = \int_y^\infty e^{-x^2/2} dx \simeq \frac{1}{y} e^{-y^2/2}, \quad y \rightarrow \infty$$

on a donc

$$(4.3) \sum_{n=1}^\infty (1 - \Phi(2\eta \log n)^{1/2}) \simeq c \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{-\eta}}{(\log n)^{1/2}} \begin{cases} < \infty & \text{si } \eta > 1, \\ = \infty & \text{si } \eta < 1, \end{cases}$$

où c est une constante positive.

Prenons

$$A_n = \{ \omega, T_n > (2\eta \log n)^{1/2} \},$$

en utilisant (4.1) et (4.3), on a

$$(4.4) \quad \sum_{n=0}^\infty P(A_n | \mathcal{F}_n) \leq \sum_{n=0}^\infty \{1 - \Phi(2\eta \log n)^{1/2} + \Delta_n\} < \infty, \quad \text{si } \eta > 1,$$

$$(4.5) \quad \sum_{n=0}^\infty P(A_n | \mathcal{F}_n) \geq \sum_{n=0}^\infty \{1 - \Phi(2\eta \log n)^{1/2} - \Delta_n\} = \infty, \quad \text{si } \eta \leq 1.$$

Donc, pour démontrer (i), il nous suffit d'utiliser (4.4) et le lemme de Borel-Cantelli conditionnel

$$\left\{ \sum_{n=1}^\infty P(A_n | \mathcal{F}_n) < \infty \right\} \subseteq \text{p. s. } \left\{ \sum_{n=1}^\infty 1_{A_n^c} < \infty \right\}.$$

Pour obtenir (ii), il faut utiliser (4.5) et une généralisation du lemme de Borel-Cantelli conditionnel ([9], p. 144) : si A_n est \mathcal{F}_{n+k} mesurable pour certain $k \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{n=1}^\infty P(A_n | \mathcal{F}_n) < \infty \right\} &= \text{p. s. } \left\{ \sum_{n=1}^\infty 1_{A_n} < \infty \right\}, \\ \left\{ \sum_{n=1}^\infty P(A_n | \mathcal{F}_n) = \infty \right\} &= \text{p. s. } \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n. \end{aligned}$$

LEMME 4.2. — Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires l -dépendantes, équidistribuées, d'espérance nulle, de variance σ^2 et ayant un moment

du troisième ordre fini, alors, on a

$$(4.6) \quad \Delta_n \leq \frac{c(l+1)nE|X_1|^3}{\sigma_n^3},$$

où c est une constante positive, σ_n^2 est variance de S_n .

C'est le théorème 2 de SHERGIN [13].

THÉORÈME 4. 1. — On a

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m^n(Z - Z_n)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l)X_n \log n)^{1/2}} &= 1, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m^n(Z - Z_n)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l)X_n \log n)^{1/2}} &= -1, \quad \text{P. S.} \end{aligned}$$

où les τ^2 et λ_l ont les mêmes sens que dans la section 3.

Démonstration. — Étape (1). Considérons les variables $Z_{n,i}$, Z_i comme dans le paragraphe 3. On va démontrer d'abord

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i} - 1)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l)X_n \log n)^{1/2}} &\leq 1, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n,i} - 1)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l)X_n \log n)^{1/2}} &\geq -1 \end{aligned}$$

Pour simplifier, on note $Y_{n,i} = Z_{n,i} - 1$, on voit facilement que les $Y_{n,i}$ satisfont les hypothèses du lemme 4. 2.

On pose

$$Y'_{n,i} = Y_{n,i} I(|Y_{n,i}| \leq m^{n/2}), \quad \tilde{Y}_{n,i} = Y'_{n,i} - EY'_{n,i}$$

et

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{X_n} \tilde{Y}_{n,i}, \quad \tilde{\theta}_n^2 = \text{Var}(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_n), \quad T_n = \frac{\tilde{S}_n}{\tilde{\theta}_n}.$$

On voit sans peine que l'on a

$$\tilde{\theta}_n^2 = X_n(E\tilde{Y}_{n,i}^2 + 2\tilde{\lambda}_l) + O(1)$$

où

$$\tilde{\lambda}_l = \sum_{j=1}^l E(\tilde{Y}_{n,1} \tilde{Y}_{n,1+j})$$

mais il est évident que $E(\tilde{Y}_{n,i} \tilde{Y}_{n,j})$ tend vers $EY_{n,i} Y_{n,j}$ quand n tend vers l'infini, on a donc

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\theta}_n^2}{X_n} = \tau^2 + 2\lambda_l$$

Maintenant, par un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned} E|\tilde{Y}_{n,i}|^3 &\leq E|Y'_{n,i}|^3 \\ &\quad + 3E|Y'_{n,i}|E|Y'_{n,i}|^2 + 3(E|Y'_{n,i}|)^2 E|Y'_{n,i}| + (E|Y'_{n,i}|)^3 \\ &\leq 8E|Y'_{n,i}|^3 = 8 \int_{|y| \leq m^{n/2}} |y|^3 dF(y) \end{aligned}$$

Répétons la démonstration du théorème 3.1 et appliquons le lemme 4.2. On a presque sûrement

$$\Delta_n = \sup_{y \in \mathbb{R}} |P(T_n \leq y | \mathcal{F}_n) - \Phi(y)| \leq 8c \frac{X_n}{\tilde{\theta}_n^3} \int_{|y| \leq m^{n/2}} |y|^3 dF(y).$$

Compte tenu de (4.8) et du fait que, pour chaque ω_0 fixé, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n &\leq c' \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2} \int_{|y| \leq m^{n/2}} |y|^3 dF(y) \\ &= c' \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2} I(|y| \leq m^{n/2}) dF(y) \\ &\leq c'' \int_{-\infty}^{\infty} |y|^3 |y|^{-1} dF(y) = c'' \int_{-\infty}^{\infty} y^2 dF(y) < \infty \end{aligned}$$

où c' , c'' sont des constantes positives.

Par le lemme 4.1, pour démontrer (4.7), il suffit de démontrer

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,i}}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_n \log n)^{1/2}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{(2 \log n)^{1/2}} \quad \text{P. S.}$$

Compte tenu de (4. 8') et des définitions des $Y'_{n, i}$, $\tilde{Y}'_{n, i}$, T_n , T'_n , il suffit que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{X_n} \{Y_{n, i} - Y'_{n, i}\} &= o\{m^{n/2}(\log n)^{1/2}\}, \\ \sum_{i=1}^{X_n} EY'_{n, i} &= o\{m^{n/2}(\log n)^{1/2}\},\end{aligned}$$

il suffit que

$$(4. 9) \quad \begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2}(\log n)^{-1/2}(\sum_{i=1}^{X_n} |Y_{n, i} - Y'_{n, i}|) &< \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} m^{-n/2}(\log n)^{-1/2}\sum_{i=1}^{X_n} |EY'_{n, i}| &< \infty\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}|EY'_{n, i}| &= E(Y'_{n, i} - Y_{n, i}) \leq E|Y'_{n, i} - Y_{n, i}| \\ &= E|Y_{n, i}|I(|Y_{n, i}| > m^{n/2}) \\ &= \int_{|y| > m^{n/2}} |y| dF(y),\end{aligned}$$

et remarquons $X_n(\omega) = O(m^n)$, pour démontrer (4. 6), il suffit que

$$(4. 10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{n/2}(\log n)^{-1/2} \int_{|y| > m^{n/2}} |y| dF(y) < \infty$$

[pour la première assertion de (4. 9), on prend l'espérance]. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} m^{n/2} \int_{|y| > m^{n/2}} |y| dF(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| \sum_{n=0}^{\infty} m^{n/2} I(|y| > m^{n/2}) dF(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} O(y^2) dF(y) < \infty,\end{aligned}$$

donc, (4. 6) est vrai.

Étape (2). — Maintenant, on remplace Z par Z_k dans la démonstration de l'étape (1), on note

$$\tau_k^2 = \text{Var}(Z_k - 1), \quad \lambda_{k, l} = \sum_{j=1}^l E(Z_{k, 1} - 1)(Z_{k, 1+j} - 1).$$

où les $Z_{k, i}$ ont même distribution que Z_k ,

$$S'_n = \sum_{i=1}^{X_n} (Z_{n, k, i} - 1) = m^n (Z_{n+k} - Z_n)$$

est \mathcal{F}_{n+k} -mesurable, les $Z_{n, k, i}$ ont le même sens que dans le lemme 1.1.

Reprenons la démonstration précédente et appliquons le lemme 4.1 (ii).

On obtient

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2(\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}) X_n \log n)^{1/2}} = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2(\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}) X_n \log n)^{1/2}} = -1 \quad \text{P. S.}$$

Évidemment, on a

$$(4.11) \quad \tau_k^2 \rightarrow \tau^2, \quad \lambda_{k, l} \rightarrow \lambda_l, \quad k \rightarrow \infty.$$

Étape (3) :

$$\frac{m^n (Z - Z_n)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_n \log n)^{1/2}} = \frac{m^{n+k} (Z - Z_{n+k})}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_{n+k} \log(n+k))^{1/2}}$$

$$\times \left(\frac{X_{n+k} \log(n+k)}{X_n \log n} \right)^{1/2} m^{-k} + \frac{S'_n}{(2(\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}) X_n \log n)^{1/2}} \left(\frac{\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}}{\tau^2 + 2\lambda_l} \right)^{1/2}$$

Parce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m^{n+k} (Z - Z_{n+k})}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_{n+k} \log(n+k))^{1/2}} \geq -1,$$

par l'étape (1), et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n}{(2(\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}) X_n \log n)^{1/2}} = 1$$

par l'étape (2), et

$$\frac{\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}}{\tau^2 + 2\lambda_l} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty$$

par (4.11), on a finalement

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m^n (Z - Z_n)}{(2(\tau^2 + 2\lambda_l) X_n \log n)^{1/2}} \geq (-1) m^{-k/2} + \left(\frac{\tau_k^2 + 2\lambda_{k, l}}{\tau^2 + 2\lambda_l} \right)^{1/2}$$

qui tend vers 1 quand k tend vers l'infini.

On démontre de même que la limite inférieure est -1 .

Je tiens à apporter ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. Peyrière, qui m'a dirigé, aidé et encouragé dans le présent travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ASMUSEEN (S.). — Some martingale methods in the limit theory of supercritical branching processes, *Advance in Probability and Related Topics*, vol. 5, 1976, p. 1-26.
- [2] ASMUSEEN (S.). — Almost sure behavior of linear functions of supercritical branching processes, *Trans. American Math.*, vol. 1, 1977, p. 233-248.
- [3] ATHREYA (K. B.) and NEY (P. E.). — *Branching processes*, Springer, New York, 1972.
- [4] BILLINGSLEY. — *Probability and mesure*, J. Wiley and Sons, 1965.
- [5] HARRIS (T. E.). — *The theory of branching processes*, Berlin, Springer, 1963.
- [6] HEYDE (C. C.) and BROWN (B. M.). — An invariance principle and some convergence rate results for branching processes, *Z.W.* 1971, p. 270-278.
- [7] HEYDE (C. C.). — Some central limit analogues for supercritical Galton-Watson processes, *J. appl. Prob.*, vol. 8, 1971, p. 52-59.
- [8] HEYDE (C. C.). — Some almost sure convergence theorem for branching processes, *Z.W.*, vol. 20, 1971, p. 189-192.
- [9] NEVEU (J.). — *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1970.
- [10] PEYRIÈRE (J.). — *Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction*, I.B.M. Research report, RC-7417.
- [11] PEYRIÈRE (J.). — Processus de naissance avec interaction des voisins, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 289, 1979, p. 223-224 et 557.
- [12] PEYRIÈRE (J.). — Processus de naissance avec interactions voisins, évolution de graphes, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 31, 1981.
- [13] SHERGIN (V. V.). — On the convergence rate in the central limit theorem for m -dependent random variables, *Theory Prob. Appl.*, vol. 24, 1979, p. 782-796.
- [14] DOOB (J. L.). — *Stochastic processes*, J. L. Doob, Wiley, New York, 1953.