BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE CORNU
GILBERT MONNA

Variétés de Poisson et structures associées

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 241-255
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__241_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 241-255.

VARIÉTÉS DE POISSON ET STRUCTURES ASSOCIÉES

PAR

PHILIPPE CORNU et GILBERT MONNA (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous abordons l'étude des variétés de Poisson à l'aide de la théorie des G-structures. Nous appliquons ensuite ces techniques à l'étude des variétés canoniques et des variétés co-symplectiques, en vue de donner quelques propriétés des feuilletages associés à ces structures.

ABSTRACT. — In this paper, we begin the study of Poisson manifolds with the use of the theory of G-structures. Then we apply these technics to the study of canonical manifolds and cosymplectic manifolds. We have in mind to give some properties of the foliations associated to these structures.

Note. — Les auteurs tiennent à remercier le Referee pour ses remarques, lesquelles ont contribué à la clarté et à la précision de ce texte.

I. Introduction

Les variétés de Poisson ont été introduites par A. LICHNEROWICZ (en 1977, *Cf.* [7]) qui les définit à l'aide d'un tenseur. Dans cette optique, les variétés de Poisson ont été ensuite étudiées par R. OUZILOU (*cf.* [11]) et C.M. MARLE (*cf.* [9]). Une autre approche de cette structure est celle de A. WEINSTEIN (*cf.* [13]) qui envisage, entre autre, le cas des structures de rang constant. Par ailleurs, A. Lichnerowicz a introduit une classe particulière de variétés de Poisson: les variétés canoniques, dont l'étude est reprise dans [9].

(*) Texte reçu le 29 mai 1984, révisé le 16 juin 1986

P. CORNU, Dept. G.I., Université de Technologie de Compiègne, B P n 233, 60206 Compiègne Cedex, G. MONNA, Inst de Math Univ d'Avignon, 33, rue Pasteur 84000 Avignon.

A la suite de ces travaux, nous donnons une définition des structures de Poisson en termes de G-structures.

Dans le paragraphe II, nous établissons que la donnée d'une structure de Poisson est équivalente à celle d'une G-structure plate, où G est le groupe de Lie formé des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathrm{Sp}(n)$, B matrice $2n \times s$, $C \in \mathrm{GL}(s, \mathbb{R})$.

Nous retrouvons ainsi l'existence du feuillage caractéristique (*cf.* [7] et [13]) et le « splitting theorem » de A. Weinstein. Enfin, on détermine le sous-groupe compact maximal du groupe G.

Dans le paragraphe III, nous restreignons notre étude aux variétés de Poisson de dimension $2n+1$ et de rang constant $2n$, définissant ainsi les variétés précanoniques. Nous donnons ensuite des conditions pour qu'une variété précanonique soit canonique. Après quelques remarques sur le feuilletage caractéristique, nous établissons un lien avec les structures de presque-contact, via le sous-groupe compact maximal de G, qui est alors $U(n) \times O(1)$. Enfin, utilisant la notion de variété $\mathfrak{h}$-plate de C. Albert [1], nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété canonique soit « à 2-forme fermée » (suivant la terminologie de C.M. Marle dans [9]) et une interprétation de cette condition en termes de tenseur de structure.

Le paragraphe IV est consacré à l'étude des variétés co-symplectiques introduites par M$^{\text{lle}}$ P. Libermann dans [5]. Après quelques propriétés du feuilletage caractéristique de ces structures, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence en termes de tenseur de structure, ainsi qu'une obstruction cohomologique. Enfin, en liaison avec les structures de contact, nous montrons qu'un champ de vecteurs ne peut-être à la fois système dynamique d'une forme de contact et d'une structure co-symplectique, sur une variété compacte sans bord.

Conventions et notations. — Dans la suite, toutes les variétés seront supposées connexes et de classe C^∞. Si V est une variété, $\mathcal{F}(V)$ notera l'espace des fonctions C^∞ de V dans $\mathbb{R}$, TV le fibré tangent de V et T^*V le fibré cotangent de V.

II. Variétés de Poisson et G-structures

DÉFINITION [13]. — La donnée d'une structure de Poisson sur une variété V est celle d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathscr{C}(V)$, dont on notera $\{\ ,\ \}$ le crochet, de telle sorte que $\{\ ,\ \}$ soit une dérivation par rapport à chacune des variables, c'est-à-dire

$$\{fg, h\}=f\{g, h\}+\{f, h\}g, \qquad \forall f, g, h\in\mathscr{C}(V).$$

Pour chaque fonction f, élément de $\mathscr{C}(V)$, il existe donc un champ de vecteurs X_f tel que :

$$X_f g=\{g, f\}, \qquad \forall g\in\mathscr{C}(V).$$

X_f est dit *champ de vecteurs hamiltonien* associé à f. En tout point de V, la valeur de $\{g, f\}$, et donc celle de X_f, ne dépend que de la différentielle de f (en effet, si h est une fonction constante sur V, alors $\{h, f\}=X_f h=0$, $\forall f\in\mathscr{C}(V)$). Il existe donc un morphisme de fibrés :

$$B:\quad T^* V\to TV \qquad \text{tel que}\quad X_f=B\circ df, \qquad \forall f\in\mathscr{C}(V).$$

On peut aussi, à la suite de A. Lichnerowicz et C.M. Marle, définir une structure de Poisson à l'aide d'un tenseur.

PROPOSITION ET DÉFINITION [7] et [9]. — Soit V une variété de Poisson (c'est-à-dire, une variété munie d'une structure de Poisson). Alors, il existe sur V un unique 2-tenseur contravariant et anti-symétrique Λ tel que

$$\text{(I)}\qquad \{f, g\}(x)=\Lambda(x)(df_x, dg_x), \qquad \forall f, g\in\mathscr{C}(V).$$

Le tenseur ainsi défini est dit *tenseur définissant la structure* de la variété de Poisson.

Inversement, si on définit le crochet $\{\ ,\ \}$ sur $\mathscr{C}(V)$ à l'aide de l'égalité (I), l'identité de Jacobi pour ce crochet est équivalente à la nullité du crochet de Schouten $[\Lambda, \Lambda]$ (*cf.* [7]).

Dans un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$ sur un ouvert U de V, la structure de Poisson est déterminée par les composantes Λ_{ij} de Λ, et en termes de crochet on a simplement $\{x^i, x^j\}=\Lambda_{ij}(x)$. En d'autres termes, la structure de Poisson est définie si on se donne les valeurs du crochet sur les fonctions coordonnées.

DÉFINITION [13]. — *Le rang d'une structure de Poisson* en un point x de V est le rang de l'application B_x allant de $T_x^* V$ dans $T_x V$. En coordonnées locales, c'est le rang de la matrice $\Lambda_{ij}(x)$.

Remarque. — Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on ne considèrera que des variétés de Poisson de dimension $2n+s$ et de rang constant $2n$.

Exemple 1. — Considérons $\mathbb{R}^{2n+s}$, muni de ses coordonnées globales $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z^1, \ldots, z^s)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^{2n+s}$, on définit B_x par :

$$B_x(dx^i) = \frac{\partial}{\partial y^i|_x}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$B_x(dy^i) = \frac{\partial}{\partial x^i|_x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad B_x(dz^j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

De sorte que :

$$\{x^i, x^k\} = \{y^i, y^j\} = \{z^k, z^h\} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k, h \leqslant s.$$

$$\{x^i, z^k\} = \{y^i, z^h\} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad 1 \leqslant k, h \leqslant s.$$

$$\{y^i, x^j\} = (B\,dx^j)(y^i) = \delta^i_j, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Muni de cette structure de Poisson, $\mathbb{R}^{2n+s}$ aura un rôle de *modèle local* pour les variétés de Poisson de dimension $2n+s$ et de rang constant $2n$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le :

THÉORÈME 1. — *Soit* (V, Λ) *une variété de Poisson de dimension* $2n+s$ *et de rang constant* $2n$. *Alors* Λ *définit une G-structure, notée* $E_G(V)$, *où* G *est le sous-groupe de Lie de* $\mathrm{GL}(2n+s, \mathbb{R})$ *formé des matrices de la forme*

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

où A *est un élément de* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, C *est un élément de* $\mathrm{GL}(s, \mathbb{R})$ *et où* B *est une matrice* $2n \times s$.

De plus, la G-structure $E_G(V)$ *est plate.*

Démonstration. — Pour déterminer le groupe G, on se place dans $\mathbb{R}^{2n+s}$ muni de sa structure de Poisson canonique. Le tenseur définissant la structure, section de $\Lambda^2 T\mathbb{R}^{2n+s}$, s'écrit dans la base $(\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j)_{i,j}$:

$$\Lambda = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^{n+1} + \ldots + \varepsilon^n \wedge \varepsilon^{2n}.$$

On cherche donc les matrices de changement de base laissant Λ invariant; calcul un peu long, mais sans réelle difficulté.

La platitude résulte d'une proposition de A. LICHNEROWICZ (*voir* [7], § 2, p. 257) selon laquelle toute variété de Poisson (V, Λ) admet un atlas de cartes pour lequel Λ à des composantes constantes, et de la proposition (III-12, p. 189 de [2]) selon laquelle une G-structure définie par un tenseur est plate si et seulement si il existe au voisinage de chaque point un système de coordonnées locales dans lequel ce tenseur est à coefficients constants. (Nous rappelons qu'une G-structure est dite plate si elle est localement équivalente à la G-structure standard sur le modèle $\mathbb{R}^{2n+s}$. Cela est équivalent à l'existence au voisinage de tout point de V d'un système de coordonnées locales adaptées à $E_G(V)$.)

On retrouve par le biais de notre approche le résultat suivant déjà dans [7] :

COROLLAIRE 1. — *Toute variété de Poisson (V, Λ) de dimension $(2n+s)$ et de rang constant $2n$ admet un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension s, toutes les feuilles étant des variétés symplectiques.*

DÉFINITION [9]. — Le feuilletage $\mathscr{F}$ sera appelé *feuilletage caractéristique.*

COROLLAIRE 2 « Splitting Theorem » [13]. — *Soit x_0 un point d'une variété de Poisson (V, Λ), alors, il existe un voisinage U de x_0 dans V et un isomorphisme $f=f_S \times f_N$ de U sur un produit $S \times N$ où S est une variété symplectique et N une variété de Poisson de rang nul.*

Preuve. — Ceci résulte de l'équivalence locale de $E_G(V)$ avec la G-structure standard sur $\mathbb{R}^{2n+s}$, conséquence de la platitude de $E_G(V)$.

PROPOSITION 1. — *Le sous-groupe compact maximal du groupe G est le groupe H formé des matrices de la forme :*

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où A est un élément du groupe $U(n)$ et B un élément du groupe $O(s)$.

Preuve. — Classique et longue, elle est donc omise.

COROLLAIRE. — *$E_G(V)$ admet une H-réduction $E_H(V)$.*

Preuve. — Classique, *voir* [4], chapitre 1 par exemple.

THÉORÈME 2. — *Soit $E_G(V)$ une G-structure plate sur V_{2n+s}. Alors $E_G(V)$ définit sur V une structure de Poisson régulière de rang $2n$.*

Démonstration. — De par la platitude de $E_G(V)$, il existe pour tout point x de V un voisinage U_x muni de coordonnées locales adaptées à $E_G(V)$. On le notera $(U_x, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z^1, \ldots, z^s)$, et on a : $\{x^i, y^j\} = \delta^i_j$, $1 \leq i, j \leq n$, tous les autres crochets sur les fonctions coordonnées étant nuls.

Soit $(U'_x, x'^1, \ldots, x'^n, y'^1, \ldots y'^n, z'^1, \ldots, z'^s)$, un autre système de coordonnées locales adaptées à $E_G(V)$, muni du crochet $\{\ ,\ \}'$ (avec les mêmes relations que $\{\ ,\ \}$). Supposons que $U_x \cap U'_x \neq \varnothing$. On montre alors, en utilisant la forme des matrices de G et le fait que les feuilles du feuilletage $\mathscr{F}$ sont des variétés symplectiques, que sur $U_x \cap U'_x$ les crochets $\{\ ,\ \}$ et $\{\ ,\ \}'$ coïncident et que l'on a sur V une structure de Poisson (globale).

III. Variétés de Poisson et variétés canoniques

III.1. VARIÉTÉS PRÉCANONIQUES ET VARIÉTÉS CANONIQUES

DÉFINITION 1. — Une *variété précanonique* est une variété de Poisson (V, Λ) de dimension $2n+1$ et de rang constant $2n$.

DÉFINITION 2 [9]. — Une *variété canonique* (V, Λ, φ) est la donnée d'une variété précanonique (V, Λ) et d'une fonction partout régulière $\varphi : V \to \mathbf{R}$, telle que : $\operatorname{Ker} \varphi_{*x} = T_x \mathscr{F}$, $\forall x \in V$, où $\mathscr{F}$ est le feuilletage caractéristique de la variété de Poisson (V, Λ).

Remarque. — Pour les applications à la mécanique des variétés canoniques, on peut consulter [9] et les articles qui y sont cités en références.

PROPOSITION ([9] p. 149). — *Soit (V, Λ, φ) une variété canonique et $\mathscr{F}$ son feuilletage caractéristique :*

(1) *Sur chaque feuille F de $\mathscr{F}$, la forme symplectique est donnée par : $\Omega_F(x)(Y, Z) = \{f, g\}_x$ où x est un élément de F, Y et Z sont des éléments de $T_x F$ et f et g sont des éléments de $\mathscr{C}(V)$ tels que $X_f(x) = Y$, $X_g(x) = Z$.*

(2) *Pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'ensemble $V_t = \varphi^{-1}(t) = \{x \in V / \varphi(x) = t\}$ est une sous-variété de V de dimension $2n$. Chaque composante connexe de V_t est*

une feuille de $\mathscr{F}$, donc V_t, comme les feuilles, est munie d'une forme symplectique Ω_t.

Nous adopterons jusqu'à la fin de ce paragraphe, l'hypothèse faite par C.M. MARLE dans [9] : $\forall t \in \mathbf{R}$, $V_t = \varphi^{-1}(t)$ est connexe. C'est-à-dire, si $\varphi^{-1}(t) \neq \emptyset$, $\varphi^{-1}(t)$ est une feuille du feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$.

On note $\mathrm{CT}(n)$ le groupe de contact ($= \mathbf{1} \times \mathrm{SP}(n)$ où $\mathrm{SP}(n)$ est le groupe symplectique). D'après [3], la donnée d'une $\mathrm{CT}(n)$-structure sur V est équivalente à celle d'une structure de presque-contact, c'est-à-dire celle d'un couple (α, β) où α est une 1-forme et β une 2-forme sur V telles que $\alpha \wedge \beta^n$ soit une forme volume sur V.

Dans la suite nous supposons V *orientée.*

THÉORÈME 1. — *Soient (V, Λ) une variété précanonique, $E_G(V)$ la G-structure plate associée. Supposons qu'il existe une $\mathrm{CT}(n)$-réduction de $E_G(V)$, telle que la structure de presque-contact (α, β) associée à $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ soit $(d\varphi, \beta)$ où $\varphi \in \mathscr{C}(V)$. Alors (V, Λ, φ) est une variété canonique. Le feuilletage caractéristique $\mathscr{F}$ est alors défini par la 1-forme fermée α.*

Démonstration. — Soit donc (V, Λ) une variété précanonique. On a sur V une G-structure plate $E_G(V)$ (*cf.* § II, théorème 1), V étant orientée, il existe sur V une $\mathbf{1} \times U(n)$-réduction (qui n'a plus de raison d'être plate) de $E_G(V)$ (ceci d'après § II, proposition 1). Par agrandissement de $U(n)$ à $\mathrm{SP}(n)$, on obtient sur V une $\mathrm{CT}(n)$-structure, donc un couple (α, β) (*voir* ci-dessus). Supposons maintenant α exacte, c'est-à-dire $\alpha = d\varphi$. On montre alors que la variété précanonique (V, Λ) munie de la fonction φ est une variété canonique en montrant que $\operatorname{Ker} \varphi_{*_x} = T_x \mathscr{F}$, $\forall x \in V$.

THÉORÈME 2. — *Soit (V, Λ, φ) une variété canonique. Alors il existe une réduction $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ de $E_G(V)$ définissant sur V une structure de presque-contact (α, β) telle que $\alpha = d\varphi$.*

Démonstration. — Soit (α, β) la structure de presque-contact sur V et soit $Y_{\alpha\beta}$ son système dynamique (i.e., l'unique champ de vecteurs sur V tel que $\alpha(Y_{\alpha\beta}) = 1$ et $i_{Y_{\alpha\beta}} \beta = 0$, pour l'existence *voir* [3]).

Soit $X = (1/d\varphi(Y_{\alpha\beta})) \cdot Y_{\alpha\beta}$, on a $d\varphi(X) = 1$. Pour tout couple (Y, Z) de vecteurs tangents en x à V, on a les décompositions $Y = \lambda X_x + Y'$ et $Z = \mu X_x + Z'$, avec Y' et Z' éléments de $T_x \mathscr{F}$. Notons ω_x la forme symplectique définie sur F_x par la structure de Poisson. Posons :

$$\Omega_x(Y, Z) = \omega_x(Y', Z'), \qquad \forall x \in V.$$

Alors, Ω est une 2-forme sur V et on vérifie que $(d\varphi, \Omega)$ est une structure de presque-contact sur V.

III.2. Étude du feuilletage caractéristique

Définition [13]. — Soit (V, Λ) une variété de Poisson. Une *fonction de Casimir* sur V est une fonction $h \in \mathscr{C}(V)$ telle que $\{h, f\}=0$, $\forall f \in \mathscr{C}(V)$.

Remarque. — Dans le modèle local (§ II, exemple 1) les fonctions z^i, $1 \leqslant i \leqslant s$, sont des fonctions de Casimir.

Définition. — Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur une variété V, une fonction $f \in \mathscr{C}(V)$ est dite *basique* pour $\mathscr{F}$ si $Xf=0$, pour tout champ de vecteurs local tangent aux feuilles de $\mathscr{F}$. Cela revient à dire que f est constante le long de chaque feuille. On notera $\mathscr{C}_b(V, \mathscr{F})$ l'espace des fonctions basiques pour le feuilletage $\mathscr{F}$.

A. Weinstein, dans [13], signale que toutes les fonctions de Casimir sont basiques. Remarquons qu'inversement toute fonction basique est une fonction de Casimir. En effet, dans un ouvert U_i muni d'un système de coordonnées locales adaptées à la structure

$$(x_i^1, \ldots, x_i^n, y_i^1, \ldots, y_i^n, z_i^1, \ldots, z_i^s),$$

une fonction basique ne dépend que des coordonnées $(z_i^1, \ldots, z_i^s)$. Si on note $y_i^j = x_i^{n+j}$ et $z_i^k = x_i^{2n+k}$, on a sur U_i :

$$\{f, g\} = \sum_{j,k=1}^{2n+s} \{x_i^j, x_i^k\} \frac{\partial f}{\partial x_i^j} \frac{\partial g}{\partial x_i^k} = 0.$$

Donc $\{f, g\}=0$, $\forall g \in \mathscr{C}(V)$, et f est une fonction de Casimir.

Définition. — Soit $(V, \mathscr{F})$ une variété feuilletée, si X est un champ de vecteurs sur V tel que pour tout champ de vecteurs Y tangent aux feuilles de $\mathscr{F}$, le champ $[X, Y]$ soit tangent aux feuilles de $\mathscr{F}$; X est dit *champ feuilleté*.

Soit (V, Λ, φ) une variété canonique. Le théorème 2 permet de lui associer des structures de presque-contact (α, β) avec $d\varphi = \alpha$. On note encore $Y_{\alpha\beta}$ le système dynamique de la structure de presque-contact.

Proposition. — *Le champ de vecteurs $Y_{\alpha\beta}$ est un champ feuilleté pour le feuilletage caractéristique de la variété canonique (V, Λ, φ).*

Preuve. — Soit X un champ de vecteurs tangent aux feuilles de $\mathscr{F}$. Montrons que $[X, Y_{\alpha\beta}]$ est tangent à $\mathscr{F}$, donc élément de $\operatorname{Ker} \varphi_\bullet$. $d(d\varphi(X, Y_{\alpha\beta})) = x\, d\varphi(Y_{\alpha\beta}) - Y_{\alpha\beta}\, d\varphi(X) - d\varphi([X, Y_{\alpha\beta}]) = 0$. D'où le résultat.

III.3. VARIÉTÉS CANONIQUES A 2-FORME FERMÉE

DÉFINITION [9]. — On dira qu'une variété canonique *est à 2-forme fermée* s'il existe une 2-forme fermée Ω sur V qui, pour chaque $t \in \mathbf{R}$ induise sur $V_t = \varphi^{-1}(t)$ la 2-forme symplectique Ω_t définie par la structure de Poisson sur V. En vue de caractériser les variétés canoniques à 2-forme fermée, C.M. MARLE dans [9] donne la proposition suivante ainsi que son corollaire :

PROPOSITION. — *Soit Ω une 2-forme sur V qui, $\forall t \in \mathbf{R}$ induit sur V_t la 2-forme symplectique Ω_t définie par la structure de Poisson de V, et soit E le champ de vecteurs tel que $i_E \Omega = 0$ et $d\varphi(E) = 1$. Alors Ω est fermée si et seulement si $\mathscr{L}_E \Lambda = 0$. ($\mathscr{L}_E$ désignant la dérivée de Lie suivant E.)*

COROLLAIRE. — *La variété canonique (V, Λ, φ) admet une 2-forme fermée si et seulement si il existe sur V un champ de vecteurs E tel que pour tout x de V, $E_x \notin T_x \mathscr{F}$* et $\mathscr{L}_E \Lambda = 0$.

D'après le théorème 2 de ce paragraphe, il existe sur (V, Λ, φ) des structures de presque-contact $(d\varphi, \beta)$ telles que la restriction de la 2-forme β à chaque feuille du feuilletage caractéristique coïncide avec la forme symplectique définie par la structure de Poisson. Le champ de vecteurs E de la proposition ci-dessus est en fait le système dynamique de la structure de presque-contact. Donc (V, Λ, φ) est à 2-forme fermée si et seulement si l'une des 2-formes β est fermée.

Nous allons donner une caractérisation des variétés canoniques à 2-forme fermée faisant intervenir de façon essentielle la structure de presque-contact. A cette fin rappelons quelques définitions : $\mathfrak{h}$ désigne l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension $2n+1$, c'est-à-dire $\mathbf{R}^{2n+1}$ muni de la structure d'algèbre de Lie suivante, dont on notera $[\![\ ,\ ]\!]$ le crochet $(e_1, \ldots, e_{2n+1})$ désignant la base canonique de $\mathbf{R}^{2n+1}$, les constantes de structures $\tau_{i,j}^k$ sont telles que :

$$\tau_{ij}^k = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant 2n,\ 1 \leqslant i, j \leqslant 2n+1),$$

$$\tau_{i,n+i}^{2n+1} = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad \tau_{i,j}^{2n+1} = 0 \quad \text{si } j \neq n+i,\ i < j,$$

(par définition,

$$[\![e_i, e_j]\!] = \textstyle\sum_{k=1}^{2n+1} \tau_{i,j}^k e_k).$$

DÉFINITION 1. — Soit V une variété de dimension $2n+1$. On appelle structure à crochet de type $\mathfrak{h}$ sur V la donnée sur le fibré tangent TV d'une structure de fibré en algèbres de Lie, de fibre type $\mathfrak{h}$.

La donnée d'une structure à crochet de type $\mathfrak{h}$ est donc celle de :

(1) En chaque point x de V, une structure d'algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{h}$ sur $T_x V$.

(2) D'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de V, tel que sur chaque U_i soient définies $2n+1$ champs de vecteurs linéairement indépendants $(X_1^i, \ldots, X_{2n+1}^i)$ vérifiant

$$[\![X_j^i(x), X_k^i(x)]\!] = \sum_{l=1}^{2n+1} \tau_{j,k}^l X_l^i(x), \ 1 \leqslant j, k \leqslant 2n+1.$$

L'ensemble $(U_i, X_1^i, \ldots, X_{2n+1}^i)$ est appelé *une trivialisation locale distinguée* de TV. On dit qu'une trivialisation locale distinguée est $\mathfrak{h}$-plate si et seulement si, pour tout j, k variant de 1 à $2n+1$ on a :

$$[X_j^i, X_k^i] = [\![X_j^i, X_k^i]\!].$$

DÉFINITION 2. — Soit V une variété de dimension $2n+1$. V sera dite $\mathfrak{h}$-*plate* si c'est une variété à crochet de type $\mathfrak{h}$ telle qu'au voisinage de tout point de V soit définie une trivialisation locale distinguée $\mathfrak{h}$-plate.

Revenons aux variétés canoniques. Soit (V, Λ, φ) une telle variété et $(d\varphi, \beta)$ une structure de presque-contact associée, Y désignant le système dynamique de $(d\varphi, \beta)$. Pour tout couple (X, X') de champs de vecteurs posons : $[\![X, X']\!] = -\beta(X, X')\, Y$.

PROPOSITION. — *Le crochet* $[\![\ ,\ ]\!]$ *défini ci-dessus muni* (V, Λ, φ) *d'une structure à crochet de type* $\mathfrak{h}$.

Preuve. — Le calcul en coordonnées locales se fait sans difficulté.

THÉORÈME 3. — *Soit* (V, Λ, φ) *une variété canonique. Elle est à 2-forme fermée si et seulement si* V, *muni de l'une des structures à crochet de type* $\mathfrak{h}$ *définies par les couples* $(d\varphi, \beta)$ *est une variété* $\mathfrak{h}$-*plate.*

Démonstration. — Supposons V $\mathfrak{h}$-plate. Le calcul de $d\beta$ sur une trivialisation locale distinguée $\mathfrak{h}$-plate montre facilement que β est fermée.

Réciproquement, il existe un système de coordonnées locales au voisinage de tout point de V,

$$(X^1, \ldots, X^{2n+1}) \quad \text{dans lequel } Y = \frac{\partial}{\partial X^{2n+1}}.$$

Comme $i_Y \beta = 0$, β ne dépend que des $2n$ premières coordonnées, et quitte à restreindre l'ouvert de définition, on peut définir des coordonnées $(y^1, \ldots, y^{2n})$ dans lesquelles : $\beta = \sum_{i=1}^{n} dy^i \wedge dy^{n+i}$ (car β est fermée).

On a alors le système de coordonnées locales $(y^1, \ldots, y^{2n}, x^{2n+1})$ dans lequel on pose :

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X^{n+i} = \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} + y^i \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$X^{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}.$$

On vérifie aisément que les $X^1, \ldots, X^{2n+1}$ définissent une trivialisation locale distinguée et $\mathfrak{h}$-plate.

Remarque. — Une caractérisation des variétés canoniques à 2-forme fermée utilisant les courants a été donnée dans [10], § V, p. 364 par J.M. Morvan.

III.4. Variétés canoniques a 2-forme fermée et tenseur de structure

$E_G(V)$ étant toujours la G-structure plate associée à une structure canonique (V, Λ, φ) et $E_{CT(n)}(V)$ une $CT(n)$-réduction de $E_G(V)$ définie par une structure de presque-contact $(d\varphi, \beta)$, on considère le diagramme commutatif à ligne exacte suivant :

$$\begin{tikzcd}
ct(n) \otimes {}'\mathbf{R}^{2n+1*} \arrow[r, "\partial"] & \Lambda^2 \mathbf{R}^{2n+1*} \otimes \mathbf{R}^{2n+1} \arrow[rr, "\pi"] & & \mathcal{T} \arrow[r] & 0 \\
& & E_{CT(n)}(V) \arrow[ul, "t_\Sigma"] \arrow[ur, "\tau"'] & &
\end{tikzcd}$$

où ∂ est l'opérateur d'antisymétrisation de Spencer, Σ est la torsion d'une connexion quelconque sur $E_{CT(n)}(V)$ et t_Σ le tenseur associé à la torsion.

$\mathcal{T}$ est appelé l'espace du tenseur de structure et τ le tenseur de structure de $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$.

D'après [3], proposition 2-5 et 2-6, p. 26 et suivantes :

$$\mathcal{T}=\Lambda\,\mathbb{R}^{2n+1*}\oplus \mathrm{gl}(2n,\mathbb{R})/\mathrm{sp}(n)\oplus\Lambda^3\,\mathbb{R}^{2n*}.$$

τ a donc trois composantes τ_1, τ_2, τ_3, τ_i étant à valeurs dans la i-ième composante de $\mathcal{T}$, $1\leqslant i\leqslant 3$. $\tau_1=t_{d(d\varphi)}=0$; $\tau_3=t_{d\beta}$ (tenseur associé à $d\beta$). L'expression de τ_2 est donnée dans [3] proposition 2-7, p. 29. Cette expression étant inutile pour notre propos, nous ne la reproduirons pas.

Si $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ est presque-intégrable (c'est-à-dire, si son tenseur de structure est nul, *cf.* [2]), alors τ_3 est nul et donc $d\beta=0$.

Si (V, Λ, φ) est une variété canonique à 2-forme fermée, la CT(n)-structure définie par $(d\varphi, \beta)$ est plate car définie par deux formes fermées, et donc son tenseur de structure est nul. On a donc montré :

THÉORÈME 4. — *Une variété canonique (V, Λ, φ) est à 2-forme fermée si et seulement si l'une des* CT(n)*-réduction de la G-structure $E_G(V)$ est presque-intégrable.*

IV. Variétés de Poisson et variétés co-symplectiques

IV. 1. STRUCTURES CO-SYMPLECTIQUES ET OBSTRUCTIONS

Les variétés canoniques à 2-formes fermées sont un cas particulier des variétés co-symplectiques, lesquelles ont été définies et étudiées par M[lle] LIBERMANN dans [5] et [6].

DÉFINITION [5]. — La donnée d'une *structure co-symplectique* sur une variété V de dimension $2n+1$ est celle d'une CT(n)-structure plate $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ sur V. Cela revient à la donnée d'une structure de presque-contact (α, β) telle que : $d\alpha=0$ et $d\beta=0$.

THÉORÈME 1. — *Soit $E_G(V)$ la G-structure plate sur V associée à une structure de Poisson (V, Λ), telle qu'il existe une* CT(n)*-réduction plate $E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ de $E_G(V)$. Alors :*

— *le feuilletage caractéristique $\mathcal{F}$ de la structure de Poisson est défini par* Ker α;

la restriction de β à chaque feuille F de $\mathcal{F}$ définit sur F la forme symplectique associée à la structure de Poisson.

Démonstration. — Analogue à celle du théorème 1, § III.

Remarques. — (1) Toute variété co-symplectique compacte et sans bord fibre sur S^1 (*cf.* [12]).

(2) Si V est compacte sans bord, une structure co-symplectique sur V ne peut être en même temps une structure canonique. En effet, si $\alpha = d\varphi$, avec $\varphi \in \mathscr{C}(V)$, considérons la $2n$-forme $(\varphi . \beta^n)$; on a $d(\varphi . \beta^n) = d\varphi \wedge \beta^n$, ce qui est impossible, sinon, on obtiendrait ainsi une forme volume exacte sur une variété compacte sans bord.

THÉORÈME 2. — *Soit $E_G(V)$ la G-structure plate associée à une structure de Poisson (V, Λ) de rang $2n$ sur une variété V de dimension $2n+1$.*

(V, Λ) est co-symplectique si et seulement si il existe une CT(n)-reduction de $E_G(V)$ *dont le tenseur de structure est nul.*

Démonstration. — Elle résulte de l'expression du tenseur de structure donnée dans la démonstration du théorème 4, du paragraphe III.

Nous allons maintenant donner une obstruction cohomologique à la CT(n)-réduction plate de $E_G(V)$ (pour la construction des morphismes de Chern-Weil, *voir* [2] et [3]).

Supposons qu'il existe une CT(n)-réduction plate de la G-structure plate $E_G(V)$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
HB\hat{W}(G, \mathbf{R}^{2n+1}) \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\chi E_G(V)"'] & & HB\hat{W}(\mathrm{CT}(n), \mathbf{R}^{2n+1}) \arrow[dl, "\chi E_{\mathrm{CT}(n)}(V)"] \\
& H^*_{DR}(V) &
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D})$$

où : $H^*_{DR}(V)$ est l'espace de cohomologie de De Rham de V, $HB\hat{W}(G, \mathbf{R}^{2n+1})$ est l'espace de cohomologie basique de l'algèbre de Weil de $\mathfrak{g}$, $\chi E_G(V)$ est l'homomorphisme de Chern-Weil de $E_G(V)$, défini à partir de n'importe quelle connexion sans torsion sur $E_G(V)$,

$HB\hat{W}(\mathrm{CT}(n), \mathbb{R}^{2n+1})$ et $\chi E_{\mathrm{CT}(n)}(V)$ sont définis de manière analogue, et π est le morphisme associé à l'injection

$$ct \to g.$$

Pour une démonstration, on peut consulter [3] 4.2.2.5, p. 63 et suivantes. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 3. — *Soit $E_G(V)$ une G-structure plate sur une variété V. Une condition nécessaire pour qu'il existe une* CT(n)*-réduction plate de $E_G(V)$ est que $\forall \eta \in HB\hat{W}(G, \mathbb{R}^{2n+1})$ vérifiant $\pi(\eta)=0$, on ait $\chi E_G(V)(\eta)=0$.*

Démonstration. — Découle directement du diagramme ($\mathscr{D}$).

IV.2. FEUILLETAGES DYNAMIQUES

DÉFINITION. — Soit (V, α, β) une structure de presque-contact. On a vu qu'il existe un unique champ de vecteurs, noté $Y_{\alpha\beta}$ et appelé système dynamique de (α, β) tel que : $\alpha(Y_{\alpha\beta})=1$, $i_{Y_{\alpha\beta}}(\beta)=0$. Les trajectoires de $Y_{\alpha\beta}$ définissent un feuilletage de V de dimension 1, appelé feuilletage dynamique.

PROPOSITION 1. — *Un champ de vecteurs sans singularité ne peut être à la fois système dynamique d'une forme de contact et d'une structure co-symplectique, sur une variété compacte et sans bord.*

Preuve. — Soit Y un champ de vecteurs, supposé système dynamique d'une forme de contact α et d'une structure co-symplectique (η, β). Alors :

$i_Y(\alpha-\eta)=0$. D'autre part, $d(\alpha-\eta)=d\alpha$, donc, $i_Y d(\alpha-\eta)=0$.

La 1-forme $\alpha-\eta$ est donc basique. Posons $\alpha-\eta=\gamma$, $(d\gamma)^n=(d\alpha)^n$, donc, $(d\gamma)^n=d(\gamma \wedge (d\gamma)^{n-1})$.

Soit $\varphi=\gamma \wedge (d\gamma)^{n-1}$. $(d\alpha)^n=d\varphi$, φ est donc une $(2n-1)$-forme basique.

Enfin : $d(\alpha \wedge \varphi)=d\alpha \wedge \varphi+\alpha \wedge d\varphi=\alpha \wedge d\varphi$ (car $d\alpha \wedge \varphi$ est une $(2n+1)$-forme basique, donc nulle). Donc : $d(\alpha \wedge \varphi)=\alpha. \wedge (d\alpha)^n$, ce qui est impossible.

Remarque. — La 2-forme β n'intervenant pas dans la démonstration précédente, on aurait pu énoncer la proposition sous la forme :

Sur une variété compacte et sans bord, un champ de vecteurs sans singularité ne peut être à la fois système dynamique d'une forme de contact et d'une structure de presque-contact (α, β) avec $d\alpha=0$.

On a même le résultat plus général suivant (signalé par le Referee) :

PROPOSITION 2. — *Un feuilletage $\mathscr{F}$ de dimension 1 sur une variété compacte et sans bord ne peut être à la fois feuilletage dynamique d'une forme de contact et d'une structure co-symplectique.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}$ le feuilletage dynamique d'une forme de contact α dont on désigne le champ de Reeb par R. Si il existe une structure co-symplectique (γ, β) dont le système dynamique est colinéaire à R, on aura $\gamma(R) > 0$. Cela entraîne que $\gamma \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume, alors que $\gamma \wedge (d\alpha)^n = d(\gamma \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1})$, ce qui est impossible puisque V est compacte et sans bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBERT (C.). — Some properties of k-flat manifolds, *J. Diff. Geom.*, vol. 11, 1976, p. 103-128.

[2] ALBERT (C.) et MOLINO (P.). — *Pseudo-groupes de Lie et structures différentiables*, tome 1, Montpellier, 1981.

[3] CORNU (Ph.) et MONNA (G.). — Variétés b-plates, *Cahier Mathématique*, n° 26, Montpellier, 1982.

[4] KOBAYASHI (S.) and NOMIZU (K.). — *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, 1963, 1969.

[5] LIBERMANN (P.). — Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact, *Colloque de géométrie différentielle globale*, Bruxelle, 1958, p. 37-59.

[6] LIBERMANN (P.). — Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique, *Colloque du Schnepfenried*, 1982.

[7] LICHNEROWICZ (A.). — Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geom.*, vol. 12, 1977, p. 253-300.

[8] LICHNEROWICZ (A.). — Variétés de Poisson et Feuilletages, *Annales de la faculté des Sciences de Toulouse*, vol. IV, 1982, p. 195-262.

[9] MARLE (C.M.). — *Lie group actions on a canonical manifold*, In *Symplectic Geometry*, Research notes in Mathematics, n° 80, Pitman, 1983, p. 144-166.

[10] MORVAN (J.M.). — Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique, *Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. XXXVIII, n° 4, 1983, p. 349-370.

[11] OUZILOU (R.). — *Hamiltonian actions on Poisson manifolds*. In *Symplectic Geometry*, Research notes in Mathematics, n° 80, Pitman, 1983, p. 172-183.

[12] TISCHLER (D.). — *On fibering certain foliated manifolds over S^1* *Topology*, vol. 9, 1970, p. 153-154.

[13] WEINSTEIN (A.). — *The local structure of Poisson manifolds*, Preprint (Berkeley).