BULLETIN DE LA S. M. F.

NORIYUKI SUWA

Sur l'image de l'application d'Abel-Jacobi de Bloch

Bulletin de la S. M. F., tome 116, nº 1 (1988), p. 69-101

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_1_69_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 69–101.

SUR L'IMAGE DE L'APPLICATION D'ABEL-JACOBI DE BLOCH

PAR

NORIYUKI SUWA (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie l'image du groupe des cycles algébriques, algébriquement équivalents à 0, sur une variété par l'application d'Abel–Jacobi ℓ-adique : elle est engendrée par les images des correspondances algébriques. Cela implique une condition nécessaire pour la surjectivité de l'application d'Abel–Jacobi. On donne quelques exemples où l'application d'Abel–Jacobi est surjective. Par ailleurs, on présente des variantes algébriques d'un théorème de GRIFFITHS.

ABSTRACT. — In this article, we study the image of the group of the algebraic cycles, algebraically equivalent to 0, on a variety by the ℓ-adic Abel–Jacobi map : it is generated by the images of algebraic correspondences. This implies a necessary condition for surjectivity of the Abel–Jacobi map. We give some examples such that the Abel–Jacobi map is surjective. And we present algebraic variants of a theorem of Griffiths.

0. Introduction

Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma lisse projectif. Désignons par $\mathrm{CH}^d(X)$ le groupe des cycles sur X de codimension d modulo l'équivalence rationnelle, et par $A^d(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{CH}^d(X)$ formé des cycles algébriquement équivalents à 0.

Supposons d'abord que $k = \mathbf{C}$, et désignons par $\mathrm{CH}^d(X)_h$ le noyau de l'application classe de cycle $c^d : \mathrm{CH}^d(X) \to H^{2d}(X, \mathbf{Z})$. Alors on a des inclusions

$$A^d(X) \subset \mathrm{CH}^d(X)_h \subset \mathrm{CH}^d(X).$$

De plus, désignons par $J^d(X)$ la d-ième jacobienne intermédiaire, et par $\psi^d : \mathrm{CH}^d(X)_h \to J^d(X)$ l'application d'Abel–Jacobi définie par GRIFFITHS. On sait que la structure de Hodge de $H^{2d-1}(X, \mathbf{C})$ impose

(*) Texte reçu le 12 juin 1986, révisé le 15 septembre 1987.

Unité associée au CNRS n° 752.

N. SUWA, Department of Mathematics, Tokyo Denki University, Kanda-nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 101, Japan.

des restrictions à l'image de $A^d(X)$ par ψ^d. Par exemple, si celle-ci n'est pas de niveau ≤ 1, l'application $\psi^d : A^d(X) \to J^d(X)$ ne peut pas être surjective. On conjecture que $\psi^d : A^d(X) \to J^d(X)$ est surjective si la structure de Hodge de $H^{2d-1}(X, \mathbf{C})$ est de niveau 1. Plusieurs exemples ont été traités par GRIFFITHS, CLEMENS, BEAUVILLE, MURRE, BLOCH (*cf.* [1], [5], [7], [24]).

Dans ce travail, on développe un argument similaire pour k quelconque, en particulier, de caractéristique positive, en remplaçant l'application d'Abel–Jacobi de GRIFFITHS par celle de BLOCH [2]

$$\lambda^d : \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \longrightarrow H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big).$$

Après quelques rappels, aux n° 1 et 2, sur la définition de λ^d, on démontre au n° 3, le résultat principal qui dit que l'image de $A^d(X)_{\ell\text{-tors}}$ par λ^d est engendrée par les images des correspondances algébriques (3.1). On en déduit une condition nécessaire pour la surjectivité de λ^d (3.3 et 3.4). On conjecture que celle-ci est suffisante pour la surjectivité de λ^d. Au n° 4, on donne quelques exemples où λ^d est surjective (4.7 et 4.8 sont spéciaux à la caractéristique positive). On étudie, au n° 5, une relation entre l'image de λ^d et la filtration par le coniveau (comparer à MURRE [26, 4]). Aux deux derniers numéros, on donne quelques applications du théorème principal. Au n° 6, on présente des variantes algébriques, par exemple la réponse à la question de SHIODA, et une démonstration algébrique d'un théorème de GRIFFITHS. Au n° 7, on montre que, en caractéristique positive, le groupe de cohomologie cristalline $H^3(X/W)$ impose des restrictions à la variété abélienne de Murre de X.

Ce travail a été effectué à l'Université de Paris-Sud. Je bénéficiais d'une bourse du gouvernement français et du Japan Association for Mathematical Sciences pendant mon séjour en France. Je tiens à remercier Spencer BLOCH et Tetsuji SHIODA pour de nombreuses suggestions. L'idée de la démonstration de 4.7 est due à BLOCH. Je tiens à remercier aussi Michel RAYNAUD pour ses efforts pour mon séjour à Orsay et son encouragement. Je ne sais comment remercier Luc ILLUSIE pour ses critiques soignées et sa constante exhortation.

Notations. — La lettre k désigne un corps de caractéristique $p \geq 0$, supposé algébriquement clos (sauf mention du contraire). On fixe ℓ un nombre premier $\neq p$. Si M est un groupe abélien, on note

$T_\ell M = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell, M)$,

M_{tors} = le sous-groupe de torsion de M,

M_{cotors} = le quotient de M par son plus grand sous-groupe divisible.

Si φ est un endomorphisme de M, on note

$$_\varphi M = \mathrm{Ker}(\varphi : M \to M),$$
$$M/\varphi = \mathrm{Cok}(\varphi : M \to M).$$

Les groupes de cohomologie sont les groupes de cohomologie étale (sauf mention du contraire). On écrit $H^i(X_{\mathrm{zar}},)$ lorsqu'il s'agit de cohomologie de Zariski.

Plan.

1. Groupes abéliens de ℓ-torsion : rappels.
2. Application d'Abel–Jacobi de Bloch : rappels.
3. Image de l'application de Bloch.
4. Exemples.
5. Image de l'application de Bloch et filtration par le coniveau.
6. Application I. Variantes d'un théorème de Griffiths.
7. Application II. Variété abélienne de Murre.

1. Groupes abéliens de ℓ-torsion : rappels

Dans ce numéro, on fixe un nombre premier ℓ.

1.1. Soit M un groupe abélien de ℓ-torsion. M est dit *de type cofini* s'il existe un homomorphisme injectif de M dans $(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell)^r$, où r est un entier ≥ 0.

Soit M un groupe abélien divisible de ℓ-torsion. Alors M est isomorphe à $(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell)^r$, où r est un entier ≥ 0, appelé *corang* de M.

1.2. LEMME. — *Soient M un groupe abélien de ℓ-torsion de type cofini et (N_i) une suite croissante de sous-groupes divisibles de M. Alors la suite (N_i) est stationnaire.*

En effet, soit $N' \subset N$ une inclusion de groupes abéliens divisibles de ℓ-torsion de type cofini. Si N' et N ont le même corang, N' coïncide avec N.

1.3. LEMME. — *Soit $\varphi : M \to N$ un homomorphisme de groupes abéliens divisibles de ℓ-torsion. Si l'homomorphisme*

$$T_\ell\varphi \otimes 1 : T_\ell M \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \longrightarrow T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

est nul (resp. surjectif), alors φ l'est aussi.

Supposons d'abord que $T_\ell\varphi \otimes 1 = 0$. Comme $T_\ell N$ est sans torsion, $T_\ell\varphi = 0$. Soit $x \in M$. Comme M est divisible, il existe $m = (\ldots, m_k, \ldots) \in T_\ell M$ tel que $m_k = x$. Alors $(T_\ell\varphi)(m) = 0$ implique $\varphi(x) = 0$.

Supposons maintenant que $T_\ell\varphi \otimes 1$ soit surjectif. Soit $y \in N$. Comme N est divisible, il existe $n = (\dots, n_j, \dots) \in T_\ell N$ tel que $n_j = y$. Comme $T_\ell\varphi \otimes 1$ est surjectif, il existe $m = (\dots, m_k, \dots) \in T_\ell M$ et un entier $s \geq 0$ tels que $(T_\ell\varphi)(m) = \ell^s n$. On a donc $\varphi(m_{j+s}) = \ell^s n_{j+s} = n_j = y$.

1.4. LEMME. — *Soit $\varphi : M \to N$ un homomorphisme de groupes abéliens divisibles de ℓ-torsion. Supposons que N soit de corang fini. Si φ est surjectif, $T_\ell\varphi \otimes 1 : T_\ell M \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ l'est aussi.*

Soit r le corang de N. Alors ${}_\ell N$ est un espace vectoriel de dimension r sur $\mathbf{Z}/\ell$. Prenons une base $\{y_1, \dots, y_r\}$ de ${}_\ell N$ sur $\mathbf{Z}/\ell$. Comme φ est surjectif, il existe $x_i \in M$ tels que $\varphi(x_i) = y_i$. Comme M est divisible, il existe $m_i \in T_\ell M$ tels que x_i soit une composante de m_i. Désignons par L le sous-$\mathbf{Z}_\ell$-module de $T_\ell M$, engendré par les m_i. Soit s_i l'entier ≥ 0 tel que $\ell^{-s_i}\varphi(m_i)$ appartienne à $T_\ell N$ et que $\ell^{-s_i}\varphi(m_i)$ ne soit pas divisible par ℓ. Alors on a $\ell^{-s_i}\varphi(m_i) \pmod{\ell} = y_i$. Comme les y_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}/\ell$, la famille $\big(\ell^{-s_i}\varphi(m_i)\big)$ est libre sur $\mathbf{Z}_\ell$ par le lemme de Nakayama. Par suite, $\big(\varphi(m_i)\big)$ est libre sur $\mathbf{Z}_\ell$. On en déduit que $\varphi : L \to T_\ell N$ est injectif et que la famille (m_i) est libre sur $\mathbf{Z}_\ell$. On a donc $\operatorname{rg} L = \operatorname{rg} T_\ell N = r$. Par suite, $\varphi \otimes 1 : L \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est bijectif et $\varphi \otimes 1 : T_\ell M \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est surjectif.

2. Application d'Abel-Jacobi de Bloch : rappels

2.1. Soit X un schéma lisse sur un corps k quelconque et soit d un entier ≥ 0. Désignons par $R^*(X, \mathcal{K}_d)$ le complexe de Gersten :

$$(2.1.1) \qquad \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_d\big(k(x)\big) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{d-1}\big(k(x)\big) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} K_1\big(k(x)\big) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} K_0\big(k(x)\big),$$

où $X^{(r)}$ est l'ensemble des points de codimension r de X (QUILLEN [27]). De plus, désignons par $\mathcal{R}^*(X, \mathcal{K}_d)$ le complexe de faisceaux zariskiens sur X associé au complexe de préfaisceaux $U \mapsto R^*(U, \mathcal{K}_d)$ et par $\mathcal{K}_d$ le faisceau zariskien sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_d(U)$. On sait que $\mathcal{R}^*(X, \mathcal{K}_d)$ est une résolution flasque de $\mathcal{K}_d$ (*loc. cit.*, THÉORÈME 5.11). Par suite, on a

$$(2.1.2) \qquad H^i(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_d) = H^i\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)\big)$$

et, en particulier,

$$(2.1.3) \qquad H^d(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_d) = H^d\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)\big) = \mathrm{CH}^d(X)$$

(formule de Bloch–Quillen). Soit n un entier > 0. Comme $R^d(X, \mathcal{K}_d) = \bigoplus_{x \in X^{(d)}} K_0\big(k(x)\big) = \bigoplus_{x \in X^{(d)}} \mathbf{Z}$ est sans torsion, on obtient une suite exacte

$$(2.1.4) \qquad \begin{aligned} H^{d-1}\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)/n\big) &\longrightarrow H^d(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_d) \\ &\xrightarrow{n} H^d(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{K}_d) \longrightarrow H^d\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)/n\big) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et par suite une surjection

$$(2.1.5) \qquad H^{d-1}\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)/n\big) \longrightarrow {}_n\mathrm{CH}^d(X)$$

et une bijection

$$(2.1.6) \qquad H^d\big(R^*(X, \mathcal{K}_d)/n\big) \xleftarrow{\sim} \mathrm{CH}^d(X)/n$$

(*cf.* BLOCH [3, chapitre 4]).

Soit $n > 0$ un entier premier à p. Désignons par $R^*\big(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r))\big)$ le complexe de Bloch–Ogus :

$$(2.1.7) \qquad \begin{aligned} &\bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^d\big(k(x), \mathbf{Z}/n(r)\big) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{d-1}\big(k(x), \mathbf{Z}/n(r-1)\big) \to \\ \cdots \to &\bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^1\big(k(x), \mathbf{Z}/n(r-d+1)\big) \to \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^0\big(k(x), \mathbf{Z}/n(r-d)\big) \end{aligned}$$

(BLOCH–OGUS [6, 4.2]). De plus, désignons par $\mathcal{R}^*\big(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r))\big)$ le complexe de faisceaux zariskiens sur X associé au complexe de préfaisceaux $U \mapsto R^*\big(U, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r))\big)$ et par $\mathcal{H}^d\big(\mathbf{Z}/n(r)\big)$ le faisceau zariskien associé au préfaisceau $U \mapsto H^d\big(U, \mathbf{Z}/n(r)\big)$. Alors $\mathcal{R}^*\big(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r))\big)$ est une résolution flasque de $\mathcal{H}^d\big(\mathbf{Z}/n(r)\big)$ (*loc. cit.*, 4.2). Par suite, on a

$$(2.1.8) \qquad H^i\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r))\big) = H^i\big(R^*(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(r)))\big).$$

Par HILBERT 90 et le théorème de MERCURJEV–SUSLIN [23], on a un isomorphisme

$$(2.1.9) \qquad R^{\geq d-2}(X, \mathcal{K}_d)/n \xrightarrow{\sim} R^{\geq d-2}\big(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(d))\big).$$

On en obtient une surjection

$$(2.1.10) \qquad H^{d-1}\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(d))\big) \longrightarrow {}_n\mathrm{CH}^d(X)$$

et une bijection

$$(2.1.11)\qquad H^d(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Z}/n(d))) \xleftarrow{\sim} \mathrm{CH}^d(X)/n.$$

Soit ℓ un nombre premier distinct de p. Par le passage à la limite, (2.1.10) donne une surjection

$$(2.1.12)\qquad H^{d-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))) \longrightarrow \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}}.$$

Si de plus X est lisse projectif sur k algébriquement clos, l'homomorphisme

$$(2.1.13)\qquad H^{d-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))) \longrightarrow H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)),$$

défini par la suite spectrale de Leray, se factorise ([2, 2], argument de spécialisation et conjecture de Weil) en

$$(2.1.14)\qquad \begin{tikzcd} H^{d-1}(X, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))) \arrow[r, "(2.1.13)"] \arrow[d, "(2.1.12)"'] & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \\ \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

La flèche oblique, multipliée par -1, est par définition *l'application d'Abel–Jacobi de Bloch* λ^d. (La définition donnée ici diffère légèrement de celle de [2], mais lui est équivalente, *cf.* COLLIOT–THÉLÈNE, SANSUC, SOULÉ [9, 1, Proposition 1]). Dans la suite nous l'appellerons application de Bloch.

Voici quelques compatibilités sur l'application de Bloch.

PROPOSITION 2.2 (compatibilité à l'extension des scalaires). — *Soient K/k une extension de corps algébriquement clos et X un k-schéma lisse projectif. Alors le morphisme $X_K \to X$ donne des carrés commutatifs dont les verticales sont des isomorphismes :*

$$(2.2.1)\qquad \begin{tikzcd} \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] \arrow[d, "\wr"'] & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \arrow[d, "\wr"'] \\ \mathrm{CH}^d(X_K)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] & H^{2d-1}(X_K, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \end{tikzcd}$$

$$(2.2.2)\qquad \begin{tikzcd} A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] \arrow[d, "\wr"'] & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \arrow[d, "\wr"'] \\ A^d(X_K)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] & H^{2d-1}(X_K, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \end{tikzcd}$$

La commutativité vient de la définition de BLOCH (diagramme p. 772 de [2]). Le fait que la flèche $\mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to \mathrm{CH}^d(X_K)_{\ell\text{-tors}}$ est bijective est dû à LECOMTE [21]. Déduisons-en que la flèche $A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to A^d(X_K)_{\ell\text{-tors}}$ est bijective.

Posons $\mathrm{NS}^d(X) = \mathrm{CH}^d(X)/A^d(X)$ et $\mathrm{NS}^d(X_K) = \mathrm{CH}^d(X_K)/A^d(X_K)$ (les groupes de Néron–Severi). Comme $A^d(X)$ et $A^d(X_K)$ sont divisibles (voir par exemple [3, LEMMA 1.3]), on a un morphisme de suite exacte :

$$(2.2.3)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \to & \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \to & \mathrm{NS}^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A^d(X_K)_{\ell\text{-tors}} & \to & \mathrm{CH}^d(X_K)_{\ell\text{-tors}} & \to & \mathrm{NS}^d(X_K)_{\ell\text{-tors}} & \to & 0. \end{array}$$

Par le LEMME ci-après, la flèche verticale de droite est bijective. Par le lemme des cinq, on obtient le résultat.

LEMME 2.2.4. — *Sous les hypothèses de* 2.2, *le morphisme* $X_K \to X$ *donne une bijection* $\mathrm{NS}^d(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{NS}^d(X_K)$.

Soit Z un fermé de X_K. Prouvons qu'il existe un fermé Z' de X tel que Z'_K soit algébriquement équivalents à Z. Prenons un k-schéma U lisse quasi-projectif irréductible et un sous-schéma fermé $\mathbf{Z}$ de $X \times_k U$ tels que $\mathrm{Spec}\, K$ soit un point générique géométrique de U et que les carrés

$$(2.2.5)\qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \longleftarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_k U & \longleftarrow & X_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xleftarrow{\ j\ } & \mathrm{Spec}\, K \end{array}$$

soient cartésiens. Posons $a = (j, \mathrm{id}) : \mathrm{Spec}\, K \to U_K = U \otimes_k K$. De plus, prenons un point k-rationnel $i : \mathrm{Spec}\, k \to U$, et posons $b = i_{(K)} : \mathrm{Spec}\, K \to U_K$ et $Z' = \mathbf{Z} \otimes_U k$. Alors on a $\mathbf{Z}|_{X_K \times \{a\}} = Z$ et $\mathbf{Z}|_{X_K \times \{b\}} = Z' \otimes_k K$. L'injectivité résulte d'un argument de spécialisation.

PROPOSITION 2.3 (compatibilité à la spécialisation). — *Soient* $\mathbf{S}$ *un schéma régulier irréductible et* $\mathbf{X}$ *un schéma lisse projectif sur* $\mathbf{S}$. *Désignons par* $\mathbf{X}$ *la fibre en un point générique géométrique de* $\mathbf{S}$ *et par* X_0

la fibre en un point géométrique de $\mathbf{S}$*, respectivement. Soit* ℓ *un nombre premier inversible sur* $\mathbf{S}$*. Alors on a des carrés commutatifs :*

$$
\text{(2.3.1)}\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \\
\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathrm{CH}^d(X_0)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X_0, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)),
\end{array}
$$

$$
\text{(2.3.2)}\qquad
\begin{array}{ccc}
A^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \\
\downarrow & & \wr\downarrow \\
A^d(X_0)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X_0, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)),
\end{array}
$$

où les flèches verticales sont les flèches de spécialisation.

Voir BLOCH [2, Proposition 3.8]. (Pour la définition des flèches verticales de gauche, voir par exemple [14, 20.3]).

PROPOSITION 2.4 (compatibilité avec l'éclatement). — *Soient* X *un* k*-schéma lisse projectif et* Y *un sous-schéma fermé lisse de* X *de codimension* $r \geq 2$*. Soit* $\psi : \widetilde{X} \to X$ *l'éclatement de* X *le long de* Y*. Si on pose*

$$
\begin{aligned}
M &= \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \oplus \bigoplus_{1\leq i\leq r-1} \mathrm{CH}^{d-i}(Y)_{\ell\text{-tors}}, \\
N &= A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \oplus \bigoplus_{1\leq i\leq r-1} A^{d-i}(Y)_{\ell\text{-tors}}, \\
H &= H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \oplus \bigoplus_{1\leq i\leq r-1} H^{2d-1-2i}(Y, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i)),
\end{aligned}
$$

on a des carrés commutatifs :

$$
\text{(2.4.1)}\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^d(\widetilde{X})_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow \\
M & \xrightarrow{(\lambda^d;\lambda^{d-1},\dots,\lambda^{d-r+1})} & H
\end{array}
$$

$$
(2.4.2)\qquad
\begin{array}{ccc}
A^d(\widetilde{X})_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\ \lambda^d\ } & H^{2d-1}\big(\widetilde{X},\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)\\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow\\
N & \xrightarrow{(\lambda^d;\lambda^{d-1},\dots,\lambda^{d-r+1})} & H
\end{array}
$$

C'est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2.4.3. — *Soit S un k-schéma lisse projectif. Soient E un fibré vectoriel sur X de rang $N+1$ et $\varphi : X = \mathbf{P}(E) \to S$ le morphisme projectif associé à E. En posant*

$$
\begin{aligned}
M &= \bigoplus_{0\le i\le N} \mathrm{CH}^{d-i}(S)_{\ell\text{-tors}},\\
N &= \bigoplus_{0\le i\le N} A^{d-i}(S)_{\ell\text{-tors}},\\
H &= \bigoplus_{0\le i\le N} H^{2d-1-2i}\big(S,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i)\big),
\end{aligned}
$$

on a des carrés commutatifs :

$$
(2.4.4)\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\ \lambda^d\ } & H^{2d-1}\big(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)\\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow\\
M & \xrightarrow{(\lambda^d,\lambda^{d-1},\dots,\lambda^{d-N})} & H
\end{array}
$$

$$
(2.4.5)\qquad
\begin{array}{ccc}
A^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\ \lambda^d\ } & H^{2d-1}\big(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)\\
\wr\uparrow & & \wr\uparrow\\
N & \xrightarrow{(\lambda^d,\lambda^{d-1},\dots,\lambda^{d-N})} & H
\end{array}
$$

Précisons les flèches verticales. Soit z la classe du fibré $\mathcal{O}_X(1)$ dans $\mathrm{CH}^1(X) = \mathrm{Pic}(X)$ (resp. dans $H^2(X,\mathbf{Z}_\ell(1))$). Soit $(a_0,\dots,a_N)$ un élément de la somme directe $\bigoplus_{0\le i\le N} \mathrm{CH}^{d-i}(S)_{\ell\text{-tors}}$ (respectivement de la somme directe $\bigoplus_{0\le i\le N} H^{2d-1-2i}\big(S,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i)\big)\big)$. On définit les flèches verticales par $(a_i)\mapsto \sum_{0\le i\le N} z^i\cdot\varphi^*(a_i)$. De plus, définissons une flèche

$$\bigoplus_{0\le i\le N} H^{d-1-i}\big(S_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^{d-i}(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i))\big) \to H^{d-1}\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\big)$$

par $(a_i) \mapsto \sum_{0\le i\le N} z^i \cdot \varphi^*(a_i)$, où z est la classe de $\mathcal{O}_X(1)$ dans $H^1\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^1(\mathbf{Z}_\ell(1))\big) \subset H^2\big(X, \mathbf{Z}_\ell(1)\big)$. En posant

$$\widetilde{H} = \bigoplus_{0\le i\le N} H^{d-1-i}\big(S_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^{d-i}(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i))\big),$$

$$H = \bigoplus_{0\le i\le N} H^{2d-1-2i}\big(S, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d-i)\big),$$

$$M = \bigoplus_{0\le i\le N} \mathrm{CH}^{d-i}(S)_{\ell\text{-tors}},$$

on obtient les carrés commutatifs :

$$(2.4.6)\qquad \begin{array}{ccc} H^{d-1}\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\big) & \longrightarrow & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widetilde{H} & \longrightarrow & H \end{array}$$

$$(2.4.7)\qquad \begin{array}{ccc} H^{d-1}\big(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\big) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widetilde{H} & \longrightarrow & M. \end{array}$$

En combinant (2.4.6) et (2.4.7) et en utilisant (2.1.14), on obtient (2.4.3). (Pour le calcul de l'anneau de Chow de l'éclaté, voir par exemple [14, 6.7]).

PROPOSITION 2.5 (compatibilité avec l'application d'Abel–Jacobi de Griffiths). — *Soit X un $\mathbf{C}$-schéma lisse projectif. Désignons par $J^d(X)$ la d-ième jacobienne intermédiaire $H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{R}\big)/H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}\big)$ et par $\mathrm{CH}^d(X)_h$ le sous-groupe de $\mathrm{CH}^d(X)$ formé des cycles homologiquement équivalents à 0. L'identification $\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)$, prenant $e^{2\pi i/\ell^\nu}$ comme générateur du groupe des ℓ^ν-ièmes racines de l'unité, donne des carrés commutatifs*

$$(2.5.1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^d(X)_{h,\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\psi^d} & J^d(X)_{\ell\text{-tors}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big) \end{array}$$

$$
(2.5.2)\qquad
\begin{array}{ccc}
A^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\psi^d} & J^d(X)_{\ell\text{-tors}} \\
\Big\| & & \Big\downarrow \\
A^d(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big),
\end{array}
$$

où ψ^d désigne l'application d'Abel–Jacobi de Griffiths.

Voir Bloch [2, Proposition 3.7].

2.6. Fixons quelques notations. Soit X un k-schéma lisse projectif. Le système projectif de suites exactes de faisceaux étales sur X

$$
(2.6.1)\qquad 0 \to \mathbf{Z}/\ell^n(d) \to \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d) \xrightarrow{\ell^n} \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d) \to 0
$$

fournit une suite exacte

$$
(2.6.2)\qquad 0 \to \varprojlim_n \big(H^{2d-2}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))/\ell^n\big) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Z}_\ell(d)\big) \\
\to T_\ell H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big) \to 0.
$$

Comme on a

$$
\begin{aligned}
(2.6.3)\qquad \varprojlim_n \big(H^{2d-2}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))/\ell^n\big) &= H^{2d-2}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)_{\text{cotors}} \\
&= H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Z}_\ell(d)\big)_{\text{tors}},
\end{aligned}
$$

on obtient donc un isomorphisme

$$
(2.6.4)\qquad H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Z}_\ell(d)\big)/\text{tors} \xrightarrow{\sim} T_\ell H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big).
$$

On obtient donc des applications

$$
(2.6.5)\qquad \lambda^d : T_\ell \,\mathrm{CH}^d(X) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Z}_\ell(d)\big)/\text{tors},
$$

$$
(2.6.6)\qquad \lambda^d : T_\ell A^d(X) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Z}_\ell(d)\big)/\text{tors},
$$

et par suite

$$
(2.6.7)\qquad \lambda^d : T_\ell \,\mathrm{CH}^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big),
$$

$$
(2.6.8)\qquad \lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big),
$$

que nous appellerons aussi applications de Bloch.

3. Image de l'application de Bloch

Le résultat principal de ce numéro est le suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible. Il existe un nombre fini de courbes C_α (lisses et projectives irréductibles sur k) et des classes de cycle $z_\alpha \in \mathrm{CH}^d(C_\alpha \times X)$ telles que les images des correspondances $[z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ (resp. $[z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$) engendrent l'image de l'application de Bloch $\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ (resp. $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$).*

LEMME 3.2. — *Soit a un élément de $A^d(X)_{\ell\text{-tors}}$. Soient C une courbe (lisse projective et irréductible), $z \in \mathrm{CH}^d(C \times X)$ et $b \in A^1(C)$ tels que $[z](b) = a$ dans $A^d(X)$. Il existe alors $c \in A^1(C)_{\ell\text{-tors}}$ tel que $\lambda^d([z](c)) = \lambda^d(a)$ dans $H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$.*

Supposons d'abord que k soit la clôture algébrique d'un corps fini. Alors $A^1(C) = \mathrm{Pic}^0(C)$ est un groupe abélien de torsion. Si c est la composante ℓ-primaire de b, on a $[z](c) = a$ dans $A^d(X)$.

Dans le cas général, soit $(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{z}, \mathbf{b})$ un modèle de (X, C, a, z, b) sur un schéma $\mathbf{S}$ connexe, lisse et de type fini sur $\mathbf{Z}$. (Plus précisément, $\eta = \operatorname{Spec} k$ est un point générique géométrique de $\mathbf{S}$; $\mathbf{X}$ et $\mathbf{C}$ sont lisses et projectifs sur $\mathbf{S}$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{b}$ sont des classes de cycle de $\mathrm{CH}^d(\mathbf{X})$, de $\mathrm{CH}^d(\mathbf{C} \times_{\mathbf{S}} \mathbf{X})$ ou de $\mathrm{CH}^1(\mathbf{C})$ respectivement, et (X, C, a, z, b) est la fibre de $(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{z}, \mathbf{b})$ en η). Prenons un point fermé s de $\mathbf{S}$, de caractéristique $\neq \ell$, et soit $(X_0, C_0, a_0, z_0, b_0)$ la fibre géométrique en s. Alors on obtient un système compatible de flèches de spécialisation :

(3.2.1)

$$
\begin{tikzcd}
A^1(C)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "{[z]}"] \arrow[d, "\wr"'] & A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] \arrow[d] & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \arrow[d, "\wr"'] \\
A^1(C_0)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "{[z_0]}"] & A^d(X_0)_{\ell\text{-tors}} \arrow[r, "\lambda^d"] & H^{2d-1}(X_0, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)).
\end{tikzcd}
$$

(*cf.* [14, 20.3]). Soit c l'élément de $A^1(C)_{\ell\text{-tors}}$, qui correspond à la composante ℓ-primaire de b_0. On a donc $\lambda^d([z](c)) = \lambda^d(a)$.

Démontrons d'abord la première assertion du théorème. On pose $N = \mathrm{Im}(\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)))$. Soit $\{(C_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ la famille des couples d'une courbe C_α (lisse projective et irréductible) et $z_\alpha \in \mathrm{CH}^d(C_\alpha \times X)$. Posons $N_\alpha = \mathrm{Im}([z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \to$

$H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\big)$. Grâce au carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^1(C_\alpha)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{[z_\alpha]} & A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \\ {\scriptstyle\lambda^1}\wr\big\downarrow & & {\scriptstyle\lambda^d}\wr\big\downarrow \\ H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) & \xrightarrow{[z_\alpha]} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \end{array} \tag{3.1.1}$$

(Bloch [2, Proposition 3.4]), N_α coïncide avec l'image du composé

$$A^1(C_\alpha)_{\ell\text{-tors}} \xrightarrow{[z_\alpha]} A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \xrightarrow{\lambda^d} H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big).$$

Par le lemme précédent, on a $\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{U}} N_\alpha = N$. Or N est de type cofini et les N_α sont divisibles. D'après 1.2, il existe une partie fini $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ telle que les N_α, $\alpha \in \mathfrak{B}$, engendrent N, d'où le résultat.

Déduisons-en maintenant la deuxième assertion. L'application λ^d : $T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ se factorise en $T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$. Comme $A^d(X)_{\ell\text{-tors}}$ est divisible (*cf.* [3, Lemma 1.3]), l'application $T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est surjective par 1.4. D'autre part, l'application $T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ est injective. On a donc :

$$T_\ell N \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell = \operatorname{Im}\Big(\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))\Big).$$

Il suffit donc d'appliquer 1.4 à $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{B}} H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)\big)$ et à $N = \operatorname{Im}\big(\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\big)$.

Corollaire 3.3. — *Supposons $p = 0$. Si*

$$\dim H^{d-1}(X, \Omega_X^d) + \dim H^d(X, \Omega_X^{d-1}) \neq \dim H_{\mathrm{DR}}^{2d-1}(X/k),$$

l'application de Bloch

$$\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$$

$$(\textit{resp.} \qquad \lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)\,)$$

n'est pas surjective.

Remarquons d'abord que la non surjectivité de

$$\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$$

implique celle de

$$\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)$$

par 1.4. Montrons l'énoncé pour $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$.

(1) *Cas où $k = \mathbf{C}$.* — D'après 3.1, il existe une famille $\{(C_\alpha, z_\alpha)\}$ de couples d'une courbe C_α et $z_\alpha \in \mathrm{CH}^d(C_\alpha \times X)$ telle que les images des correspondances $[z_\alpha] : H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)\big) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ engendrent l'image de l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$. Posons

$$\begin{aligned} N &= \mathrm{Im}\Big(\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))\Big), \\ N_\alpha &= \mathrm{Im}\Big([z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))\Big), \\ L_\alpha &= \mathrm{Im}\Big([z_\alpha] : H^1(C_\alpha(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(1)) \to H^{2d-1}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(d))\Big). \end{aligned}$$

Considérons le carré commutatif :

$$\text{(3.3.1)} \qquad \begin{array}{ccc} H^1\big(C_\alpha(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(1)\big) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{[z_\alpha]\otimes 1} & H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(d)\big) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell \\ \wr\big\downarrow & & \wr\big\downarrow \\ H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)\big) & \xrightarrow{[z_\alpha]} & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big). \end{array}$$

$L_\alpha \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell$ s'envoie sur N_α par la flèche verticale de droite. Comme la correspondance $[z_\alpha] : H^1\big(C_\alpha(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(1)\big) \to H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(d)\big)$ est un morphisme de structures de Hodge sur $\mathbf{Q}$, L_α est contenu dans la partie de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$ de $H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{C}(d)\big)$. Alors le sous-espace L de $H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(d)\big)$, engendré par les L_α, est contenu dans la partie de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$ de $H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{C}(d)\big)$. Par hypothèse, on a $L \neq H^{2d-1}\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(d)\big)$. Comme $L \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_\ell$ s'envoie sur N par la flèche verticale de droite dans (3.3.1), on obtient $N \neq H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$.

(2) *Cas où k est un sous-corps de $\mathbf{C}$.* — Considérons le carré commutatif :

$$\text{(3.3.2)} \qquad \begin{array}{ccc} T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big) \\ \wr\big\downarrow & & \wr\big\downarrow \\ T_\ell A^d(X_{\mathbf{C}}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{Q}_\ell(d)\big) \end{array}$$

(*cf.* 2.2). La non surjectivité de la flèche horizontale en haut équivaut donc à celle de la flèche horizontale en bas. Par suite on se ramène au cas (1).

(3) *Cas général.* — Prenons un sous-corps k' algébriquement clos de k, qui admet un plongement dans $\mathbb{C}$, et un k'-schéma X' lisse projectif tels que $X' \otimes_{k'} k$ soit isomorphe à X. On a donc un carré commutatif :

$$
\begin{array}{ccc}
T_\ell A^d(X') \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X', \mathbf{Q}_\ell(d)\big) \\
\wr\big\downarrow & & \wr\big\downarrow \\
T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big).
\end{array}
\tag{3.3.3}
$$

La non surjectivité de la flèche horizontale en bas équivaut à celle de la flèche horizontale en haut. Par suite on se ramène au cas (2).

COROLLAIRE 3.4. — *Supposons $p > 0$. Si le groupe de cohomologie cristalline $H^{2d-1}(X/W)_K$ n'a pas toutes ses pentes $\subset [d-1, d]$, l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ (resp. $\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)\big)\big)$ n'est pas surjective.*

(1) *Cas où k est la clôture algébrique d'un corps fini.* — Soit $\{(C_\alpha, z_\alpha)\}$ une famille finie de couples d'une courbe et $z_\alpha \in \mathrm{CH}^d(C_\alpha \times X)$ telle que les images des correspondances $[z_\alpha] : H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)\big) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ engendrent l'image de l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$. Posons

$$
\begin{aligned}
N &= \mathrm{Im}\Big(\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))\Big) \\
N_\alpha &= \mathrm{Im}\Big([z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))\Big).
\end{aligned}
$$

Il existe un sous-corps fini $\mathbf{F}_q$ de k tel que X, les C_α et les z_α se descendent sur $\mathbf{F}_q$. Soit F le Frobenius géométrique par rapport à $\mathbf{F}_q$. On fixe un isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{Q}}_p$ et une valuation v sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$, normalisée par $v(q) = 1$. Les valeurs propres β de F sur $H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)\big)$ satisfont à $-1 \le v(\beta) \le 0$ (*cf.* KATZ, MESSING [20]). Comme les correspondances $[z_\alpha] : H^1\big(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)\big) \to H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$ commutent à F, les valeurs propres β de F sur N_α, et par suite celles sur N, satisfont à $-1 \le v(\beta) \le 0$. Soient maintenant γ_j les valeurs propres de F sur $H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Alors les $v(\gamma_j)$ donnent les pentes du groupe de cohomologie cristalline $H^{2d-1}(X/W)_K$ (*loc. cit.*). Par suite, si on avait $N = H^{2d-1}\big(X, \mathbf{Q}_\ell(d)\big)$, tous les γ_j satisferaient à $d-1 \le v(\gamma_j) \le d$, c'est contraire à l'hypothèse.

(2) *Cas général.* — Prenons un modèle $\mathbf{X}$ sur un schéma $\mathbf{S}$ connexe, lisse et de type fini sur $\mathbf{F}_p$. (Plus précisément, $\eta = \operatorname{Spec} k$ est un point générique géométrique de $\mathbf{S}$, $\mathbf{X}$ est lisse et projectif sur $\mathbf{S}$ et X est la fibre de $\mathbf{X}$ en η). Par le théorème de spécialisation de GROTHENDIECK (*cf.* CREW [8, Théorème 2.7]), il existe un point fermé s de $\mathbf{S}$ tel que $H^*(X/W)$ et $H^*(X_0/W_0)$ aient même polygone de Newton, où X_0 est la fibre géométrique de $\mathbf{X}$ en s et W (resp. W_0) est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. $k(\bar{s})$). Considérons le carré commutatif :

$$\text{(3.4.1)}\qquad \begin{array}{ccc} T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)) \\ \big\downarrow & & \wr\big\downarrow \\ T_\ell A^d(X_0) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X_0, \mathbf{Q}_\ell(d)) \end{array}$$

(*cf.* 2.3). La non surjectivité de la flèche horizontale en bas implique donc celle de la flèche horizontale en haut. Par suite on se ramène au cas (1).

3.5. Soit X une variété lisse projective irréductible sur $\mathbf{C}$. Désignons par $J_a^d(X)$ le sous-tore complexe de la jacobienne intermédiaire $J^d(X)$ (*cf.* 2.5.2), engendré par les images des correspondances $[z] : J^1(C) \to J^d(X)$, où C est une courbe et z est une classe de cycle $\in \mathrm{CH}^d(C \times H)$. Alors $J_a^d(X)$ est une variété abélienne.

En effet, soit $\{(C_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ la famille des couples d'une courbe C_α et $z_\alpha \in \mathrm{CH}^d(C_\alpha \times X)$. Posons $A_\alpha = \operatorname{Im}\big([z_\alpha] : J^1(C_\alpha) \to J^d(X)\big)$. Comme $J^1(C_\alpha)$ est une variété abélienne, A_α est aussi une variété abélienne. Par ailleurs, comme les A_α sont des sous-variétés analytiques fermées de $J^d(X)$, il existe une partie finie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ telle que les A_α, $\alpha \in \mathfrak{B}$, engendrent $J_a^d(X)$, d'où le résultat.

Posons $B = \prod_{\alpha \in \mathfrak{B}} J^1(C_\alpha)$. Les correspondances $[z_\alpha] : J^1(C_\alpha) \to J^d(X)$ définissent un homomorphisme surjectif $\xi : B \to J_a^d(X)$ de variétés abéliennes.

PROPOSITION 3.6 . — *L'homomorphisme ξ induit une surjection de $B_{\ell\text{-tors}}$ sur $J_a^d(X)_{\ell\text{-tors}}$.*

Soit c un élément de $J_a^d(X)$, annulé par ℓ^r. Il existe alors $b \in B$ tel que $\xi(b) = c$. $\ell^r b$ appartient à $L = \operatorname{Ker} \xi$. Or L est une extension d'un groupe fini par une variété abélienne, par suite, par un groupe divisible. Alors pour r assez grand, $\ell^r b$ appartient au plus grand sous-groupe divisible de L. Prenons $b' \in L$ tel que $\ell^r b' = \ell^r b$, et posons $a = b - b'$. On a donc $\ell^r a = 0$ dans B et $\xi(a) = \xi(b) = c$.

COROLLAIRE 3.7. — *On suppose que k est un sous-corps algébriquement clos de $\mathbf{C}$. Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible. Il existe alors une bijection* $\operatorname{Im}(\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))) \xrightarrow{\sim} J_a^d(X_{\mathbf{C}})_{\ell\text{-tors}}$.

D'après 2.2, on peut supposer que $k = \mathbf{C}$. Par 3.6, on a donc $\psi^d(A^d(X)_{\ell\text{-tors}}) = J_a^d(X)_{\ell\text{-tors}}$. D'après 2.4, on obtient le résultat.

Remarque 3.8. — La PROPOSITION 3.6 donne une autre démonstration du THÉORÈME 3.1 pour k de caractéristique 0.

4. Exemples

Exemple 4.1. — ($d = 1$). Il est classique que $\lambda^1 : T_\ell A^1(X) \to H^1(X, \mathbf{Z}_\ell(1))$ est bijective (théorie de Kummer) (voir BLOCH [2, Proposition 3.6]).

Exemple 4.2. — ($d = \dim X$). Il est connu que $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est bijective. C'est une conséquence du théorème de ROJTMAN ([29, Théorème 3.1]. Voir aussi BLOCH [2, Théorème 4.2]).

Remarque 4.3. — Pour $1 < d < \dim X$, l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ n'est pas nécessairement surjective comme on l'a remarqué dans 3.3 et 3.4. Il est par ailleurs connu que $\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$ est injective (*cf.* COLLIOT-THÉLÈNE, SANSUC, SOULÉ [9, 1, Corollaire 4]).

Exemple 4.4. — Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible. Rappelons que X est dit *unirationnel* s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif sur X.

(1) Si k est de caractéristique 0, on a $H^0(X, \Omega_X^i) = 0$ pour $i > 0$, et par suite $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i > 0$.

(2) Si k est de caractéristique > 0, $H^i(X/W)_K = H^i(X/W)_K^{[1,i-1]}$ pour $0 < i \leq dimX$ (*cf.* EKEDAHL [13, Théorème 4]).

PROPOSITION 4.4.1. — *Supposons que X soit unirationnel de dimension 3. Alors l'application de Bloch $\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$ est bijective.*

Grâce au théorème de désingularisation d'Abhyankar, il existe un diagramme

(4.4.2)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathbf{P}^3 & X \end{tikzcd}$$

où ψ est un composé d'éclatés de centres lisses et φ est un morphisme génériquement fini. La proposition est donc une conséquence des lemmes suivants.

LEMME 4.5. — *Soient X un k-schéma lisse projectif et $\psi : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long d'un point ou d'une courbe lisse. Si l'application $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est surjective, $\lambda^d : T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d))$ l'est aussi.*

Supposons d'abord que ψ soit l'éclatement d'un point de Y. On a donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)) \end{array} \tag{4.5.1}$$

(*cf.* 2.4). La surjectivité de la flèche horizontale en bas implique donc celle de la flèche horizontale en haut.

Supposons maintenant que ψ soit l'éclatement de X le long d'une courbe lisse Y. Il suffit de traiter des cas où $1 < d < \dim X$ (*cf.* 4.1 et 4.2). Posons :

$$M = T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \oplus T_\ell A^1(Y) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell,$$
$$N = H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)) \oplus H^1(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)).$$

On a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\lambda^d} & H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ M & \xrightarrow{(\lambda^d, \lambda^1)} & N \end{array} \tag{4.5.2}$$

Or $\lambda^1 : T_\ell A^1(Y) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^1(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est bijective. La surjectivité de la flèche horizontale en bas implique donc celle de la flèche horizontale en haut.

LEMME 4.6. — *Soit $\varphi : \widetilde{X} \to X$ un morphisme génériquement fini de degré m de k-schémas lisses projectifs. Si l'application $\lambda^d : T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est surjective, $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ l'est aussi.*

Considérons le diagramme commutatif :

(4.6.1)

$$\begin{array}{ccccc} T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\varphi^*} & T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\varphi_*} & T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \\ \lambda^d \big\downarrow & & \lambda^d \big\downarrow & & \lambda^d \big\downarrow \\ H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d)) & \xrightarrow{\varphi_*} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)). \end{array}$$

Comme $\varphi_* \circ \varphi^* =$ la multiplication par m, $\varphi_* : H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est surjective. Par suite, la surjectivité de

$$\lambda^d : T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d))$$

implique celle de

$$\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$$

Exemple 4.7. — Supposons $p > 0$. Rappelons qu'une variété abélienne X sur k est dite *supersingulière* si le groupe de cohomologie cristalline $H^1(X/W)$ est purement de pente $1/2$. Comme $H^i(X/W) = \bigwedge^i H^1(X/W)$, le groupe $H^i(X/W)$ est purement de pente $i/2$.

THÉORÈME 4.7.1 (*). — *Soit X une variété abélienne supersingulière sur k. Alors l'application de Bloch $\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ (resp. $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$) est surjective. De plus, λ^d est bijective si $d = 1, 2$ ou $\dim X$.*

En effet, comme X est une variété abélienne supersingulière, l'application classe de cycle $c^1 : \mathrm{CH}^1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^2(X, \mathbf{Z}_\ell(1))$ est surjective (SHIODA [31, appendix]). Alors $c^d : \mathrm{CH}^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_\ell \to H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$ est aussi surjective pour tout $d \geq 2$ car $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell) = \bigwedge^i H^1(X, \mathbf{Z}_\ell)$. Considérons

(*) Pour $d = 2$, le résultat est dû à Bloch (non publié) le diagramme commutatif :

$$
(4.7.2)\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^d(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}_\ell \times A^1(X)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\text{produit}} & A^{d+1}(X)_{\ell\text{-tors}} \\
{\scriptstyle c^d\times\lambda^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^{d+1}} \\
H^{2d}(X,\mathbf{Z}_\ell(d)) \times H^1(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) & \xrightarrow{\text{produit}} & H^{2d+1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d+1))
\end{array}
$$

(*cf.* BLOCH [2, Proposition 3.4]). Comme $H^i(X,\mathbf{Z}/\ell^r) = \bigwedge^i H^1(X,\mathbf{Z}/\ell^r)$, le produit $H^{2d}(X,\mathbf{Z}/\ell^r(d)) \times H^1(X,\mathbf{Z}/\ell^r(1)) \to H^{2d+1}(X,\mathbf{Z}/\ell^r(2d+1))$ est surjectif. Par suite, le produit $H^{2d}(X,\mathbf{Z}_\ell(d)) \times H^1(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \to H^{2d+1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(2d+1))$ est surjectif. On sait d'autre part que $\lambda^1 : A^1(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^1(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))$ est bijective. Il en résulte que $\lambda^{d+1} : A^{d+1}(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d+1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d+1))$ est aussi surjective. De plus, $\lambda^2 : A^2(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^3(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(2))$ est injective (COLLIOT–THÉLÈNE, SANSUC, SOULÉ [9, 1, Corollaire 4]). On en conclut que λ^2 est bijective. Démonstration analogue pour $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \to H^{2d-1}(X,\mathbf{Z}_\ell(d))$.

Exemple 4.8. — Supposons $p > 0$. Disons qu'une hypersurface X lisse de $\mathbf{P}_k^{N+1}$ est *supersingulière* si le groupe de cohomologie cristalline $H^N(X/W)$ est purement de pente $N/2$.

THÉORÈME 4.8.1. — *Soit X une variété de Fermat supersingulière de dimension $N = 2d-1$. Alors l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X)\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))$ (resp. $\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$) est surjective. De plus, λ^d est bijective si $d = 1$ ou 2.*

Rappelons d'abord la "structure inductive" des variétés de Fermat (*cf.* SHIODA, KATSURA [34]). Soit m le degré de X, et soient Y la variété de Fermat de dimension $N-1$ et de degré m et C la courbe de Fermat de degré m. Fixons ϵ tel que $\epsilon^m = -1$. Notons $(x_0,\dots,x_{N+1})$, $(y_0,\dots,y_N)$, (z_0,z_1,z_2) les coordonnées homogènes d'un point de X, Y ou C respectivement. On définit une application rationnelle $\varphi : Y \times C \to X$ par $\varphi(y_0,\dots,y_N;z_0,z_1,z_2) = (y_0z_2,\dots,y_{N-1}z_2,\epsilon y_N z_0,\epsilon y_N z_1)$. L'ensemble exceptionnel E de φ est donné par les équations :

$$y_0^m + \cdots + y_{N-1}^m = 0 \quad \text{et} \quad z_0^m + z_1^m = 0.$$

E est donc isomorphe à la somme disjointe de m copies de la variété de Fermat Z de dimension $N-2$ et de degré m. Soient $\beta : \widetilde{X} \to Y \times C$ le morphisme birationnel éclatant $Y \times C$ le long de E et $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to X$ le morphisme défini par φ :

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] & \\
E \subset Y \times C & X.
\end{tikzcd}
\tag{4.8.2}
$$

Alors $\widetilde{\varphi}$ est génériquement fini de degré m (*loc. cit.* THÉORÈME 1.7). Si X est supersingulière, le sous-groupe engendré par p dans $(\mathbf{Z}/m)^{\times}$ contient -1 et Y, C et Z sont aussi supersingulières (*loc. cit.* PROPOSITION 3.10).

Prouvons le théorème par récurrence sur la dimension de X. Pour X de dimension 1, la conclusion est vraie même si X n'est pas supersingulière.

Supposons que X soit de dimension ≥ 3. Par la formule de Künneth, on a :

$$H^{2d-1}(Y \times C, \mathbf{Q}_\ell(d)) \xleftarrow{\sim} H^{2d-2}(Y, \mathbf{Q}_\ell(d-1)) \otimes_{\mathbf{Q}_\ell} H^1(C, \mathbf{Q}_\ell(1)). \tag{4.8.3}$$

Comme Y est une variété de Fermat supersingulière, l'application classe de cycle $c^{d-1} : \mathrm{CH}^{d-1}(Y) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-2}(Y, \mathbf{Q}_\ell(d-1))$ est surjective (*loc. cit.* THÉORÈME 2.10). D'autre part, l'application de Bloch λ^1 : $T_\ell A^1(C) \to H^1(C, \mathbf{Z}_\ell(1))$ est bijective. Alors l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(Y \times C) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(Y \times C, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est aussi surjective, grâce au diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{CH}^{d-1}(Y) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_\ell \times T_\ell A^1(C) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[r, "\text{produit}"] \arrow[d, "c^{d-1} \times \lambda^1"'] & T_\ell A^d(Y \times C) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[d, "c^d"] \\
H^{2d-2}(Y, \mathbf{Q}_\ell(d-1)) \times H^1(C, \mathbf{Q}_\ell(1)) \arrow[r] & H^{2d-1}(Y \times C, \mathbf{Q}_\ell(d))
\end{tikzcd}
\tag{4.8.4}
$$

(*cf.* BLOCH [2, Proposition 3.4, Proposition 3.5]).

En posant

$$
\begin{aligned}
M &= T_\ell A^d(Y \times C) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \oplus T_\ell A^{d-1}(E) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell, \\
N &= H^{2d-1}(Y \times C, \mathbf{Q}_\ell(d)) \oplus H^{2d-3}(E, \mathbf{Q}_\ell(d-1)),
\end{aligned}
$$

on a le carré commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
T_\ell A^d(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[r, "\lambda^d"] & H^{2d-1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q}_\ell(d)) \\
M \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "(\lambda^d, \lambda^{d-1})"] & N \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}
\tag{4.8.5}
$$

(*cf.* 2.4). Comme E est somme disjointe de copies de Z, variété de Fermat supersingulière de dimension $N-2$, l'application de Bloch λ^{d-1} : $T_\ell A^{d-1}(E)\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-3}(E,\mathbf{Q}_\ell(d-1))$ est surjective par l'hypothèse de récurrence. Par suite, λ^d : $T_\ell A^d(\widetilde{X})\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(\widetilde{X},\mathbf{Q}_\ell(d))$ est aussi surjective. D'après 4.6, on obtient la conclusion pour λ^d : $T_\ell A^d(X)\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))$.

Déduisons-en la deuxième assertion. On sait que $A^d(X)_{\ell\text{-tors}}$ est divisible (*cf.* [3, Lemme 3.1]). De plus, X étant une hypersurface lisse de $\mathbf{P}_k^{2d}$ ($2d>2$), $H^{2d}(X,\mathbf{Z}_\ell(d))_{\text{tors}}=0$. Par suite, $H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$ est divisible. Il suffit donc d'appliquer le LEMME 1.3 à $M=A^d(X)_{\ell\text{-tors}}$ et à $N=H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$.

5. Image de l'application de Bloch et filtration par le coniveau

5.1. Soit X un k-schéma lisse projectif. Posons $F=\mathbf{Z}/\ell^m(r)$, $\mathbf{Z}_\ell(r)$, $\mathbf{Q}_\ell(r)$ ou $\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(r)$. On définit une filtration décroissante de $H^n(X,F)$, appelée *filtration par le coniveau*, en posant

$$N^dH^n(X,F)=\sum_U \operatorname{Ker}\big(H^n(X,F)\to H^n(U,F)\big), \tag{5.1.1}$$

où la somme est étendue aux ouverts U de X tels que $\operatorname{codim}(X-U,X)\geq d$ (*cf.* GROTHENDIECK [16], BLOCH–OGUS [6]).

Par ailleurs, on définit une filtration décroissante de $H^n(X,\mathbf{Q}_\ell(r))$, appelée *filtration par le coniveau modifiée*, en posant

$$\begin{aligned} &N'^dH^n(X,\mathbf{Q}_\ell(r))\\ &\quad=\sum_{(Y,z)}\operatorname{Im}\Big([z]) : H^{n-2d}(Y,\mathbf{Q}_\ell(r-d))\to H^n(X,\mathbf{Q}_\ell(r))\Big), \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

où la somme est étendue aux couples (Y,z) tels que Y soit lisse projectif et $z\in \mathrm{CH}^{d+N}(Y\times X)$, $N=\dim Y$ (*cf.* KATZ [19]).

PROPOSITION 5.2. — *Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible. Alors l'image de l'application de Bloch λ^d : $T_\ell A^d(X)\otimes_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))$ coïncide avec $N'^{d-1}H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))$.*

Par définition, on a

$$\begin{aligned} &N'^{d-1}H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))\\ &\quad=\sum_{(Y,z)}\operatorname{Im}\Big([z] : H^1(Y,\mathbf{Q}_\ell(1))\to H^{2d-1}(X,\mathbf{Q}_\ell(d))\Big), \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

où la somme est étendue aux couples (Y, z) tels que Y soit lisse projectif et $z \in \mathrm{CH}^{d-1+N}(Y \times X)$, $N = \dim Y$. On obtient donc $\operatorname{Im}\lambda^d \subset N'^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ d'après 3.1. D'autre part, on a $\operatorname{Im}\lambda^d \supset N'^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ en vertu du carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} T_\ell A^1(Y) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{[z]} & T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \\ {\scriptstyle \lambda\, \wr}\big\downarrow & & {\scriptstyle \lambda\, \wr}\big\downarrow \\ H^1(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) & \xrightarrow{[z]} & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)). \end{array} \tag{5.2.2}$$

PROPOSITION 5.3. — *Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible et soient n, $d \in \mathbf{N}$. On a :*

$$N'^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \subset N^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell). \tag{5.3.1}$$

De plus, si k est de caractéristique 0, *on a :*

$$N'^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) = N^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell). \tag{5.3.2}$$

En effet, soient Y un k-schéma lisse projectif de dimension N et $z \in \mathrm{CH}^{d+N}(Y \times X)$. Soit Z l'image dans X du support d'un cycle qui représente z. Alors Z est un fermé de codimension $\geq d$ et les éléments de $\operatorname{Im}[z]$ sont à supports dans Z. On en déduit la première conclusion.

Supposons maintenant que k soit de caractéristique 0. Soient $i : Z \to X$ un fermé de X de codimension d et $h : \widetilde{Z} \to Z$ une désingularisation. Alors on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\big((i \circ h)_* : H^{n-2d}(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell(-d)) \to H^n(X, \mathbf{Q}_\ell)\big) \\ = \operatorname{Ker}\big(H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(X - Z, \mathbf{Q}_\ell)\big) \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

par le LEMME 5.4 ci-après. Or l'application $(i \circ h)_* : H^{n-2d}(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell(-d)) \to H^n(X, \mathbf{Q}_\ell)$ est définie par le graphe du morphisme $i \circ h : \widetilde{Z} \to X$. On en déduit la deuxième conclusion.

LEMME 5.4. — *Soient X un k-schéma lisse propre, $i : Z \to X$ un fermé de X de codimension d et $h : \widetilde{Z} \to Z$ une désingularisation. Alors la suite*

$$H^{n-2d}(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell(-d)) \xrightarrow{(i\circ h)_*} H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(X - Z, \mathbf{Q}_\ell) \tag{5.4.1}$$

est exacte.

C'est un analogue du corollaire 8.2.8 de DELIGNE [11]. Pour démontrer le LEMME 5.4, on emploie la notion de poids potentiel pour la cohomologie ℓ-adique (DELIGNE [12, 3.4.10]) au lieu de celle de poids pour la structure de Hodge. Donnons-en brièvement une preuve.

Par dualité de Poincaré, 5.4 équivaut au

LEMME 5.4.2. — *Sous les hypothèses de* 5.4, *la suite*

$$H^n_c(X - Z, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{(i\circ h)^*} H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell) \tag{5.4.3}$$

est exacte.

On désigne par Gr^W_i l'espace quotient du sous-espace potentiellement de poids $\leq i$ par celui potentiellement de poids $\leq i - 1$. Considérons la suite exacte de cohomologie locale :

$$H^n_c(X - Z, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{i^*} H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell). \tag{5.4.4}$$

Comme X est lisse et propre, $H^n(X, \mathbf{Q}_\ell)$ est potentiellement pur de poids n (*cf. loc. cit.* COROLLAIRE 3.3.9). Par suite on a :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}\big(i^* : H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell)\big) \\ &\qquad = \operatorname{Ker}\big(i^* : H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) \to Gr^W_n H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell)\big). \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Il suffit donc de prouver

LEMME 5.4.6. — *Soit $h : \widetilde{Z} \to Z$ un morphisme surjectif de k-schémas propres. Supposons que $\widetilde{Z}$ soit lisse. Alors l'homomorphisme canonique $h^* : H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$ induit une injection $Gr^W_n H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell) \to Gr^W_n H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell) = H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$.*

La suite spectrale de Leray $E_2^{ij} = H^i(Z, R^j h_* \mathbf{Q}_\ell) \Rightarrow H^{i+j}(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$ définit une surjection $E_2^{n0} = H^n(Z, h_* \mathbf{Q}_\ell) \to E_\infty^{n0}$ ainsi qu'une injection $E_\infty^{n0} \to H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$. Comme $\widetilde{Z}$ est lisse et propre, $H^n(\widetilde{Z}, \mathbf{Q}_\ell)$ est potentiellement pur de poids n, et par suite E_∞^{n0} l'est aussi. D'autre part, h étant propre, $R^j h_* \mathbf{Q}_\ell$ est potentiellement mixte de poids $\leq j$

(*cf. loc. cit.*, THÉORÈME 3.3.1). Z étant propre, $E_2^{ij} = H^i(Z, R^j h_* \mathbf{Q}_\ell)$ est donc potentiellement de poids $\leq i+j$. Par suite E_r^{ij} est potentiellement de poids $\leq n-1$ pour $i+j = n-1$, de sorte que les différentielles $d_r : E_r^{n-r,n+r-1} \to E_r^{n0}$ sont nulles sur Gr_n^W. Il en résulte que la surjection $H^n(Z, h_*\mathbf{Q}_\ell) \to E_\infty^{n0}$ induit une bijection $Gr_n^W H^n(Z, h_*\mathbf{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} E_\infty^{n0}$.

Par ailleurs, h étant surjectif, le morphisme canonique $\mathbf{Q}_\ell \to h_*\mathbf{Q}_\ell$ est injectif. Posons $F = h_*\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Q}_\ell$. On obtient donc une suite exacte

$$(5.4.7) \qquad \cdots \to H^{n-1}(\widetilde{Z}, F) \to H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell) \to H^n(Z, h_*\mathbf{Q}_\ell) \to \cdots.$$

Comme $h_*\mathbf{Q}_\ell$ est potentiellement mixte de poids ≤ 0, F l'est aussi. Par suite $H^{n-1}(X, F)$ est potentiellement de poids $\leq n-1$. Alors $H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell) \to H_n(Z, h_*\mathbf{Q}_\ell)$ induit une injection $Gr_n^W H^n(Z, \mathbf{Q}_\ell) \to Gr_n^W H^n(Z, h_*\mathbf{Q}_\ell)$, d'où le résultat.

Remarque 5.5. — L'hypothèse que k est de caractéristique 0 n'est utilisée que pour assurer la résolution des singularités. Grâce à ABHYANKAR, on a donc $N'^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell) = N^d H^n(X, \mathbf{Q}_\ell)$ pour $d \geq \dim X - 3$, même si k est de caractéristique > 0.

Remarque 5.6. — Grâce au diagramme commutatif

$$(5.6.1) \qquad \begin{tikzcd} H^{d-1}(X_{\mathrm{zar}}, \mathcal{H}^d(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d)) \\ \mathrm{CH}^d(X)_{\ell\text{-tors}} \arrow[ur, "\lambda^d"'] & \end{tikzcd}$$

où α est surjective (COLLIOT–THÉLÈNE, SANSUC, SOULÉ [9, Corollaire 1.4]), β et λ^d ont même image. Or $\operatorname{Im}\beta$ n'est autre que

$$N^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$$

(BLOCH, OGUS [6, 6]). L'image de l'application

$$\lambda^d : T_\ell \,\mathrm{CH}^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$$

est donc contenue dans

$$\Big(\varprojlim_r N^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}/\ell^r(d))\Big) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell.$$

D'autre part, on a

$$N^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d)) \subset \Big(\varprojlim_r N^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}/\ell^r(d))\Big) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell.$$

J'ignore si l'image de $\lambda^d : T_\ell \,\mathrm{CH}^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est contenue dans $N^{d-1}H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$.

6. Application I. Variantes d'un théorème de Griffiths [14]

6.1. Soit X une intersection complète sur k. Rappelons (*cf.* DELIGNE [10]) que X est dite *générique* si X est projectivement isomorphe, sur une extension de k, à une intersection complète définie par des équations à coefficients algébriquement indépendants sur le corps premier.

THÉORÈME 6.2. — *Soit X une intersection complète lisse de dimension $2d-1 \geq 3$ et de multidegré $(n_1, \ldots, n_r)$, générique. Faisons l'hypothèse : (*) $(2d-1; n_1, \ldots, n_r)$ est distinct de $(2d-1; 2, 2)$, $(2d-1; 2, 2, 2)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(3; 2, 3)$, $(5; 3)$. Alors l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$ (resp. $\lambda^d : A^d(X)_{\ell\text{-tors}} \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))$) est nulle.*

PROPOSITION 6.3. — *Soient Y une intersection complète lisse de dimension $2d$ et $H = \{Y_t\}_{t \in D}$ un pinceau de Lefschetz de sections par des hypersurfaces à fibre générique géométrique $X = Y_{\bar\eta}$. Alors l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ est surjective ou nulle.*

C'est un résultat de KATZ ([19, Proposition 3.2]) (*cf.* 5.2). Rappelons sa démonstration.

Soient C une courbe sur $k(\bar\eta)$ et $z \in \mathrm{CH}^d(C \times X)$. Supposons que l'image de la correspondance $[z] : H^1(C, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ soit non nulle. $\mathrm{Im}[z]$ est stable par un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$. Or tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$ agit sur $H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ de façon irréductible (KATZ [18, Corollaire 6.7]). On a donc $\mathrm{Im}[z] = H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$. D'après 3.1, on obtient le résultat.

Appliquons 6.3 à une intersection complète Y lisse de dimension $2d \geq 4$ et de multidegré $(n_1, \ldots, n_{r-1})$ générique et à un pinceau de Lefschetz H de sections de Y par des hypersurfaces de degré n_r.

Supposons d'abord que k soit de caractéristique 0. Si $(2d-1; n_1, \ldots, n_r)$ vérifie l'hypothèse (*), on a

$$\dim H^{2d-1}_{DR}(X/k) \neq \dim H^d(X, \Omega^{d-1}_X) + \dim H^{d-1}(X, \Omega^d_X)$$

(voir par exemple RAPOPORT [28]). D'après 3.3, l'application de Bloch $\lambda^d : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^{2d-1}(X, \mathbf{Q}_\ell(d))$ ne peut pas être surjective, et par suite λ^d est nulle.

Supposons maintenant que k soit de caractéristique > 0. Si de plus $(2d-1; n_1, \ldots, n_r)$ vérifie l'hypothèse (*), on a

$$H^{2d-1}(X/W)_K \neq H^{2d-1}(X/W)_K^{[d-1,d]},$$

grâce à un théorème de DELIGNE (non publié) selon lequel *une intersection complète lisse générique est ordinaire.* (Pour la définition de "ordinaire", voir MAZUR [22], BLOCH, KATO [4], ILLUSIE, RAYNAUD [17]). D'après 3.4, on obtient le résultat de la même façon.

COROLLAIRE 6.4 (*cf.* GRIFFITHS [15, Théorème 13.1]). — *Sous les hypothèses de* 6.2*, supposons que k soit un sous-corps de* $\mathbf{C}$*. Alors l'application d'Abel–Jacobi de Griffiths* $\psi^d : A^d(X_{\mathbf{C}}) \to J^d(X_{\mathbf{C}})$ *est nulle.*

D'après 3.7, on a $J^d_a(X_{\mathbf{C}})_{\ell\text{-tors}} = 0$; on en déduit $J^d_a(X_{\mathbf{C}}) = 0$, et on retrouve ainsi le résultat de GRIFFITHS.

6.5. SHIODA a donné quelques exemples explicites d'hypersurfaces X de dimension $2d-1$, définies sur $\mathbf{Q}$, telles que l'application d'Abel–Jacobi $\psi^d : A^d(X_{\mathbf{C}}) \to J^d(X_{\mathbf{C}})$ soit nulle ([32, Théorème]). D'ailleurs, il a suggéré l'existence d'hypersurfaces ou d'intersections complètes définies sur $\mathbf{Q}$, munies de la propriété ci-dessus, seulement sous la condition (*) de 6.2 (*loc. cit.*, 3e). On va terminer ce numéro pour y donner la réponse affirmative.

PROPOSITION 6.6. — *Soient $(n_1, \dots, n_r)$ une suite d'entiers ≥ 2 et d un entier ≥ 2. Si $(2d-1; n_1, \dots n_r)$ est distinct de $(2d-1; 2, 2)$, $(2d-1; 2, 2, 2)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$, $(3; 2, 3)$, $(5; 3)$, il existe une infinité d'intersections complètes X lisses de dimension $2d-1$ et de multidegré $(n_1, \dots, n_r)$, définies sur $\mathbf{Q}$, telles que l'application d'Abel–Jacobi $\psi^d : A^d(X_{\mathbf{C}}) \to J^d(X_{\mathbf{C}})$ soit nulle.*

LEMME 6.7 (TERASOMA [35, Théorème 2]). — *Soient U un ouvert de la droite affine $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$ et $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de U. Pour toute représentation ℓ-adique $\varphi : \pi_1(U, \bar{\eta}) \to GL(m, \mathbf{Q}_\ell)$, il existe une infinité de points $\mathbf{Q}$-rationnels t de U tels que l'image du composé $Gal(\bar{t}/t) \to \pi_1(U, \bar{t}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U, \bar{\eta}) \to GL(m, \mathbf{Q}_\ell)$ coïncide avec celle de φ.*

Prouvons 6.6. Soit Y une intersection complète lisse de dimension $2d$ et de multidegré $(n_1, \dots, n_{r-1})$ définie sur $\mathbf{Q}$. Comme les pinceaux de Lefschetz forment un ouvert non vide dans la grassmannienne, il existe un pinceau de Lefschetz $H = \{Y_t\}_{t \in D}$ de sections de Y par des hypersurfaces de degré n_r, défini sur $\mathbf{Q}$. Soient $S \subset D = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des valeurs exceptionnelles du pinceau, η le point générique de $U = \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} - S$ et $\bar{\eta}$ le point géométrique défini par la clôture algébrique de $k(\eta)$. Par 6.7, il existe une infinité de points $\mathbf{Q}$-rationnels t de U tels que l'image du composé $\mathrm{Gal}(\bar{t}/t) \to \pi_1(U, \bar{t}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U, \bar{\eta}) \to GL(H^{2d-1}(Y_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell(d)))$ coïncide avec celle de la monodromie $\pi_1(U, \bar{\eta}) \to GL(H^{2d-1}(Y_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell(d)))$. Comme tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ agit sur $H^{2d-1}(Y_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}_\ell(d))$ de façon irréductible (KATZ, [18, Corollaire 6.7]), tout sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\bar{t}/t)$ agit sur $H^{2d-1}(Y_{\bar{t}}, \mathbf{Q}_\ell(d))$ de façon irréductible. Il suffit donc de faire le même argument que dans la démonstration du THÉORÈME 6.2.

7. Application II. Variété abélienne de Murre

7.1. Soit X un k-schéma lisse projectif irréductible. Soient A une variété abélienne sur k et $\varphi : A^d(X) \to A(k)$ un homomorphisme de groupes. φ est dit *régulier* si, pour tout k-schéma Y lisse projectif, toute classe de cycle $z \in \mathrm{CH}^d(Y \times X)$ et tout point fermé y_0 de Y, l'application définie par $y \mapsto \varphi\big(z \cdot ((y) - (y_0))\big)$ provient d'un morphisme de k-schémas.

7.2. Soient A une variété abélienne et $\varphi : A^d(X) \to A(k)$ un homomorphisme régulier. Le couple (A, φ) est dit *universel* pour $A^d(X)$ si tout homomorphisme régulier $\psi : A^d(X) \to B(k)$ se factorise, et de façon unique par φ :

(7.2.1)
$$
\begin{tikzcd}
A^d(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & A(k) \\
 & B(k)
\end{tikzcd}
$$

On sait que :

(a) la variété de Picard de X est universelle pour $A^1(X)$;

(b) la variété d'Albanese de X est universelle pour $A^N(X)$, $N = \dim X$;

(c) il existe une variété abélienne universelle pour $A^2(X)$ (MURRE [25, Théorème 1]), qu'on appellera la variété de Murre de X.

LEMME 7.3. — *Soient X un k-schéma lisse projectif irréductible et $\varphi : A^d(X) \to A(k)$ un homomorphisme régulier surjectif. Soient B une variété abélienne, $z \in \mathrm{CH}^d(B \times X)$ et $\xi : B(k) \to A(k)$ l'homomorphisme défini par $\xi(b) = z \cdot \big((b) - (0)\big)$. Si $T_\ell\xi \otimes 1 : T_\ell B \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est surjectif, $\varphi \circ \xi : B \to A$ “est” un homomorphisme surjectif de variétés abéliennes.*

Comme φ est régulier, $\varphi \circ \xi : B \to A$ un homomorphisme de variétés abéliennes. Par le théorème de réductibilité complète de Poincaré, il existe une variété abélienne A' et un homomorphisme $i : A'(k) \to A^d(X)$ tels que $\varphi \circ i : A' \to A$ soit une isogénie de variétés abéliennes (*cf.* SAITO, [30, Proposition 1.2]). $T_\ell(\varphi \circ i) \otimes 1 : T_\ell A' \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est donc bijectif, et par suite $T_\ell\varphi \otimes 1 : T_\ell A^d(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est surjectif. Par hypothèse, $T_\ell(\varphi \circ \xi) \otimes 1 : T_\ell B \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est aussi surjectif, d'où le résultat.

THÉORÈME 7.4. — *Supposons $p > 0$. Soient X un k-schéma lisse projectif irréductible, A la variété de Murre de X et M le module de Dieudonné du groupe p-divisible associé à A. Alors les pentes de M sont contenues dans celles de $H^3(X/W)_K(1)^{[0,1]}$.*

D'après 3.1, il existe une famille finie $\{(C_\alpha, z_\alpha)\}$ de couples formés d'une courbe C_α lisse projective sur k et $z_\alpha \in \mathrm{CH}^2(C_\alpha \times X)$ telle que les images des correspondances $[z_\alpha] : H^1(C_\alpha, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$ engendrent l'image de l'application de Bloch $\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$. Soient Y le produit des C_α et z le produit des z_α dans $\mathrm{CH}^*(Y \times X)$. On obtient donc un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} T_\ell \operatorname{Pic}^0(Y) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[r, "{[z]}"] \arrow[d, "\lambda^1 \wr"'] & T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[d, "\lambda^2"'] \\ H^1(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) \arrow[r, "{[z]}"] & H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2)). \end{tikzcd} \tag{7.4.1}$$

De plus, soient $B^\vee$ la variété abélienne duale de $B = \operatorname{Pic}^0_{Y/k}$ et $\tilde{z}$ l'image directe de z dans $\mathrm{CH}^*(B^\vee \times X)$. (7.4.1) donne un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} T_\ell \operatorname{Pic}^0(B^\vee) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[r, "{[\tilde{z}]}"] \arrow[d, "\lambda^1 \wr"'] & T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \arrow[d, "\lambda^2"'] \\ H^1(B^\vee, \mathbf{Q}_\ell(1)) \arrow[r, "{[\tilde{z}]}"] & H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2)). \end{tikzcd} \tag{7.4.2}$$

Par définition, l'image de $[\tilde{z}] : H^1(B^\vee, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$ coïncide avec celle de $\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$. Comme λ^2 est injective (Colliot–Thélène, Sansuc, Soulé [9, 1. Corollaire 4]), l'application $[\tilde{z}] : T_\ell B \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell = T_\ell \operatorname{Pic}^0(B^\vee) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$ est surjective. D'après 7.3, $\varphi \circ [\tilde{z}] : B \to A$ est un homomorphisme surjectif de variétés abéliennes. Par le théorème de réductibilité complète de Poincaré, il existe une sous-variété abélienne A' de B telle que le composé $A' \to B \to A$ soit une isogénie. Considérons le diagramme commutatif :

(7.4.3)

$$
\begin{array}{ccccc}
T_\ell A' \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \longrightarrow & T_\ell B \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{\sim} \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & \\
H^{2m-1}(A', \mathbf{Q}_\ell(m)) & \longrightarrow & H^{2n-1}(B, \mathbf{Q}_\ell(n)) & \xrightarrow{\sim}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
T_\ell \operatorname{Pic}^0(B^\vee) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{[\tilde z]} & T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell & \xrightarrow{T_\ell\varphi\otimes 1} & T_\ell A \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \\
\wr\lambda^1 \downarrow & & \lambda^2 \downarrow & & \\
H^1(B^\vee, \mathbf{Q}_\ell(1)) & \xrightarrow{[\tilde z]} & H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2)), & &
\end{array}
$$

où $n = \dim B$ et $m = \dim A' = \dim A$. Comme le composé $A' \to B \to A$ est une isogènie, le composé des flèches horizontales en haut est bijectif. Alors le composé

$$T_\ell A' \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to T_\ell B \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} T_\ell \operatorname{Pic}^0(B^\vee) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \xrightarrow{[\tilde z]} T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell$$

est injectif. Or $\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2))$ est injectif. Par suite, le composé des flèches horizontales en bas est injectif et son image est contenue dans $N = \operatorname{Im}(\lambda^2 : T_\ell A^2(X) \otimes_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Q}_\ell \to H^3(X, \mathbf{Q}_\ell(2)))$.

(1) *Cas où k est la clôture algébrique d'un corps fini.* — Il existe un sous-corps fini $\mathbf{F}_q$ de k tel que X, B, A' et $\tilde z$ se descendent sur $\mathbf{F}_q$. Soit F le Frobenius géométrique par rapport à $\mathbf{F}_q$. On fixe un isomorphisme $\overline{\mathbf{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{Q}}_p$ et une valuation v sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$, normalisée par $v(q) = 1$. Comme les flèches horizontales en bas dans (7.4.3) commutent à F, les valeurs propres β_i de F sur $H^{2m-1}(A', \mathbf{Q}_\ell(m))$ sont des valeurs propres de F sur N. Or les pentes de $H^3(X/W)_K$ sont données par $v(\gamma_j)$ où les γ_j sont les valeurs propres de F sur $H^3(X, \mathbf{Q}_\ell)$. D'autre part, les pentes de M sont données par $-v(\beta_i)$, donc par $v(\beta_i) + 1$. On en déduit la conclusion.

(2) *Cas général.* — On se ramène au cas (1) par l'argument de spécialisation (*cf.* 3.4).

COROLLAIRE 7.5. — *Sous les hypothèses de* 7.4, *on a* $2 \dim A \leq \dim_K H^3(X/W)_K^{[1,2]}$.

COROLLAIRE 7.6. — *Si X est ordinaire, A est une variété abélienne ordinaire.*

En effet, si X est ordinaire, $H^*(X/W)_K$ n'a que des pentes entières (ILLUSIE–RAYNAUD [17, IV. Théorème 4.13]).

COROLLAIRE 7.7. — *Si X est une variété abélienne supersingulière, A est aussi supersingulière.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEAUVILLE (A.). — Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **10**, 1977, p. 304–392.
[2] BLOCH (S.). — Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, *Math. Comp.*, t. **39**, 1979, p. 107–127.
[3] BLOCH (S.). — *Lectures on algebraic cycles.* — Duke Univ. Math. Ser., 1980.
[4] BLOCH (S.) and KATO (K.). — *P*-adic étale cohomology, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **63**, 1986, p. 107–152.
[5] BLOCH (S.) and MURRE (J.-P.). — On the Chow group of certain types of Fano threefolds, *Math. Comp.*, t. **39**, 1979, p. 47–105.
[6] BLOCH (S.) and OGUS (A.). — Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **7**, 1974, p. 181–202.
[7] CLEMENS (C.H.) and GRIFFITHS (P.A.). — The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. of Math.*, t. **95**, 1972, p. 281–356.
[8] CREW (R.). — Some properties of convergent *F*-isocrystals, *Duke Math. J.*, t. **53**, 1986, p. 749–757.
[9] COLLIOT–THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.) et SOULÉ (C.). — Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, *Duke Math. J.*, t. **50**, 1983, p. 763–801.
[10] DELIGNE (P.). — Le théorème de Noether [SGA 7, exp. XIX, 1973], p. 328–340. (*Lecture Notes in Math.*, **340**).
[11] DELIGNE (P.). — Théorie de Hodge III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **44**, 1974, p. 4–77.
[12] DELIGNE (P.). — La conjecture de Weil II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **52**, 1980, p. 137–252.
[13] EKEDAHL (T.). — Sur le groupe fondamental d'une variété unirationnelle, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **297**, 1983, p. 627–629.
[14] FULTON (W.). — *Intersection theory.* — Springer, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.
[15] GRIFFITHS (P.A.). — On the period of certain rational integrals, *Ann. of Math.*, t. **90**, 1969, p. 460–540.
[16] GROTHENDIECK (A.). — *Le groupe de Brauer III.* — Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland, Amsterdam, 1969.
[17] ILLUSIE (L.) et RAYNAUD (M.). — Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, t. **57**, 1983, p. 73–212.
[18] KATZ (N.). — Etude cohomologique des pinceaux de Lefschetz [SGA 7, exp. XVIII, 1973], p. 254–327. — (*Lecture Notes in Math.*, **340**).
[19] KATZ (N.). — Le théorème de Griffiths [SGA 7, exp. XX, 1973], p. 341–362. (*Lecture Notes in Math.*, **340**).
[20] KATZ (N.) and MESSING (W.). — Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.*, t. **23**, 1974, p. 73–77.
[21] LECOMTE (F.). — Rigidité des groupes de Chow, *Duke Math. J.*, t. **53**, 1986, p. 405–426.
[22] MAZUR (B.). — Frobenius and the Hodge filtration, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **78**, 1972, p. 653–667.

[23] MERCURJEV (A.S) and SUSLIN (A.A.). — K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norme residue homomorphisms, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, t. **46**, 1982, p. 1011–1046.

[24] MURRE (J.-P.). — Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold, *Math. Comp*, t. **25**, 1972, p. 161–206.

[25] MURRE (J.-P.). — Un résultat en théorie des cycles algébriques de codimension deux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **296**, 1983, p. 981–984.

[26] MURRE (J.-P.). — Abel–Jacobi equivalence versus incidence equivalence for algebraic cycles of codimension two, *Topology*, t. **24**, 1985, p. 361–367.

[27] QUILLEN (D.). — Higher algebraic K-theory I, *Lecture Notes in Math.*, t. **341**, 1973, p. 85–147.

[28] RAPOPORT (M.). — Complément à l'article de P. Deligne "La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$", *Invent. Math.*, t. **15**, 1972, p. 227–236.

[29] ROJTMAN (A.A.). — The torsion of the group 0-cycles modulo rational equivalence, *Ann. of Math.*, t. **111**, 1980, p. 553–569.

[30] SAITO (H.). — Abelian varieties attached to cycles of intermediate dimension, *Nagoya Math. J.*, t. **75**, 1979, p. 95–119.

[31] SHIODA (T.). — Algebraic cycles on certain $K3$ surfaces in characteristic p, *Proc. of the Internat. Conf. on Manifolds and Related Topics in Topology* [Tokyo. 1973], p. 357–364. — BAILY-JR (W.), SHIODA (T.).

[32] SHIODA (T.). — A note on a theorem of Griffiths on the Abel–Jacobi map, *Invent. Math.*, t. **82**, 1985, p. 461-465.

[33] SHIODA (T.). — Algebraic cycles in hypersurfaces in $\mathbf{P}^N$, *Proc. of Sendai Symposium in Algebraic Geometry, Kinokuniya-North Holland (Advanced Studies in Pure Math.)*, t. **10**, 1987, p. 717–732.

[34] SHIODA (T.) and KATSURA (T.). — On Fermat varieties, *Tôhoku Math. J.*, t. **31**, 1979, p. 97–115.

[35] TERASOMA (T.). — Complete intersections with middle Picard number 1 defined over $\mathbf{Q}$, *Math. Z.*, t. **189**, 1985, p. 289–296.