BULLETIN DE LA S. M. F.

R. SILHOL

Cohomologie de Galois et cohomologie des variétés algébriques réelles ; applications aux surfaces rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 107-125

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__107_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 107-125.

COHOMOLOGIE DE GALOIS ET COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES RÉELLES; APPLICATIONS AUX SURFACES RATIONNELLES

PAR

R. SILHOL (*)

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de montrer comment, si X est une surface rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, la structure de Galois module de $H^*(X(C), \mathbb{Z})$ détermine la structure topologique de la partie réelle. Ces résultats sont obtenus à l'aide de certaines inégalités de Krasnov (dont nous donnons une démonstration élémentaire) et d'une nouvelle majoration de la dimension de $H^1_{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ le sous-groupe de $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ engendré par les classes de cycles algébriques.

ABSTRACT. — The object of this paper is to show how, when X is a rationnal surface defined over $\mathbb{R}$, the Galois structure of $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ determines the topological structure of the real part $X(\mathbb{R})$. These results are established using certain inequalities of Krasnov (of which we give an elementary proof) and a new bound for the dimension of $H^1_{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ the sub-group of $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ generated by algebraic classes.

Introduction

Le but de cet article est de montrer comment, si X est une surface rationnelle projective définie sur $\mathbb{R}$, l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C} \mid \mathbb{R})$ sur la cohomologie de la partie complexe $X(\mathbb{C})$ détermine la topologie de la partie réelle $X(\mathbb{R})$. De manière précise nous allons montrer comment calculer, à partir de la structure de Galois module de

(*) Texte reçu le 6 janvier 1986, révisé le 17 juillet 1986.

R. SILHOL, Université d'Angers, Département de Mathématiques, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers Cedex (France).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/01 107 19/$3.90

$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$, les groupes $H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Une étude plus fine prenant en considération la forme cup-produit sur $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ nous permettra de déterminer la forme cup-produit (mod. 2) sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ et les combinaisons possibles de composantes orientables dans $X(\mathbb{R})$.

Dans la première partie nous redémontrons un certain nombre d'inégalités et d'égalités, dues à KRASNOV [K], mettant en relation la cohomologie de Galois de $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ et $H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Les démonstrations originales de Krasnov utilisent les suites spectrales de GROTHENDIECK attachées aux groupes $H^i(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$ et $\mathfrak{H}^i(G, \mathfrak{F})$ (*cf.* [G]). Celles que nous donnons ici sont sensiblement plus élémentaires, puisqu'elles n'utilisent que la suite de Smith et quelques considérations simples sur l'action de Galois sur la décomposition de Hodge de $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

La deuxième partie est consacrée à une amélioration de la majoration que nous avions obtenue dans [S_2] pour la dimension de $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ (le sous groupe engendré par les classes fondamentales de cycles algébriques dans $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$). Cette majoration nous permettra, entre autre, de démontrer dans la dernière partie que pour les surfaces rationnelles on a :

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Nous fixons quelques notations. X sera toujours une variété sur $\mathbb{R}$, lisse irréductible et projective, $\bar{X} = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sera sa complexifiée et $X(\mathbb{R})$ et $X(\mathbb{C})$ les parties réelles et complexes respectivement. G désignera le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C} \mid \mathbb{R})$ et S le générateur de ce groupe.

Nous utiliserons continuellement dans la suite les résultats suivants de cohomologie de Galois (*cf.* par exemple [A & W]) :

Si A est un groupe abélien et si le groupe G ci-dessus opère sur A nous désignerons par A^G le sous groupe de A des éléments de A invariants sous l'action de G. On a :

$$H^1(G, A) = \ker(1+S)/\mathrm{Im}(1-S) \tag{1}$$

et

$$H^2(G, A) = \mathrm{Ker}(1-S)/\mathrm{Im}(1+S) = A^G/\mathrm{Im}(1+S). \tag{2}$$

On remarquera que ces deux groupes de cohomologie sont dans tous les cas des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels. Si A est également un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel ils sont identiques et on a de plus :

$$A^G = A/\mathrm{Im}(1+S). \tag{3}$$

Nous utiliserons également les deux résultats suivants : si A est un $\mathbb{Z}$-module libre et si $A_2 = A \otimes \mathbb{Z}/2$, notons $r = \mathrm{rang}\, A = \dim A_2$, $b = \mathrm{rang}\, A^G$ et $\lambda = \dim((1+S)A_2)$. On a :

$$\begin{cases} \dim H^1(G, A_2) = r-2 \\ \dim H^2(G, A) = b-\lambda \\ \text{et} \\ \dim H^1(G, A) = r-b-\lambda. \end{cases} \tag{4}$$

Sous les mêmes hypothèses (*cf.* [S$_1$]) il existe une base de A dans laquelle la matrice de S est de la forme :

$$\begin{bmatrix} I_b & \begin{matrix} I_\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & -I_{b'} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

I. Cohomologie de Galois et cohomologie de $X(\mathbb{R})$, inégalités de Krasnov

1. Calcul de la caractéristique d'Euler et majoration de la cohomologie de $X(\mathbb{R})$

Les deux résultats de base que nous allons utiliser sont les suivants :

(*a*) On note $Y = X(\mathbb{C})/G$ le quotient topologique et $\pi: X(\mathbb{C}) \to Y$ l'application canonique. On a alors comme première relation :

$$2\chi(Y) = \chi(X(\mathbb{C})) + \chi(X(\mathbb{R})) \qquad (cf.\ [\mathrm{S}_3],\ \mathrm{p.}\ 473).$$

Pour calculer $\chi(Y)$, on remarque tout d'abord que :

$$H^i(Y, \mathbb{Q}) = (H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))^G \qquad (cf.\ \text{par exemple [F] ou [G]}).$$

Ensuite on considère, sur $H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, l'action de $F_\infty = S \otimes \mathrm{Id}$. On peut montrer que l'on a :

$$F_\infty(H^{p,q}(X(\mathbb{C}))) = H^{q,p}(X(\mathbb{C})) \qquad (cf.\ [\mathrm{S}_3],\ \mathrm{p.}\ 475),$$

où les $H^{p,q}$ sont les sous espaces obtenus dans la décomposition de Hodge de $H^{p+q}(X(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. On en déduit en particulier que si i est impair :

(6) $$\dim(H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))^G = 1/2(\dim H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})).$$

On a donc en définitive :

(7) $$\chi(X(\mathbb{R})) = \sum(2\dim(H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))^G - \dim H^{2i}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})).$$

(*b*) Toujours avec les notations de (*a*) on considère, sur Y, le faisceau $\mathfrak{F} = \pi_*(\mathbb{Z}/2)$. $G = \{1, S\}$ opère sur $\mathfrak{F}$ et on peut aussi considérer le faisceau $(1+S)\mathfrak{F}$. On a alors une suite exacte de faisceaux sur Y (*cf.* par exemple [F], p. 41) :

$$0 \to (1+S)\mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \xrightarrow{(1+S)\oplus r} (1+S)\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{F}_{|X(\mathbb{R})} \to 0$$

(où r désigne le morphisme de restriction).

De cette suite on tire une suite exacte longue de cohomologie (la suite de Smith) :

(8) $$\ldots \to H^m(Y, (1+S)\mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta_m} H^m(Y, \mathfrak{F})$$
$$\xrightarrow{\alpha_m} H^m(Y, (1+S)\mathfrak{F}) \oplus H^m(Y, \mathfrak{F}_{|X(\mathbb{R})})$$

qui compte tenu du fait que G est fini peut se réécrire :

$$\to H^m(Y, (1+S)\mathfrak{F}) \to H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$
$$\to H^m(Y, (1+S)\mathfrak{F}) \oplus H^m(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to$$

D'où si l'on note $a_m = \dim(\operatorname{Ker}\alpha_m)$:

(9) $$\sum \dim H^m(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \sum(\dim H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) - 2a_p).$$

On voit que pour ce qui concerne les surfaces on peut, en utilisant (7) et (9), calculer les $H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Le problème ici est que les a_m sont en général difficiles à calculer. Pour se ramener à quelque chose de plus calculable on a :

LEMME 1. — *Avec les notations ci-dessus :*

$$\operatorname{Ker}\alpha_m \supset (1+S)H^m(Y, \mathfrak{F}) = (1+S)H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

En effet si c est un m-cocycle représentant $[c] \in H^m(Y, \mathfrak{F})$, $c+c^S$ représente la classe $(1+S)[c]$ et on a :

$$(1+S)(c+c^S)=2c+2c^S$$
$$r(c)=r(c^S) \text{ ou } r(c+c^S)=2r(c).$$

Le lemme résulte alors du fait que tous les espaces de la suite (8) sont des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels.

Notons $\lambda_m = \dim (1+S) H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$. Le lemme s'exprime alors en disant que $\lambda_m \leqslant a_m$. Comme d'après (4) on a :

$$(10) \qquad \dim H^1(G, H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = \dim H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) - 2\lambda_m$$

le lemme 1 et la formule (9) nous donnent :

THÉORÈME 1 (Krasnov). — *Si X est une variété sur $\mathbb{R}$ on a :*

$$(11) \qquad \sum \dim H^m(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum \dim H^1(G, H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)).$$

Remarque. — La démonstration donnée ici du théorème 1, quoique suggérée par KRASNOV dans l'introduction de [K], est notablement plus simple que celle effectivement donnée dans [K].

2. LES VARIÉTÉS GALOIS-MAXIMALES; EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

Nous introduisons d'abord une dénomination due à Krasnov.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une variété X sur $\mathbb{R}$ est Galois maximale, ou GM si pour X l'inégalité du théorème* 1 *est en fait une égalité. C'est-à-dire si :*

$$(12) \qquad \sum \dim H^m(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \sum \dim H^1(G, H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)).$$

Comme exemples de GM-variétés on a :

(1) Les courbes lisses telles que $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Ceci est en fait un résultat ancien (*cf.* $[S_1]$, p. 359 pour des références).

(2) Les variétés abéliennes avec $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Il y a plusieurs manières de constater ce fait. Pour une démonstration *voir* [K], p. 265.

(3) Les surfaces lisses telles que $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)=0$ et $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Je ne connais aucune démonstration élémentaire de ce fait. La seule démonstration connue est due à KRASNOV ([K], p. 262) et suit une méthode assez différente de celle que nous avons adoptée ici.

Il est important de noter que, malgré ces résultats positifs, toutes les variétés réelles ne sont pas des GM-variétés et cela même dans le cas des surfaces lisses. Nous donnons ici un exemple de surface qui n'est pas une GM-variété (cet exemple a déjà été donné dans [S$_3$], p. 482).

Soit B une courbe lisse de genre $g \geqslant 1$, telle que $B(\mathbb{R})$ ait $r+1$ composantes connexes ($r > 0$). Notons $B_0, B_1, \ldots, B_r$ ces composantes. Il existe sur B une fonction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(b) > 0$ si $b \in B_0$ et $f(b) < 0$ si $b \in B(\mathbb{R}) \setminus B_0$. On prend pour X une surface lisse et relativement minimale au-dessus de B associée à la surface définie birationnellement dans $\mathbb{P}^2 \times B$ par $x^2+y^2=z^2 f(b)$. Vu le choix de f, $X(\mathbb{R})$ se réduit topologiquement à $B_0 \times S^1$. C'est donc un tore et on a : $\sum \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)=4$. D'un autre côté X est une surface réglée relativement minimale au-dessus de B. L'Albanese de X est alors isomorphe à la jacobienne de B et comme celle-ci détermine la structure de Galois-module de $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$ (*cf.* [S$_1$]) on a :

$$\dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = 2r.$$

On a donc aussi par dualité de Poincaré :

$$\dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = 2r.$$

Ce qui, compte tenu du fait que l'on a pour une surface quelconque :

$$\dim H^1(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = \dim H^1(G, H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = 1,$$

démontre que dans ce cas :

$$\sum \dim H^i(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq \sum \dim H^1(G, H^j(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)).$$

3. Calcul de la cohomologie des surfaces Galois-maximales

Pour simplifier les calculs nous supposerons dans tout ce qui suit que la cohomologie de $X(\mathbb{C})$ est sans torsion. Cette restriction qui n'est pas gênante pour les applications que nous avons en tête est motivée par le fait qu'il semble que le cas où la torsion est présente nécessite des considérations particulières.

Nous allons utiliser les notations suivantes : $B_i = \dim H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ (on a donc aussi, vu la convention ci-dessus, $B_i = \operatorname{rang} H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}/2} H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2))$, $b_i = \dim(H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}))^G$ et comme précédemment $\lambda_i = \dim_{\mathbb{Z}/2}(1+S) H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$. L'hypothèse de non torsion nous permet alors, d'après (4), d'écrire :

(13) $$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^1(G, H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = B_i - b_i - \lambda_i$$

et

(14) $$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^2(G, H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = b_i - \lambda_i.$$

On a alors :

THÉORÈME 2 (Krasnov). — *Si X est une variété lisse, irréductible, projective, définie sur $\mathbb{R}$ et telle que la cohomologie de $X(\mathbb{C})$ est sans torsion alors :*

(15) $$\sum \dim H^{2i}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum \dim H^2(G, H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$$

(16) $$\sum \dim H^{2i+1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum \dim H^1(G, H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

On a de plus égalité dans les deux cas si X est une GM-variété.

En utilisant les notations données plus haut (7) devient :

(17) $$\chi(X(\mathbb{R})) = \sum (2b_{2i} - B_{2i}).$$

D'après (4), on peut écrire (11) sous la forme :

(18) $$\sum \dim H^m(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum (B_p - 2\lambda_p).$$

Comme d'après (6) on a $B_{2i+1} = 2b_{2i+1}$ on obtient en faisant la somme de (17) et (18) :

$$\sum \dim H^{2i}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum (b_p - \lambda_p)$$

ce qui d'après (14) n'est rien d'autre que (15).

De même en faisant la différence entre (18) et (17) on obtient :

$$\sum \dim H^{2i+1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leqslant \sum (B_p - b_p - \lambda_p)$$

ce qui d'après (13) est exactement (16).

La dernière assertion résulte de la définition (12) et du fait que dans ce cas toutes les inégalités que nous avons utilisées sont des égalités.

Remarque. — Dans le cas que nous considérons le théorème 3.3, p. 255 de [K], se déduit immédiatement du théorème 2. Pour le voir il suffit de remarquer que, compte tenu de (6) on a pour i impair :

$$\dim H^1(G, H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = \dim H^2(G, H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = (1/2)B_i - \lambda_i.$$

On remarquera également que c'est (6) qui permet de déduire le théorème 2 du théorème 1 et d'éliminer le recours aux suites spectrales de Grothendieck.

On a comme corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Si X est une GM-surface sur $\mathbb{R}$ (lisse, irréductible, projective) telle que $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ et $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ soit sans torsion, on a :*

$$\dim H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (1/2)(B_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + b_2 + 2)$$
$$\dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = B_1 + B_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - b_2.$$

Ceci résulte immédiatement du théorème 2 et de la dualité de Poincaré.

COROLLAIRE 2. — *Si X est une surface lisse intersection complète (en particulier si X est une surface lisse dans $\mathbb{P}^3$) ou si X est une surface rationnelle et si $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ on a :*

$$\dim H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (1/2)(b_2 - \lambda_2 + 2)$$
$$\dim H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = B_2 - b_2 - \lambda_2.$$

En effet dans ce cas on a $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) = 0$. X est donc GM d'après [K], p. 262, $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est sans torsion et $B_1 = \lambda_1 = 0$.

II. Une nouvelle majoration pour la dimension de $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$

On note $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ le sous groupe de $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ engendré par les classes fondamentales de cycles algébriques de codimension 1 (c'est le dual de Poincaré de $H^{\mathrm{alg}}_{n-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$). Nous allons ici améliorer la majoration de $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ donnée dans [S_2].

Pour cela nous allons considérer l'application de Borel-Haefliger [B & H], p. 493 :

$$\alpha : \quad \mathrm{Div}(\bar{X})^G \to \mathfrak{Z}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \tag{19}$$

[où $\mathfrak{Z}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est le groupe des cycles algébriques de codimension 1 dans $X(\mathbb{R})$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}/2$] qui à un diviseur D sur $\bar{X}$, invariant par G et irréductible sur $\mathbb{R}$ associe le cycle $D \cap X(\mathbb{R})$ si ce dernier est de codimension 1, le cycle nul sinon. A cette application correspond un morphisme surjectif :

$$\alpha^*: \quad \mathrm{Pic}(\bar{X})^G \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

(*cf.* [S_2] bien que la présentation faite ici soit légèrement différente, le lien étant facile à faire via [B & H]).

Nous allons montrer que ce morphisme se factorise par un morphisme :

$$(20) \qquad \beta: \quad H^2(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Pour démontrer ce point il suffit, puisque [*cf.* (2)] :

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^G/(1+S)\,\mathrm{Pic}(\bar{X}),$$

de démontrer que :

$$(21) \qquad (1+S)\,\mathrm{Pic}(\bar{X}) \subset \mathrm{Ker}\,\alpha^*.$$

Soit donc $d+d^S \in (1+S)\,\mathrm{Pic}(\bar{X})$. Soit D un diviseur représentant d et soit $D = D_1 + \ldots + D_r$ la décomposition de D en somme de diviseurs irréductibles. Pour chacun des D_i on a deux possibilités :

(i) Soit : codim $(\mathrm{Supp}(D_i) \cap X(\mathbb{R})) > 1$. Dans ce cas on a aussi : $\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(D_i^S) \cap X(\mathbb{R})) > 1$ et donc par définition de α, $\alpha(D_i + D_i^S) = 0$.

(ii) Soit : $\mathrm{codim}(\mathrm{Supp}(D_i) \cap X(\mathbb{R})) = 1$. Dans ce cas, puisque D_i est irréductible, D_i est nécessairement défini sur $\mathbb{R}$ et donc tel que $D_i = D_i^S$. Par suite on a : $\alpha(D_i + D_i^S) = 2\,\alpha(D_i) = 0$.

Ceci démontre (21) et donc la factorisation de α^* par β.

THÉORÈME 3. — *Si X est une variété lisse, irréductible et projective sur $\mathbb{R}$ on a :*

$$(22) \qquad \begin{aligned} \dim H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &\leqslant \dim H^2(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \\ &\leqslant \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, NS(\bar{X})). \end{aligned}$$

La première inégalité est la conséquence immédiate de la surjectivité de β en (20).

Pour démontrer l'inégalité :

$$\dim H^2(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \leqslant \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, NS(\bar{X}))$$

il suffit de considérer la suite exacte de G-modules :

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(\bar{X}) \to NS(\bar{X}) \to 0$$

et de remarquer que la suite exacte (3), p. 444 de [S_2], implique que :

$$H^2(G, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) = H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Remarques. — (i) Une des conséquences de l'inégalité (22) est que l'inégalité

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

est, déjà pour les surfaces, assez fréquente. En effet si X est une *GM*-surface telle que $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ soit sans torsion l'inégalité est, au vu du théorème 2, automatiquement vérifiée si l'une des deux conditions l'est :

– $H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \neq 0$;

– $H^2(G, NS(\bar{X})) \neq H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(1)) = H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$;

ce qui, en pratique, est souvent le cas.

(ii) Il est possible que dans le cas des *GM*-variétés on ait en fait une égalité à la place de l'inégalité (22). Dans le même ordre d'idée il semble qu'on ait l'inégalité :

$$\dim H^2(G, NS(\bar{X})) \leqslant H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Une indication dans ce sens est donnée par le théorème 5.

III. Application aux surfaces rationnelles

Dans cette partie nous allons considérer les surfaces rationnelles, c'est-à-dire les surfaces lisses et projectives $X_{|\mathbb{R}}$ telles que $\bar{X} = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ soit birationnellement isomorphe (sur $\mathbb{C}$) à $\mathbb{P}^2{}_{|\mathbb{C}}$.

1. Une conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc

Comme première application des résultats précédents nous allons démontrer une conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc énoncé dans [C & S], p. 970.

Théorème 4 (Conjecture de Colliot-Thélène et Sansuc). — *Si $X_{|\mathbb{R}}$ est une surface rationnelle (au sens défini ci-dessus) alors on a pour le nombre de composantes connexes de $X(\mathbb{R})$, si $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$:*

$$^{\#}X(\mathbb{R}) = (1/2) \dim H^1(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) + 1.$$

On a d'après le corollaire 2 du théorème 2 :

$$2^{\#}X(\mathbb{R})=b_2-\lambda_2+2.$$

On a donc d'après (4) :

$$2^{\#}X(\mathbb{R})=2+\dim H^2(G,\ H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})).$$

Comme le genre géométrique de $\bar{X}$ est nul (ainsi que le H^1) on a (*cf.* par exemple [G & H], p. 163) :

$$H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})=NS(\bar{X})=\operatorname{Pic}(\bar{X}).$$

Ces isomorphismes sont des isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules mais ne sont pas des isomorphismes de G-modules. On a cependant comme isomorphisme de G-modules

$$H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})(1)=\operatorname{Pic}(\bar{X})$$

(où le (1) signifie qu'il faut tordre l'action de G par -1. Cf. [S_2], p. 444 ou [S_3], p. 468). Comme ici l'action de S est remplacée par celle de $-S$ il est facile de voir en utilisant (1) et (2) que :

$$H^2(G,\ H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}))=H^1(G,\ H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})(1))=H^1(G,\ \operatorname{Pic}(\bar{X})),$$

ce qui démontre le théorème.

2. $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}),\ \mathbb{Z}/2)$ POUR LES SURFACES RATIONNELLES

Le but de ce paragraphe est de démontrer un résultat qui a souvent été conjecturé (le théorème 5) mais dont, à ma connaissance, aucune démonstration n'a été donnée jusqu'ici.

Supposons donc que X est une surface rationnelle (au sens donné au début du chapitre III). Nous allons montrer que dans ce cas le morphisme β de (20) est en fait un isomorphisme.

Vu les résultats du chapitre II il suffit de démontrer que β est injectif, ou que :

$$\operatorname{Ker}\alpha^*=(1+S)\,NS(\bar{X}), \tag{23}$$

ou, en utilisant le fait que dans le cas que nous considérons

$$(1+S)\,NS(\bar{X})=(1-S)\,H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}),$$

que :

(24) $$\operatorname{Ker} \alpha^* = (1 - S) H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Pour simplifier les notations de ce paragraphe nous allons écrire $H = H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ et λ au lieu de λ_2. Notons : $H^+ = \operatorname{Ker}(1 - S)$ et $H^- = \operatorname{Ker}(1 + S)$. On a alors, puisque sous les hypothèses que nous considérons, H est un $\mathbb{Z}$-module libre

$$\dim H^1(G, H) = \operatorname{rang}(H^-) - \lambda.$$

Notons Q la forme cup-produit sur H et Q^+ et Q^- ses restrictions à H^+ et H^-.

De la relation :

(25) $$Q(c, c') = Q(S(c), S(c'))$$

(qui se déduit du fait que pour les surfaces S ne change pas l'orientation) il n'est pas très difficile de tirer :

$$(H^+)^\perp = H^-.$$

On a alors :

(26) $$|\det Q^-| = [H : H^+ \oplus H^-] = 2^\lambda$$

cf. par exemple Wilson [W], p. 61 pour la première égalité, la deuxième découlant de (5).

Nous allons démontrer que ceci implique les égalités (23) et (24). Pour cela nous allons utiliser deux choses. La première c'est que d'après [B & H], p. 494 on a :

(27) $$\alpha^*(c) . \alpha^*(c') \equiv Q(c, c') \qquad (\text{mod. } 2)$$

où (.) désigne la forme cup-produit sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. La deuxième c'est que (5) implique que l'on peut trouver une base $c_1, \ldots, c_\lambda, c_{\lambda+1}, \ldots, c_t$ de H^- telle que :

(28) $$\begin{cases} c_i \in (1 - S) H & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant \lambda, \\ c_j \notin (1 - S) H & \text{si } \lambda < j \leqslant t. \end{cases}$$

De (25) on tire que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant \lambda$ et pour tout $c \in H^-$ on a :

$$Q(c_i, c) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

(26) implique alors que pour $\lambda < j \leqslant t$ il existe k tel que :

$$Q(c_j, c_k) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

et (27) implique alors que $\alpha^*(c_j) \neq 0$ pour $\lambda < j \leqslant t$.

Si l'on remplace c_{j_1} par $c_{j_1} + \ldots + c_{j_s}$ (les j_i distincts et $\lambda < j_i \leqslant t$) on obtient encore une base de H^- vérifiant (28). On a donc en fait montré que les $\alpha^*(c_j)$, $\lambda < j \leqslant t$, sont linéairement indépendants dans $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. C'est-à-dire :

$$\dim H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \geqslant \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

ou compte tenu de (22) du théorème 3 :

$$\dim H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

En combinant ce résultat avec le corollaire 2 du théorème 2 on a démontré :

THÉORÈME 5. — *Si X est une surface rationnelle on a :*

$$H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

3. STRUCTURE DE MODULE QUADRATIQUE DE $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ POUR LES SURFACES RATIONNELLES ET TOPOLOGIE DE $X(\mathbb{R})$.

La construction faite dans le chapitre II et dans III, §2, a un certain nombre de conséquences que nous allons expliciter ici.

Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. Si l'on regarde $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ comme $H^-/(1-S)H$, il est facile de voir que la forme Q induit une forme bilinéaire (mod. 2) sur $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$.

Si l'on considère d'autre part la forme cup-produit sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, on a :

PROPOSITION 1. — *Si X est une surface rationnelle et si $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, le morphisme β de* (20) *est une isométrie entre $H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ et $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

En effet d'après la démontration du théorème 5, β est un isomorphisme. Il suffit alors de remarquer que (27) implique que c'est une isométrie.

Corollaire. — *Soit X une surface rationnelle sur $\mathbb{R}$. Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$X(\mathbb{R})$ a au moins une composante non orientable;*

(ii) *il existe $c \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(1)^G = \ker((1+S): H \to H)$ tel que $c.c \equiv 1$ (mod. 2);*

(iii) *il existe un diviseur D sur X tel que $D^2 \equiv 1$ (mod. 2);*

(iv) *il existe un diviseur D sur $\bar{X}$, invariant par S, tel que $D^2 \equiv 1$ (mod. 2).*

Pour $c \in (1-S)H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ on a $c.c \equiv 0$ (mod. 2). On en déduit que l'équivalence ((i)$\Leftrightarrow$(ii)) découle de la proposition 1 et du fait qu'une surface (topologique) compacte est non-orientable si et seulement si sa forme cup-produit (mod. 2) possède une classe de carré égal à 1. (*cf.* par exemple [H & M], p. 101).

L'équivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iv)) découle de l'isomorphisme

$$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(1) = \mathrm{Pic}(\bar{X})$$

noté dans la démonstration du théorème 4.

Enfin l'équivalence ((iii)$\Leftrightarrow$(iv)) découle trivialement de l'isomorphisme $\mathrm{Div}(X) = \mathrm{Div}(\bar{X})^G$.

On remarquera que les surfaces rationnelles peuvent avoir des composantes non orientables de genre quelconque et en nombre quelconque (on peut facilement construire de telles surfaces en utilisant [S_3] théorème (3.1) et proposition (1.2)). En contraste on a pour les composantes orientables :

Proposition 2. — *Si X est une surface rationnelle sur $\mathbb{R}$ et si X_0 est une composante connexe orientable de $X(\mathbb{R})$ alors X_0 est homéomorphe soit à S^2 soit au tore T_1. Dans ce dernier cas $X(\mathbb{R})$ est connexe, et on a donc $X(\mathbb{R}) \cong T_1$.*

Nous reprenons les notations de III, § 2, en particulier pour Q^+ et Q^-. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2. — *Si X est une surface projective définie sur $\mathbb{R}$, on a pour les signatures de Q^+ et Q^- :*

$$sg(Q^+) = (h^{0,2}, b_2 - h^{0,2})$$
$$sg(Q^-) = (h^{0,2}+1, B_2 - b_2 - h^{0,2} - 1).$$

On a de plus : $|\det Q^+| = |\det Q^-| \leqslant 2^{\lambda_2}$ *où*

$$\lambda_2 = \dim(1+S)\,H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z}/2),$$

et on a égalité si la cohomologie de $X(\mathbb{C})$ est sans torsion.

On sait d'après le théorème de l'indice de Hodge, que la signature de Q (ou plutôt de $Q_{\mathbb{R}}$) restreinte à $H^{1,1}(X) \cap H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})$ est $(1,\ h^{1,1}-1)$. On sait d'autre part que si X est projective et définie sur $\mathbb{R}$, il existe un diviseur ample D sur $\bar{X}$ tel que $D^S = D$, donc tel qu'on ait pour les classes de Chern $c_1(D)^S = -c_1(D)$. On trouve donc que Q^-, restreinte à $H^{1,1}(X) \cap H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})$ a au moins une valeur propre positive et donc exactement une. En d'autres termes la restriction de Q^- à $H^{1,1}(X) \cap H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})$ a une signature de la forme $(1,\ k)$.

Comme $H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R}) = H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})^G \perp H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})(1)^G$ on trouve que la restriction de Q^+ à $H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})^G \cap H^{1,1}(X)$ est définie négative.

D'un autre côté la restriction de Q à

$$[H^{0,2}(X) \oplus H^{2,0}(X)] \cap H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})$$

est définie positive.

On a d'après les considérations du I, § 1, (*a*) :

$$\dim([H^{0,2}(X) \oplus H^{2,0}(X)] \cap H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{R})^G) = h^{0,2},$$

on en déduit donc finalement que :

$$Sg(Q^+) = (h^{0,2},\ b_2 - h^{0,2})$$
$$Sg(Q^-) = (h^{0,2}+1,\ B_2 - b_2 - h^{0,2} - 1)$$

ce qui démontre les deux premières assertions.

Pour la dernière notons λ' l'invariant associé à $H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l$ (c'est-à-dire $H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})$ modulo torsion) par (4) ou (5). On a :

$$[H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l : H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l^G \oplus H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l(1)^G] = 2^{\lambda'}.$$

On a d'autre part $H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l^G)^{\perp} = H^2(X(\mathbb{C}),\ \mathbb{Z})_l(1)^G$. Le même raisonnement que celui fait pour montrer (26) montre qu'on a :

$$|\det Q^+| = |\det Q^-| = 2^{\lambda'} \leqslant 2^{\lambda_2}$$

(puisque $\lambda' \leqslant \lambda_2$).

Nous pouvons à présent démontrer la proposition 2. Pour les surfaces rationnelles on a $h^{0,2} = 0$. On en déduit d'après le lemme que Q^+ est définie négative. Considérons maintenant la classe x_0 de X_0 dans $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Cette classe est évidemment dans $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$. D'après ce qui précède, on a soit $x_0=0$, soit $Q(x_0, x_0) < 0$. Comme X_0 est orientable $Q(x_0, x_0)$ est égal à la self-intersection de X_0 dans le fibré normal. La multiplication par $i\,(i^2=-1)$ induit un isomorphisme à orientation près entre le fibré normal et le fibré tangent à X_0. Mais la self-intersection calculée dans le fibré tangent n'est rien d'autre que $\chi(X_0)$. Par suite, compte tenu du changement d'orientation induit par la multiplication par i, on a $Q(x_0, x_0)=-\chi(X_0)$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

Pour démontrer la dernière assertion nous allons reprendre un argument exposé par RISLER [R].

Nous allons à nouveau considérer la suite de Smith. Nous reprenons les notations du I, § 1, en particulier $Y=X(\mathbb{C})/G$. On note tout d'abord que l'on a $H^i(Y, (1+S)\mathfrak{F})=H^i_c(Y\setminus(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ (*cf.* par exemple [F], p. 42). Comme $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)=0$, la suite de Smith nous donne :

$$0 \to H^3_c(Y\setminus(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to H^4_c(Y\setminus(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \\ \to H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \to H^4_c(Y\setminus X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to 0.$$

On déduit alors du fait que $H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$ que

$$H^3_c(Y\setminus X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2.$$

Considérons à présent la suite exacte de cohomologie à support compact et coefficients dans $\mathbb{Z}/2$, associée à $X(\mathbb{R}) \subsetneq Y$. La partie qui nous intéresse est :

$$(29) \qquad H^2(Y, \mathbb{Z}/2) \to H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \to H^3_c(Y\setminus X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

On remarque que $\pi: X(\mathbb{C}) \to Y$ est un revêtement d'ordre 2 ramifié le long de $X(\mathbb{R})$. Ceci implique, d'après HIRZEBRUCH [H] par exemple, que la classe fondamentale de $X(\mathbb{R})$ dans $H^2(Y, \mathbb{Z}/2)$ est nulle. On déduit alors de (29) et du fait que $H^3_c(Y\setminus X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$, que si la classe fondamentale X_0 dans $H^2(Y, \mathbb{Z}/2)$ est nulle on a $X_0=X(\mathbb{R})$, ce qui termine la démonstration.

Pour conclure sur les surfaces rationnelles nous allons démontrer :

PROPOSITION 3. — *Soit X une surface rationnelle définie sur* $\mathbb{R}$. *Si $X(\mathbb{R})=\varnothing$ on a : $b_2=\lambda_2=(B_2-2)/2$ et Q^+ restriction de la forme cup-produit Q à $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$ est congru à* 0 mod. 2.

On remarque tout d'abord que la formule (17) a été établie sans hypothèse particulière sur $X(\mathbb{R})$ et reste donc vraie si $X(\mathbb{R})=\varnothing$. On a donc si $X(\mathbb{R})=\varnothing$: $b_2=(B_2-2)/2$.

Comme on a d'après le lemme 2 : $|\det Q^+|=2^{\lambda_2}$ et $\lambda_2 \leqslant b_2$ par définition, il suffit pour démontrer la proposition de montrer que $Q^+ \equiv 0$ (mod. 2).

Pour montrer ce point on remarque que si $X(\mathbb{R})=\varnothing$, $\pi: X(\mathbb{C}) \to Y$ est un revêtement non ramifié d'ordre 2. Comme ici, Y est orientable on a :

$$Q(\pi^*(c), \pi^*(c'))=2\, Q_Y(c, c').$$

Il suffit donc pour montrer la proposition de démontrer :

LEMME 3. — *Si X est une surface sur $\mathbb{R}$ telle que $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)=0$ et $X(\mathbb{R})=\varnothing$ alors : $\pi^* H^2(Y, \mathbb{Z})=H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$.*

On sait que $\pi^* H^2(Y, \mathbb{Z}) \subset H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$.

Supposons qu'il existe $c \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$ tel que $c \notin \operatorname{Im} \pi^*$. Il est facile de montrer que dans ce cas l'on a, par contre, $2c \in \operatorname{Im} \pi^*$ (*cf.* par exemple [F], p. 37).

Soit $c' \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ tel que $\pi^*(c')=2c$. Si $\tilde{c}'$ est l'image de c' dans $H^2(Y, \mathbb{Z}/2)$ on a $\pi^*(\tilde{c}')=0$. Nous allons montrer que ceci implique que $c' \in 2\, H^2(Y, \mathbb{Z})$ ce qui démontrera le lemme, puisque sous les hypothèses du lemme $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est sans 2-torison.

Pour démontrer ce point il suffit de montrer que

$$\dim(\pi^* H^2(Y, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2))=\operatorname{rang} H^2(Y, \mathbb{Z})=b_2.$$

Pour démontrer cette dernière assertion on considère la suite des « coefficients universels » et le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2 & \to & H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) & \to & 0 & \to 0 \\
& \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow & \\
0 \to & H^2(Y, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2 & \to & H^2(Y, \mathbb{Z}/2) & \to & \operatorname{Tor}(H^3(Y, \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/2) & \to 0
\end{array}$$

On note que, puisque $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est sans 2-torsion, l'image par π^* de la 2-torsion de $H^2(Y, \mathbb{Z})$ est nulle. Vu la commutativité du diagramme et le fait que, sous les hypothèses du lemme, $\operatorname{Tor}(H^3(Y, \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$, il suffit de démontrer que $\dim \pi^*(H^2(Y, \mathbb{Z}/2))=b_2+1$.

Soit $\mathfrak{F}=\pi_*(\mathbb{Z}/2)$. Comme $X(\mathbb{R})=\varnothing$, les fibres du faisceau $\mathfrak{F}$, sont de la forme $(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$ et l'action de S, $(y; a, b) \mapsto (y; b, a)$. On en déduit que $(1+S)\mathfrak{F}$ est isomorphe au faisceau constant $\mathbb{Z}/2$ sur Y et que le morphisme correspondant à l'inclusion identifie naturellement :

$$H^i(Y, (1+S)\mathfrak{F}) \to H^i(Y, \mathfrak{F})$$

à

$$\pi^*: \quad H^i(Y, \mathbb{Z}/2) \to H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Pour démontrer le lemme nous allons appliquer cette remarque à la suite de Smith. Deux parties nous intéressent. La première :

$$0 \to H^3(Y, \mathbb{Z}/2) \to H^4(Y, \mathbb{Z}/2) \to H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \to H^4(Y, \mathbb{Z}/2) \to 0$$

montre que $H^3(Y, \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$ et donc par dualité de Poincaré, que $H^1(Y, \mathbb{Z}/2)=\mathbb{Z}/2$.

La deuxième nous donne alors :

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to H^2(Y, \mathbb{Z}/2) \to H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \to H^2(Y, \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

et donc

$$\dim H^2(Y, \mathbb{Z}/2)=(B_2+2)/2$$

et $\dim(\pi^* H^2(Y, \mathbb{Z}/2)=(B_2+2)/2-1=b_2+1$. Ceci démontre la proposition.

Remarques. — (i) Les conditions de la proposition 3 ne sont pas suffisantes pour que $X(\mathbb{R})=\varnothing$, comme le montre l'exemple des quadriques dans $\mathbb{P}^3$. En effet dans ce cas $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est engendré par 2 éléments et on peut facilement construire des exemples où $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, et où les deux générateurs sont définis sur $\mathbb{R}$, donc dont les classes sont dans H^-. On a alors $b_2=0=(B_2-2)/2$, $\lambda_2=0$ et $Q^+=0$ (puisque $H^+=\{0\}$).

(ii) Vu les démonstrations, les théorèmes 3, 4 et 5 ainsi que les propositions 1, 2 et 3 sont encore valables pour les surfaces telles que $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ soit sans torsion, $q=\dim H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})=0$ et $p_g=\dim H^{0,2}(X)=0$ ce qui est le cas pour, outre les surfaces rationnelles, certaines surfaces de type général.

BIBLIOGRAPHIE

[A & W] ATIYAH (M.F.) and WALL (C.T.C.). – Cohomology of groups, in *Algebraic number theory*, p. 94-115, Academic Press, London, 1967.

[B & H] BOREL (A.) et HAEFLIGER (A.). – La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, *Bull Soc. Math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 461-513.

[C & S] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). – Variétés de première descente attachées aux variétés rationnelles, *C.R. Acad. Sc.*, t. 284, série I, 1977, p. 967-970.

[F] FLOYD (E.). – Periodic maps via Smith theory, in *Seminar on transformation groups*, p. 35-48, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[G & H] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). – *Principles of algebraic geometry*, Wiley & Sons, New York, 1978.

[G] GROTHENDIECK (A.). – Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, vol. 9, 1957, p. 119-221.

[H] HIRZEBRUCH (F.). – The signature of ramified coverings, in *Global analysis* (in honour of Kodaira), University Press, Tokio, 1969.

[H & M] HUSEMOLLER (D.) and MILNOR (J.). – *Symmetric bilinear forms*, Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[K] KRASNOV (V.A.). – Harnack-Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties, *Math. U.S.S.R. Izvestiya*, vol. 22, 1984, p. 247-275.

[R] RISLER (J.-J.). – Types topologique des surfaces algébriques réelles de degré 4 dans $\mathbf{RP}^3$. Géométrie des surfaces K3. Modules et périodes, *Astérisque*, n° 126, Paris, 1985.

[S_1] SILHOL (R.). – Real abelian varieties and the theory of Comessatti, *Math. Z.*, vol. 181, 1982, p. 345-364.

[S_2] SILHOL (R.). – A bound for the order of $H^{(a)}_{n-1}(X, \mathbb{Z}/2)$ on a real algebraic var variety, in *Géométrie algébrique réelle et formes quadratiques*, p. 443-450, *Lecture Notes in Math.*, n° 959, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1982.

[S_3] SILHOL (R.). – Real algebraic surfaces with rational or elliptic fiberings, *Math. Z.*, vol. 186, 1984, p. 465-499.

[W] WILSON (G.). – Hilbert's sixteenth problem, *Topology*, vol. 17, 1978, p. 53-73.