BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ MARTINEZ

Estimations de l'effet tunnel pour le double puits. II : états hautement excités

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n^o 2 (1988), p. 199-229

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_2_199_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 199–229.

ESTIMATIONS DE L'EFFET TUNNEL POUR LE DOUBLE PUITS II, ÉTATS HAUTEMENT EXCITÉS

PAR

ANDRÉ MARTINEZ (*)

RÉSUMÉ. — Soit $P = -h^2\Delta + V$ l'opérateur de Schrödinger semi-classique sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. On suppose que le potentiel V est symétrique par rapport à un hyperplan de $\mathbf{R}^n$, et on s'intéresse au spectre discret de P près d'un niveau d'énergie E_0 excité (i.e. $E_0 > \min V$) dans le cas où V admet exactement deux puits (symétrique l'un de l'autre). On obtient alors une minoration de l'écart entre les deux valeurs propres de P proches de E_0 (lorsque $h \to 0$) de l'ordre de $e^{-S_0/h}$ où $S_0 > 0$ désigne la distance d'Agmon entre les puits.

ABSTRACT. — Let $P = -h^2\Delta + V$ be the semiclassical Schrödinger operator on $L^2(\mathbf{R}^n)$. We assume that the potential V is symmetric with respect to a hyperplane of $\mathbf{R}^n$, and we are interested in the discrete spectrum of P near an excited energy level E_0 (i.e. $E_0 > \min V$), in the case where V admits exactly two wells (symmetric one of the other). We then get a lower bound for the splitting between the two eigenvalues of P close to E_0 (as $h \to 0$), which is about $e^{-S_0/h}$ where $S_0 > 0$ denotes the Agmon distance between the wells.

0. Introduction

On continue l'étude entamée dans [9] concernant les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V$ lorsque le potentiel V est symétrique par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, est non-résonnant (au sens que $\underline{\lim}_{|x|\to\infty} V(x) > 0$), et possède exactement deux puits : $\{V \le 0\} = U_1 \cup U_2$ (U_1 et U_2 connexes et symétriques l'un de l'autre).

Utilisant la théorie générale de B. HELFFER et J. SJÖSTRAND [4, 5], on associe à chaque puits un problème de Dirichlet et une suite de valeurs propres $(E_k(h))_{k\ge 0}$ associée à ce problème, avec $E_k(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, $h \in \mathcal{J}$ (où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble de $]0,1]$ admettant 0 comme

(*) Texte reçu le 19 septembre 1986, révisé le 19 décembre 1986.

A. MARTINEZ, Université Paris-Sud, Mathématiques, Bâtiment 425, F-91405 Orsay-Cedex, France.

point d'accumulation). Lorsque $E_k(h)$ est valeur propre simple, on sait qu'elle donne alors naissance à deux valeurs propres de P, E_k^+ et E_k^-, exponentiellement proches de $E_k(h)$. Le problème est alors d'avoir des estimations sur la différence ("splitting") : $E_k^+ - E_k^-$. La majoration est en général facile à obtenir à partir des résultats de [4] et [5], et c'est la minoration qui va être l'objet principal de ce papier. Signalons aussi que B. SIMON avait déjà obtenu une majoration du splitting pour les états hautement excités dans [13].

Dans [9], on examinait le cas où U_1 et U_2 étaient réduits à des points et étaient non-dégénérés au sens que $V''(U_j)$ était définie positive (V étant supposée $\mathcal{C}^\infty$). On obtenait alors une minoration du splitting de l'ordre de $h^{1/2}e^{-S_0/h}$ $(h \to 0)$, où S_0 désigne la distance d'Agmon (associée à la métrique $\max(V,0)\,dx^2$) entre les deux puits.

On s'intéresse maintenant au cas où les intérieurs de U_1 et U_2 sont non vides et où leur bord est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ (après addition d'une constante à V; cela correspond bien à l'étude de hautes valeurs propres de P). Sous une hypothèse d'analyticité sur V, on parvient alors à relier le splitting avec la décroissance (lorsque $h \to 0$) de la fonction propre de Dirichlet au bord du puits. En particulier, si celle-ci n'est pas uniformément exponentiellement petite (ce qui est toujours le cas en dimension 1), on obtient que le splitting est non-exponentiellement petit devant $e^{-S_0/h}$. (Inversement, si la fonction propre est exponentiellement petite au bord du puits, alors le splitting l'est aussi devant $e^{-S_0/h}$.)

Malgré l'absence de résonances, il est intéressant de constater que ce sont précisément certaines techniques introduites par HELFFER et SJÖSTRAND dans [6] pour l'étude des résonances qui sont ici utilisées. D'autre part, ce travail doit beaucoup à la théorie des singularités analytiques microlocales développée par J. SJÖSTRAND dans [15].

On commence au paragraphe 1 par introduire les notations et énoncer nos résultats, après quoi le paragraphe 2 est consacré à la réduction du problème à une estimation de la fonction propre u en dehors du puits. Au paragraphe 3 on construit des fonctions propres asymptotiques qui permettront, par la formule de Green, de se ramener au paragraphe 4 à des estimations sur u à l'intérieur du puits qui lui est associé. Pour traiter ce dernier problème, on introduit au paragraphe 5 une notion d'ensemble de fréquences (directement inspirée de celle de front d'onde analytique donnée par SJÖSTRAND dans [15]) qui est l'analogue dans notre situation de l'ensemble de fréquences de GUILLEMIN-STERNBERG [1]. On remarque ensuite qu'aux fonctions propres asymptotiques que l'on a construites sont associées des transformations de Fourier-Bros-Iagolnitzer, donnant immédiatement des renseignements sur l'ensemble de fréquences de u à l'intérieur du puits. Après propagation jusqu'au bord de ces renseignements, on obtient finalement le résultat cherché au paragraphe 6. Le paragraphe 7 contient la démonstration du résultat réciproque, ainsi qu'un exemple où celui-ci s'applique.

Pour ce qui concerne les motivations physiques, on pourra rapprocher nos résultats de ceux de M. WILKINSON [17], où l'exemple du paragraphe 7 est aussi discuté.

Remerciements. — Ils vont à B. HELFFER et J. SJÖSTRAND pour les nombreuses discussions qu'ils nous ont accordées sur le sujet.

1. Notations et résultats

Dans $\mathbb{R}^n$ on considère l'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V$, où V est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ réelle telle que :

(H1) : $\forall x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \quad V(x', x_n) = V(x', -x_n)$;

(H2) : $\{V \leq 0\} = U_1 \cup U_2$, U_1 et U_2 compacts connexes disjoints, symétriques l'un de l'autre par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$ et d'intérieurs non vide;

(H3) : V est analytique dans un voisinage de $\mathbb{R}^n \setminus (U_1 \cup U_2)$ et $dV|_{\partial U_j} \neq 0$ $(j = 1, 2)$;

(H4) : $\underline{\lim}_{|x| \to \infty} V > 0$.

Sous ces hypothèses, P admet une extension de Friedrichs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ que l'on notera aussi P.

Pour $j = 1, 2$ soit M_j un compact assez grand de $\mathbb{R}^n$ à bord $\mathcal{C}^2$ tel que :

$$U_j \subset \overset{\circ}{M}_j, \qquad M_j \cap U_k = \emptyset \quad \text{pour} \quad j \neq k.$$

Soit aussi P_{M_j} la réalisation auto-adjointe de P dans $L^2(M_j)$ avec condition de Dirichlet au bord. En prenant M_1 et M_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$, on a alors : $\mathrm{Sp}(P_{M_1}) = \mathrm{Sp}(P_{M_2})$. Pour $h \in \mathcal{J}$ ($\mathcal{J} \subset]0, 1]$, $0 \in \overline{\mathcal{J}}$), on considère maintenant $E = E(h)$ une valeur propre simple de P_{M_1}, avec $E(h) \to 0$ ($h \to 0$, $h \in \mathcal{J}$), et on note u la fonction propre normalisée associée à E.

On suppose en outre :

(H5) : il existe une fonction $a(h) > 0$, $a(h) \to 0$, telle que, pour $h \in \mathcal{J}$:

(i) $|\mathrm{Log}\, a(h)| = o(h^{-1}), \quad j \to 0$;

(ii) $\mathrm{Sp}(P_{M_j}) \cap [E(h) - 2a(h), E(h) + 2a(h)] = \{E(h)\}$.

On voit comme dans HELFFER-SJÖSTRAND [4] (démonstration du théorème 2.4) que P n'a alors pas de spectre dans $[E(h) - 2a(h), E(h) - a(h)] \cup [E(h) + a(h), E(h) + 2a(h)]$, ce qui permet d'appliquer la théorie générale de [4] à l'intervalle $I(h) = [E(h) - a(h), E(h) + a(h)]$. En particulier, on sait alors que $\mathrm{Sp}(P) \cap I(h) = \{E^+, E^-\}$ avec $0 \leq E^+ - E^- \leq C_\epsilon e^{-(S_0-\epsilon)/h}$ pour tout $\epsilon > 0$, où $S_0 = d_0(U_1, U_2)$ est la distance d'Agmon associée à la métrique $\max(V,0)\, dx^2$ entre U_1 et U_2.

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Sous les hypothèses* (H1)–(H5), *on désigne par G l'ensemble des géodésiques minimales (relativement à d_0) entre U_1 et U_2 et l'on note* (1.1) *l'hypothèse suivante :*

(1.1) $\forall \epsilon > 0$, $\forall W$ *voisinage de* $\bigcup_{\gamma \in G} (\gamma \cap \partial U_1)$, $\exists\, C_{\epsilon,W} > 0$ *tel que* $\|u\|_{L^2(W)} \geq \dfrac{1}{C_{\epsilon,W}} e^{-\epsilon/h}$.

Alors, si (1.1) *est vérifiée, on a la minoration :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, C_\epsilon > 0 \text{ tel que } E^+ - E^- \geq \frac{1}{C_\epsilon} e^{-(S_0+\epsilon)/h} \text{ pour } h \text{ assez petit.}$$

Remarque 1.2. — Comme on le verra plus tard, l'hypothèse (1.1) est automatiquement vérifiée en dimension 1 lorsque V est analytique aussi dans $\mathring{U}_1$. En dimension supérieure, une condition suffisante pour que (1.1) soit vérifiée est que le flot de H_p (où $p = \xi^2 + V$) vérifie : quel que soit W voisinage dans $T^*\mathbb{R}^n$ de $(\bigcup_{\gamma \in G}(\gamma \cap \partial U_1)) \times \{0\}$, $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \exp tH_p(W)$ est voisinage de $\{\xi^2 + V = 0\} \cap \pi^{-1}(U_1)$, où π est la projection naturelle : $T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (Voir à la fin du paragraphe 6.)

Remarque 1.3. — Bien entendu, l'analyticité de V à l'infini ne joue aucn rôle, et il suffit en fait de supposer V analytique près de $\bigcup_{\gamma \in G} \gamma$.

On a aussi la réciproque suivante du théorème 1.1 :

THÉORÈME 1.4. — *Si les hypothèses* (H1) — (H5) *sont vérifiées et si de plus* $\exists\, \epsilon > 0$ *et* $\exists\, W$ *voisinage de* $(\bigcup_{\gamma \in G}(\gamma \cap \partial U_1)$ *tels que* $\|u\|_{L^2(W)} = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$, *alors* $\exists\, \epsilon_0 > 0$ *et* $\exists\, C_0 > 0$ *tel que :*

$$E^+ - E^- \leq C_0 e^{-(S_0+\epsilon_0)/h}$$

pour h assez petit.

Pour la suite, on introduit $U_1(h)$ et $U_2(h)$ définis par :

(i) $\{V - E(h) \leq 0\} = U_1(h) \cup U_2(h)$;

(ii) $U_1(h) \to U_1$ et $U_2(h) \to U_2$ lorsque $h \to 0$.

Pour h assez petit, $U_1(h)$ et $U_2(h)$ seront donc encore compacts, connexes, disjoints, symétriques l'un de l'autre, d'intérieurs non vides, et on aura $dV|_{\partial U_j(h)} \neq 0$, V analytique près de $\mathbb{R}^n \setminus [U_1(h) \cup U_2(h)]$. On introduit aussi $d = d_h$ la distance d'Agmon modifiée, associée à la métrique $\max(V - E(h), 0)\, dx^2$.

Si $\widetilde{U}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_0(x, U_2) \leq \alpha_0\}$ où $\alpha_0 > 0$ est fixé assez petit pour que $\widetilde{U}_2 \cap \{x_n = 0\} = \emptyset$, alors, pour toute d_0-géodésique minimale γ_0 entre U_1 et U_2, toute d-géodésique minimale γ_h entre $\gamma_0 \cap \partial\widetilde{U}_2$ et $U_1(h)$ converge (en tant qu'ensemble) vers γ_0 lorsque h tend vers 0 : en effet, si $\gamma_h \cap \partial U_1 \to z_1 \neq \gamma_0 \cap \partial U_1$ (lorsque $h \to 0$), on aurait une courbe de longueur $d_0(U_1, U_2)$ entre U_1 et U_2 qui ferait un "angle" en $\gamma_0 \cap \partial\widetilde{U}_2$, ce qui est absurde, et l'on conclut par un simple argument de compacité.

Si γ est une d-géodésique minimale entre $\bigcup_{\gamma_0 \in G} \gamma_0 \cap \partial\widetilde{U}_2$ et $U_1(h)$, on notera $z_1(\gamma)$ le point d'intersection de γ avec $\partial U_1(h)$, et $z_0(\gamma)$ le point d'intersection de γ avec $\{x_n = 0\}$.

Si $\widetilde{G}$ est l'ensemble de ces géodésiques, l'hypothèse (1.1) implique alors :

$\widetilde{(1.1)}$ $\forall \epsilon > 0$, $\forall W$ voisinage de $\{z_1(\gamma) : \gamma \in \widetilde{G}\}$, $\exists\, C_{\epsilon,W} > 0$ tel que $\|u\|_{L^2(W)} \geq \dfrac{1}{C_{\epsilon,W}} e^{-\epsilon/h}$ pour h assez petit.

et il nous suffit aussi de démontrer la minoration avec S_0 remplacé par $\widetilde{S}_0 \stackrel{\text{def}}{=} d(U_1(h), U_2(h))$.

2. Réduction à une estimation sur u en dehors du puits

Soit $\mathcal{F}$ l'espace propre de P associé à $\mathrm{Sp}(P) \cap I(h)$. En appliquant les résultats de [4] à notre situation, on voit que dans une base orthonormée convenable, $P|_{\mathcal{F}}$ a pour matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} E & W \\ W & E \end{smallmatrix}\right) + R$, où R est exponentiellement petit devant $e^{-S_0/h}$ (donc aussi devant $e^{-\widetilde{S}_0/h}$ pour h assez petit), et où (en supposant par exemple $U_1 \subset \{x_n > 0\}$) :

(i) $W = -2h^2 \int_\Sigma u(x', 0) \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0)\, dx'$;

(ii) $\Sigma \subset \{x_n = 0\}$ est un voisinage de $\bigcup_{\gamma \in \widetilde{G}} [\gamma \cap \{x_n = 0\}]$.

On a donc, modulo des termes exponentiellement petits devant $e^{-\widetilde{S}_0/h}$:

$$E^+ - E^- \equiv -2W \equiv 4h^2 \int_\Sigma u(x', 0) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0)\, dx'.$$

Le but de cette section est de se ramener à une estimation sur $\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}$. Pour cela, on va utiliser les espaces H^{loc}_φ de Sjöstrand (*cf.* [15]), avec grand paramètre $\lambda = 1/h$. Notons $\psi_E(x) = d(x, U_1(h))$.

LEMME 2.1. — *Pour tout $\gamma \in \widetilde{G}$, il existe un voisinage W du segment fermé γ entre $z_0(\gamma)$ et $z_1(\gamma)$ tel que ψ_E soit analytique dans $W \setminus U_1$.*

Démonstration. — Supposons d'abord x voisin de $z_1(\gamma)$. Dans des coordonnées euclidiennes convenables centrées en $z_1 = z_1(\gamma)$, $V(x)$ peut s'écrire :

$$V(x) = -C_0 x_n + W(x) + E, \qquad C_0 > 0, \quad W(x) = \mathcal{O}(|x|^2).$$

Si $q = \xi^2 - V$, la lagrangienne Λ_0 engendrée par les bicaractéristiques de q issues de $\partial U_1 \times \{0\}$ se représente alors près de $(z_1, 0)$ par :

$$\Lambda_0 : \begin{cases} -x_n = \dfrac{\partial g}{\partial \xi_n}(x', \xi_n) \,; \\ \quad \xi' = \dfrac{\partial g}{\partial x'}(x', \xi_n) \,; \end{cases}$$

où g est analytique près de 0, $g(0) = 0$, $dg(0) = 0$. De plus, si $\widetilde{W}$ est un petit voisinage de z_1, la différentielle de la projection $\pi : \Lambda \ni (x, \xi) \mapsto x$ est bijective au-dessus de $\widetilde{W} \backslash U_1$ et on voit facilement que pour $x \in \widetilde{W} \backslash U_1$, on a

$$d(x, \partial U_1) = -\text{v.c.}_{\xi_n} \big(x_n \xi_n + g(x', \xi_n)\big),$$

où v.c.$_{\xi_n}$ désigne la valeur critique par rapport à ξ_n et avec un choix convenable du point critique. (Il suffit, en effet, d'utiliser le fait qu'au-dessus de $\widetilde{W} \backslash U_1$, Λ_0 se représente par $\xi = \nabla f(x)$, où $f(x) = \text{v.c.}_{\xi_n}(x_n \xi_n + g(x', \xi_n))$ avec un bon choix du point critique et que $(\nabla f(x))^2 = V(x) - E$).

En utilisant ensuite le fait que g vérifie l'équation

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right)^2 + \xi_n^2 = V\left(x', -\frac{\partial g}{\partial \xi_n}\right) - E,$$

on montre comme dans [6, section 10] que, dans $\widetilde{W} \setminus U_1$,

$$d(x, \partial U_1) = G\big(x, \sqrt{V(x) - E}\,\big),$$

où G est analytique et $G(x, s) \sim s^3$. (En fait, on a ici $\partial^2 g / \partial \xi_n^2 = 0 \Leftrightarrow \xi_n = 0$, et $(\partial g / \partial x')(x', 0) = 0$.)

En considérant l'hypersurface analytique $H_\epsilon = \{d(x, \partial U_1) = \epsilon\}$ ($\epsilon > 0$ assez petit), il suffit pour conclure d'étudier l'analyticité de $x \to d(x, H_\epsilon)$ dans $\{d(x, \partial U_1) > \epsilon\}$, ce qui se fait comme dans [4, théorème 6.4]. $\square$

La démonstration précédente prouve en particulier que ψ_E est analytique en (E, x) près de $(0, z_0)$. Dans toute la suite, E sera considéré comme un paramètre indépendant de h, variant dans $[-E_0, E_0]$ ($E_0 > 0$ assez petit), et duquel dépendent toutes les quantités. En particulier, la distance d pourra être considérée comme dépendant de E mais pas de h. Il est alors facile de vérifier que toutes nos estimations sont uniformes en $E \in [-E_0, E_0]$, et peuvent ainsi être appliquées avec $E = E(h)$. Aussi, pour simplifier les notations, on omettra désormais de mentionner le paramètre E.

On note encore ψ et u les prolongements holomorphes de $\psi = \psi_E$ et u près de $\{z_0(\gamma)/\gamma \in \widetilde{G}\}$.

LEMME 2.2. — *$\forall \gamma \in \widetilde{G}$, $\forall \epsilon_1 > 0$, $u \in H_{-\Re e\, \psi + \epsilon_1 | \Im m\, x|, z_0(\gamma)}$.*

Démonstration. — Il suffit d'adapter la démonstration de M. ROULEUX [11, II théorème 1.1] à l'opérateur $(V - E)^{-1}\Delta + (1/h)^2 = Q(x, D_x)$. On écrit :

$$u(x,h)e^{\psi(x)/h} = (2\pi)^{-n} \iint e^{i|\xi|\varphi(x,y,\xi/|\xi|)} a\,(x-y, \xi/|\xi|)\, u(y) e^{\psi(y)/h} \chi(y)\, dy\, d\xi$$

où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de $z_0(\gamma)$, $\varphi(x,y,\tau) = (x-y)\tau + \frac{1}{2}i(x-y)^2$, et $a(x,\tau) = 1 + \frac{1}{2}ix\tau$.

On trouve ensuite un symbole analytique classique $b(x, y, \tau, 1/h|\xi|, |\xi|)$ (avec $|\xi|$ comme grand paramètre, et $\tau \in S^{n-1}$, $(1/h|\xi|) \in]0, 1/\epsilon_1]$ comme paramètres supplémentaires), tel que :

$$e^{-i|\xi|\varphi(x,y,\tau) - \psi(y)/h} Q(y, D_y) \big(e^{i|\xi|\varphi(x,y,\tau) + \psi(y)/h} b\big) = a(x-y,\tau) + r\Big(x, y, \tau, \frac{1}{h|\xi|}, |\xi|\Big)$$

où $|r| \leq C|\xi|^{-2} e^{-|\xi|/C}$ (avec $C > 0$), uniformément pour $\tau \in S^{n-1}$, $|\xi| \geq \epsilon_1/h$, x et y voisins de $z_0(\gamma)$.

On obtient alors :

$$u(x,h)e^{\psi(x)/h} = (2\pi)^{-n} \iint_{|\xi| \leq \epsilon_1/h} e^{i|\xi|\varphi} a\left(x - y, \frac{\xi}{|\xi|}\right) u(y) e^{\psi(y)/h} \chi(y)\, dy\, d\xi + \mathcal{O}\left(e^{-\epsilon_1/\,\mathrm{Ch}} \|ue^{\psi/h}\|_{H^1}\right).$$

Le premier terme se majore facilement par $\mathrm{Ch}^{-n}\, e^{2\epsilon_1 |\Im m\, x|/h} \|ue^{\psi/h}\|_{L^2}$ pour $|\Im m\, x|$ assez petit, et l'on conclut en utilisant un résultat de [4] d'après lequel $\|ue^{\psi/h}\|_{H^1} = \mathcal{O}_\epsilon(e^{\epsilon/h})$ pour tout $\epsilon > 0$. $\square$

Grâce au lemme 2.2., on peut maintenant appliquer le calcul pseudo-différentiel de [15, sections 4 et 5]. En vue des réalisations sur le réel, on prend ici ces opérateurs sous la forme :

$$
\begin{aligned}
(2.1) \qquad & A(x, hD_x, h)u(x,h) \\
&= h^{-3n/2} \iint_{\Gamma(x)} e^{i(x-y)\alpha_\xi/h-[(x-\alpha_x)^2+(y-\alpha_x)^2]/2h} a(x,y,\alpha,h) \\
&\qquad \times u(y,h)\,dy\,d\alpha
\end{aligned}
$$

où on a noté $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi)$, et où $\Gamma(x)$ est le contour :

$$
\Gamma(x) : \begin{cases} \alpha_\xi = -\dfrac{2}{i}\dfrac{\partial \Re\mathrm{e}\,\psi(x)}{\partial x} + 2i\epsilon_1 \dfrac{\overline{x-y}}{|x-y|}\ ; \\ |x-y| \le r, \quad y \in \mathbb{C}^n \ (r \text{ assez petit devant } \epsilon_1)\,; \\ |x-\alpha_x| \le r, \quad \alpha_x \in \mathbb{R}^n\,. \end{cases}
$$

Dans l'expression (2.1), a désigne un symbole analytique classique d'ordre 0 défini près de $(z_0, z_0, z_0, i(\partial\psi/\partial x)(z_0))$, où $z_0 = z_0(\gamma)$, $\gamma \in \widetilde{G}$.

On vérifie que ces opérateurs opèrent bien de $H^{\mathrm{loc}}_{-\Re\mathrm{e}\,\psi+\epsilon_1|\Im\mathrm{m}\,x|}$ dans lui-même, et on rappelle que l'on peut remplacer formellement a dans (2.1) par le symbole de A :

$$
\sigma_A(x,\xi,h) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-ix\xi/h} A\big(e^{i(\cdot)\xi/h}\big).
$$

D'autre part, le symbole d'un composé $B \circ A$ s'obtient par la formule habituelle :

$$
\sigma_{B\circ A}(x,\xi,h) = \sum_{|\alpha| \le 1/\,\mathrm{Ch}} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{h}{i}\right)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \sigma_B(x,\xi,h)\, \partial_x^\alpha \sigma_A(x,\xi,h)
$$

(avec $C > 0$ assez grande).

On montre alors facilement que l'on peut factoriser $P-E$ sous la forme :

$$
P - E = \big(hD_{x_n} + A(x, hD_{x'}, h)\big) \circ \big(hD_{x_n} - A(x, hD_{x'}, h)\big),
$$

où A a pour symbole principal $-i\sqrt{\xi'^2 + V - E}$.

Du fait que $(\partial\psi/\partial x)(z_0)$ est proche de $(0, -\sqrt{V(z_0) - E})$, on voit aussi que $A|_{x_n=0}$ et $hD_{x_n} + A$ sont elliptiques si on a pris ϵ_1 assez petit, et donc :

$$
(2.2) \quad hD_{x_n} u = A(x, hD_{x'}, h)u \quad \text{modulo} \quad \mathcal{O}\big(e^{-\Re\mathrm{e}\,\psi/h + \epsilon_1|\Im\mathrm{m}\,x|/h - \epsilon_2/h}\big)
$$

près de z_0, avec $\epsilon_2 > 0$.

On remarque ensuite que iA est formellement auto-adjoint dans $L^2(\Sigma)$, et de symbole principal strictement positif en $(z_0, 0) = (z_0, i(\partial\psi/\partial x')(z_0))$. D'autre part, si W désigne un voisinage dans $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ de $(z_0', 0) = (z_0', i(\partial\psi/\partial x')(z_0'))$, et $\chi(x', y', \alpha) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4(n-1)})$ est à support près de

$$\nabla\overline{W} \overset{\text{def}}{=} \left\{(x', y', \alpha) \mid \alpha \in \overline{W},\ x' = y' = \alpha_{x'}\right\},$$

et vaut 1 près de $\nabla\overline{W}$, on a comme dans [15, section 5] la réalisation de $A|_{x_n=0}$ dans W, définie par :

$$\text{(2.3)} \qquad \left(A|_{x_n=0}\right)^W v(x', h) = h^{-3(n-1)/2} \iint_{\substack{\alpha\in W \\ y'\in\mathbb{R}^{n-1}}} e^{i(x'-y')\alpha_{\xi'}/h - [(x'-\alpha_{x'})^2 + (y'-\alpha_{x'})^2]/2h} \times a(x', y', \alpha, h)\chi(x', y', \alpha)v(y', h)dy'd\alpha$$

Du fait que $u \in H^{\text{loc}}_{-\Re\text{e}\,\psi+\epsilon_1|\Im\text{m}\,x|}(\Sigma)$, il n'est pas difficile de voir que l'on a alors :

$$\left\|(Au)|_{x_n=0} - \left(A|_{x_n=0}\right)^W u|_{x_n=0}\right\|^2_{L^2(W)} = \mathcal{O}\left(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon)/h}\right)$$

avec $\epsilon > 0$. (Il suffit en effet de remplacer, par la formule de Stokes en y', le contour réel dans (2.2) par le contour :

$$y' \to y' - i\delta\widetilde{\chi}(x', y', \alpha_{x'})\alpha_{\xi'},$$

où $\delta > 0$ est assez petit et où $\widetilde{\chi}$ est à support dans $\{\chi(x', y', \alpha_{x'}, 0) = 1\}$ et vaut 1 près de $\{x' = y' = \alpha_{x'}, \alpha_{x'}$ voisin de $z_0'\}$. Loin de $\alpha_{\xi'} = 0$ ainsi que dans $\{\widetilde{\chi} \neq 1\}$, l'intégrande de (2.3) est alors exponentiellement petite devant $e^{-S_0/2h}$, et près de $\{\alpha_{\xi'} = 0\} \cap \{\widetilde{\chi} = 1\}$, on obtient un bon contour au sens de [15, section 3]).

Maintenant, on peut construire comme dans le calcul classique (*cf.* HÖRMANDER [7]) un O.P.D. elliptique $B(x', hD_{x'}, h)$ d'ordre 0, du même type que $A|_{x_n=0}$, tel que :

$$i\left(A|_{x_n=0}\right)^W = \left(B^W\right)^* B^W + \mathcal{O}\left(e^{-((\widetilde{S}_0/2)+\epsilon)/h}\right)$$

avec $\epsilon > 0$ (où le $\mathcal{O}$ doit être compris au sens des opérateurs bornés sur $L^2(\Sigma)$).

Ceci nous ramène finalement à :

$$E^+ - E^- \geq 4h\|B(x', hD_{x'}, h)u\|^2_{L^2(\Sigma)} + \mathcal{O}\big(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon)/h}\big)$$

où l'on a éventuellement réduit Σ autour de $\{z_0'(\gamma)/\gamma \in \widetilde{G}\}$ (avec la notation : $z_0(\gamma) = (z_0'(\gamma), 0)$).

LEMME 2.3. — *S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|Bu\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon)/h})$, alors il en est de même pour $\|u\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma})}$ où $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$ est aussi un voisinage dans $\{x_n = 0\}$ de $\{z_0'(\gamma)/\gamma \in \widetilde{G}\}$.*

(Ici, h varie dans $\mathcal{J}' \subset]0,1]$, $0 \in \overline{\mathcal{J}}'$, avec éventuellement $\mathcal{J}' \subsetneq \mathcal{J}$).

Démonstration. — On se place près d'un point $z_0(\gamma)$ avec $\gamma \in \widetilde{G}$. Posons $v = Bu|_{x_n=0}$. Du fait de l'ellipticité de B, on commence par en prendre une paramétrix $\widetilde{B}$, ce qui donne :

$$u|_{x_n=0} = \widetilde{B}v \qquad \text{dans} \quad H^{\mathrm{loc}}_{-\Re\mathrm{e}\,\psi+\epsilon_1|\Im\mathrm{m}\,x'|}.$$

Prenant ensuite une réalisation de $\widetilde{B}$ comme en (2.3), on obtient :

$$\|u\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma})} = \|\widetilde{B}^W v\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma})} + \mathcal{O}\big(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon)/h}\big) \qquad \text{avec} \quad \epsilon > 0,$$

et on voit bien sur la formule (2.3) que :

$$\|\widetilde{B}^W v\|^2_{L^2(\widetilde{\Sigma})} \leq C\|v\|^2_{L^2(\Sigma)} \qquad \text{avec} \quad C > 0. \quad \square$$

Il suffit donc maintenant de montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, C_\epsilon > 0$ t.q.

$$\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \geq \frac{1}{C_\epsilon} e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon)/h}.$$

3. Construction de solutions asymptotiques

Soient $\gamma \in \widetilde{G}$ et $y_0 \in \gamma \cap \{x_n < 0\}$, y_0 assez proche de $z_0 = z_0(\gamma)$. L'objet de cette section est de construire des solutions approchées de l'équation $(P(z, hD_z) - E)v(y,z,h) = 0$, définies pour y voisin de y_0, et z dans un voisinage de $\gamma \cap \{x_n \geq 0\}$. Pour cela, on cherche v sous la forme $a(y,z,h)e^{-F(y,z)/h}$ où a est un symbole classique, ce qui (*cf.* méthode BKW) nous conduit à l'équation eiconale :

$$\big(\nabla_z F(y,z)\big)^2 = V(z) - E.$$

Avec Λ_0 et H_ϵ comme dans la démonstration du LEMME 2.1, on voit que si y est voisin de y_0, et si $z_1(\epsilon, y)$ est le point de H_ϵ qui réalise $d(y, H_\epsilon)$, alors l'application $y \mapsto z_1(\epsilon, y)$ est une submersion analytique, le noyau de sa différentielle étant la tangente en y à la géodésique minimale de y à H_ϵ (de fait, on a

$$z_1(\epsilon, y) = \pi\Big[\exp t(\epsilon, y) H_q(y, \nabla_y d(y, H_\epsilon))\Big]$$

où $\pi : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la projection naturelle, et $t(\epsilon, y) \in \mathbb{R}$ dépend analytiquement de y).

Si maintenant $z_1(y)$ est le point de ∂U_1 qui réalise $d(z_1(\epsilon, y), \partial U_1)$ (*i.e.*, $d(z_1(\epsilon, y), z_1(y)) = \epsilon$), alors (grâce au LEMME 2.1), l'application $H_\epsilon \ni z_1(\epsilon, y) \mapsto z_1(y) \in \partial U_1$ est un difféomorphisme local. (En effet, avec les mêmes coordonnées locales que pour le LEMME 2.1, on peut désingulariser le champ de vecteurs $\nabla d(z, \partial U_1)$ à l'aide du changement de variables $z' = x'$, $z_n = \sqrt{V(x) - E}$. On trouve alors que l'application ci-dessus est un difféomorphisme analytique en z, et donc aussi en x puisque $V(x) \neq E$ sur H_ϵ). On en déduit :

LEMME 3.1. — *Quand y varie dans un voisinage de y_0, il existe une unique géodésique minimale γ_y de ∂U_1 à y, et si $\{z_1(y)\} = \gamma_y \cap \partial U_1$, alors l'application $y \to z_1(y) \in \partial U_1$ est une submersion analytique dont le noyau de la différentielle est la tangente en y à γ_y.*

Pour (y, z) assez voisin de (y_0, z_0), on pose maintenant $F(y, z) = d(y, z) - d(y, U_1)$. On voit alors facilement (par des méthodes classiques de géométrie riemannienne : voir par exemple MILNOR [10]) que F est analytique si l'on a pris y_0 assez proche de z_0, et que $(\nabla_z F(y, z))^2 = V(z) - E$. On peut ensuite, comme dans la démonstration du LEMME 2.1, prolonger F analytiquement pour $z \in \gamma_y \cap U_1^C$.

Il s'agit maintenant de prolonger F pour z dans un voisinage de $\gamma \cap \{x_n \geq 0\}$. Pour cela, on s'inspire des techniques de [6]. Pour y près de y_0, on note Λ_y la lagrangienne réelle de $T^*\mathbb{R}^n$ définie au-dessus d'un voisinage de $\gamma_y \cap U_1^C$ par :

$$\Lambda_y : \zeta = \nabla_z F(y, z).$$

Λ_y est alors tangente à H_q, et on note $\widetilde{\gamma}_y$ la bicaractéristique de q au-dessus de γ_y. Comme H_q reste non nul dans tout un voisinage de $\widetilde{\gamma}_y \cap \{x_n \geq 0\}$, Λ_y se prolonge en une variété H_q-invariante de $q^{-1}(-E)$, avec $\widetilde{\gamma}_y \cap \{x_n \geq 0\} \subset \Lambda_y$.

La projection naturelle $\pi_y : \Lambda_y \to \mathbb{R}^n$ est trivialement de différentielle bijective au-dessus de $\gamma_y \cap U_1^C$, et d'autre part $\operatorname{Ker} d\pi_y(z_1(y), 0)$ contient le vecteur non nul $H_q(z_1(y), 0)$.

Comme dans [6, lemme 10.1], on voit aussi que $\mathrm{rg}(d\pi_{y_0}(z_1(y_0)),0)) = n-1$. Par continuité en y, on en déduit pour y voisin de y_0 :

$$\mathrm{rg}\Big(d\pi_y\big(z_1(y),0\big)\Big) = n-1. \tag{3.1}$$

Maintenant, de même que dans [6], on choisit des coordonnées euclidiennes (z',z_n) centrées en z_1 telles que $T_{z_1}(\partial U_1) = \{z_n = 0\}$, et $\partial/\partial z_n$ est la normale intérieure de U_1 en $z_1(= z_1(y_0))$.

On a alors $V(z) - E = -C_0 z_n + W(z)$, où $C_0 > 0$, $W(z) = \mathcal{O}(|z|^2)$, et $H_q(z_1,0) = -C_0\partial/\partial\zeta_n$.

De plus (d'après (3.1) et le fait que $\pi_y(\Lambda_y) \subset U_1^C$), l'application $\Lambda_y \ni (z,\zeta) \mapsto (z',\zeta_n)$ est un difféomorphisme local pour y voisin de y_0 et (z,ζ) voisin de $(z_1,0)$. Près de $(z_1,0)$, on peut donc représenter Λ_y par :

$$\begin{cases} -z_n = \dfrac{\partial g}{\partial \zeta_n}(y,z',\zeta_n)\,, \\ \quad\zeta' = \dfrac{\partial g}{\partial z'}(y,z',\zeta_n)\,, \end{cases}$$

avec g analytique près de $(y_0,0)$, $g(y,z_1'(y),0) = 0$, $\nabla_{(z',\zeta_n)}g(y,z_1'(y),0) = (0,-z_1^n(y))$ (cette dernière condition provenant du fait que l'on a nécessairement $\nabla_z F(y,z_1(y)) = 0$, et donc $\zeta = 0$ sur Λ_y au-dessus de $z_1(y)$).

D'autre part, g vérifie l'équation eiconale :

$$-C_0\frac{\partial g}{\partial \zeta_n} + \zeta_n^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z'}\right)^2 - W\left(z',-\frac{\partial g}{\partial \zeta_n}\right) = 0 \tag{3.2}$$

d'où
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial g}{\partial \zeta_n}\right|_{\zeta_n=0} = \mathcal{O}\Big(|y-y_0|^2 + |z'|^2\Big) \\ \left.\dfrac{\partial^2 g}{\partial \zeta_n \partial z'}\right|_{\zeta_n=0} = \mathcal{O}\Big(|y-y_0| + |z'|\Big). \end{cases}$$

En dérivant ensuite (3.2) par rapport à ζ_n, on obtient comme dans [6, section 10] :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_n^2} = \frac{2}{C_0}\zeta_n + \mathcal{O}\Big(|z'|^2 + |\zeta_n|^2 + |y-y_0|^2\Big).$$

Par suite, π_y est singulière exactement sur l'hypersurface

$$H : \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta_n^2} = 0 \qquad i.e. \quad H : \zeta_n = \zeta_n^c(y,z')$$

avec ici $\zeta_n^c(y,z') = \mathcal{O}(|z'|^2+|y-y_0|^2)$. La caustique $\mathcal{C}_y$ est alors déterminée par : $z_n + b(y,z') = 0$, où

$$b(y,z') = \frac{\partial g}{\partial \zeta_n}(y,z',\zeta_n^c(y,z')) = \mathcal{O}\Big(|z'|^2 + |y-y_0|^2\Big),$$

et, pour $z_n + b(y,z') < 0$, z assez près de z_1, y assez près de y_0, on peut représenter F par :

$$F(y,z) = v.c._{\zeta_n}\big(z_n\zeta_n + g(y,z',\zeta_n)\big)$$

où on détermine le point critique comme dans [6].

On a alors deux prolongements possibles F_+ et F_- de F, selon le choix de $\sqrt{-(z_n+b)}$ dans $z_n + b > 0$, et on trouve :

$$F_\pm(y,z) = a(y,z') + z_n\zeta_n^c(y,z') + G\big(y,z',\sqrt{-(z_n+b)}\big) \tag{3.3}$$

où $a(y,z') = g(y,z',\zeta_n^c(y,z'))$, G est analytique, et $G(y,z',s) \sim s^3$. (F_+ est déterminée ici par : $\Im\mathrm{m}\, F_+(y,z) \sim (z_n+b)^{3/2}$ dans $z_n + b > 0$). On a aussi : $F_\pm$ est $\mathcal{C}^1$, analytique dans $\{z_n + b \neq 0\}$, $F_+ = \overline{F}_-$, et, par prolongement analytique dans le complexe évitant $\{z_n + b = 0\}$:

$$(\nabla_z F_\pm)^2 = V(z) - E.$$

Soit maintenant $\widetilde{\Omega}$ un petit voisinage ouvert de $\overline{\{y_0\} \times \gamma \cap \{x_n \geq 0\}}$, $\widetilde{\Omega}_+ = \{z_n + b(y,z') > 0\} \cap \widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Omega}_- = \widetilde{\Omega} \setminus \overline{\widetilde{\Omega}}_+$. Il est alors facile de construire un symbole analytique classique $a(y,z,h)$ dans $\widetilde{\Omega}_-$ tel que :

$$e^{F(y,z)/h}\big(P(z,hD_z) - E\big)\big(ae^{-F(y,z)/h}\big) = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big) \qquad \text{avec} \quad \epsilon > 0.$$

Près de $\{z_n + b = 0\}$, F et a développent des singularités, aussi on y représente $ae^{-F/h}$ formellement comme une intégrale de type Airy :

$$I_\pm(b)(y,z,h) = h^{-1/2} \int_{\gamma_\pm(y,z)} b(y,z',\zeta_n,h) e^{-(\zeta_n z_n + g(y,z',\zeta_n))/h} d\zeta_n$$

où $\gamma_\pm(y,z)$ sont des contours convenables déterminés comme dans [6, section 10], et sur lesquels $\Re\mathrm{e}(\zeta_n z_n + g) \geq \Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)$. Dans la région $z_n + b > 0$, on récupère alors une expression de la forme $a_\pm(y,z,h)e^{-F_\pm(y,z)/h}$ où $a_\pm$ sont à nouveau des symboles analytiques classiques. De plus, on a alors :

$$\begin{cases} e^{\Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h}(P-E)\big(a_\pm e^{-F_\pm(y,z)/h}\big) = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big) \\ e^{\Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h}(P-E)\big(I_\pm(b)\big) = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big) \end{cases}$$

avec $\epsilon > 0$.

On notera désormais $v_\pm(y,z,h)$ les solutions asymptotiques de $P-E$ déterminées par :

$$v_\pm = \begin{cases} ae^{-F/h} & \text{dans } \widetilde{\Omega}_-\,; \\ I_\pm(b) & \text{près de } \{z_n+b=0\}\cap\widetilde{\Omega}; \\ a_\pm e^{-F_\pm/h} & \text{dans } \widetilde{\Omega}_+\,; \end{cases}$$

où les différentes expressions sont recollées par des troncatures C^∞ standards. $v_\pm$ sont donc des fonctions C^∞ qui vérifient :

$$e^{\Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h}(P-E)v_\pm = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big) \tag{3.4}$$

avec $\epsilon > 0$, uniformément pour y complexe voisin de y_0, z dans un voisinage de $\gamma\cap\{x_n\geq 0\}$. On a aussi $\Re\mathrm{e}\, F_+ = \Re\mathrm{e}\, F_-$ et $v_+ = \overline{v}_-$.

En prévision du paragraphe 5, on va maintenant établir certaines propriétés de $F_\pm$:

LEMME 3.2. — *Pour y voisin de y_0, on a $\mathcal{C}_y\cap\partial U_1 = \{z_1(y)\}$ avec un contact d'ordre 2 exactement.*

Démonstration. — Comme pour le LEMME 2.1, on note Λ_0 la lagrangienne engendrée par les bicaractéristiques de q issues de $\partial U_1\times\{0\}$. En particulier, au-dessus de $U_1^{\mathcal{C}}$, on peut représenter Λ_0 par : $\zeta = -\nabla d(U_1,z)$. Si $\widetilde{\gamma}_y$ désigne comme avant le relevé bicaractéristique de γ_y, alors Λ_y et Λ_0 se coupent le long de $\widetilde{\gamma}_y$ et, d'après ce que l'on a vu dans la démonstration du LEMME 2.1, ∂U_1 est nécessairement la caustique associée à Λ_0.

Par l'absurde, supposons que $\mathcal{C}_{y_0}$ et ∂U_1 ont une direction de tangence d'ordre ≥ 3. Il est facile de voir que ceci équivaut à dire que :

$$0\in \text{Spectre}\left(\nabla^2_{z'}(C_0 b(y_0,z')+W(z))\big|_{z=0}\right)$$

et donc, pour une courbe convenable ω tracée sur $\mathcal{C}_{y_0}$:

$$(C_0 b+W)\big|_\omega = \mathcal{O}(|z'|^3).$$

En écrivant ensuite l'équation eiconale vérifiée par g en $\zeta_n^c(z')$ on trouve, avec $a(z') = g(y_0,z',\zeta_n^c(z'))$:

$$-C_0 b(y_0,z') + \zeta_n^c(z')^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z'}\right)^2 - W\big(z',-b(y_0,z')\big) = 0$$

d'où $(\partial a/\partial z')^2\big|_\omega = \mathcal{O}(|z'|^3)$ et donc, puisque a est analytique :

$$\frac{\partial a}{\partial z'}\bigg|_\omega = \mathcal{O}(|z'|^2).$$

En particulier, $0 \in \mathrm{Spectre}((\partial^2 g/\partial z'^2)(y_0,0,0))$, d'où l'on déduit que l'on a une direction de tangence entre Λ_0 et Λ_{y_0} en $(z_1(y_0),0)$ qui n'est pas celle de $\dot{\widetilde{\gamma}}(0)$. Puisque Λ_0 et Λ_{y_0} sont invariantes par le flot de H_q, cette tangence se prolonge le long de $\widetilde{\gamma}$. En particulier, pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a une direction non triviale tangente à $H_\epsilon = \{d(z,U_1) = \epsilon\}$ en $U_\epsilon \cap \gamma$, suivant laquelle :

$$d(y_0,z) + d(z,\partial U_1) = d(y_0,\partial U_1) + \mathcal{O}\left(|z - z_1(\epsilon,y)|^3\right)$$

i.e.

$$d(y_0,z) - d\left(y_0, z_1(\epsilon,y_0)\right) = \mathcal{O}\left(|z - z_1(\epsilon,y_0)|^3\right)$$

ce qui est en contradiction avec un résultat classique de géométrie riemannienne qui donne ici :

$$\forall z \in H_\epsilon\,, \quad d(y_0,z) - d\left(y_0, z_1(\epsilon,y_0)\right) \geq C|z - z_1(\epsilon,y_0)|^2. \quad \square$$

Soit maintenant α_y la projection sur $\mathbb{R}^n$ de la bicaractéristique de $p = \xi^2 + V$ qui passe par $z_1(y)$.

Soient aussi $\Gamma \subset \overset{\circ}{U}_1$ une hypersurface analytique qui coupe α_{y_0} orthogonalement, et Σ' une hypersurface analytique qui coupe γ_{y_0} transversalement en y_0.

Le LEMME 3.2 et la remarque 10.3 de [6] montrent alors que :

$$\Re\mathrm{e}\, F(y,z) \geq \frac{1}{C}\left|z - w(y)\right|^2 \quad \text{pour } z \in \Gamma\,,\ y \in \Sigma'\,, \tag{3.5}$$

où $w(y)$ est le point d'intersection entre α_y et Γ (on montre comme dans le LEMME 3.1 que $y \to w(y)$ est une submersion).

Si on note z' et y' des coordonnées locales sur Γ et Σ', on a alors $\Re\mathrm{e}(\partial F/\partial z')(y,w(y)) = 0$ (cela se voit comme dans [6, section 10], voir aussi plus loin), et (3.5) estime donc que :

$$\det \nabla_{y'}\nabla_{z'}\, \Re\mathrm{e}\, F\big(y_0, w(y_0)\big) \neq 0.$$

De plus, ces considérations sur $\Re\mathrm{e}\, F$ restent uniformément valables si Γ est de la forme : $\Im\mathrm{m}\, F(y_0,z) = \epsilon$, avec $\epsilon \to 0$, et on a vu (*cf.* (3.3)) que :

$$\Im\mathrm{m}\, F = \sqrt{(z_n + b)^3}\,\widetilde{F}\big(y, z', \sqrt{z_n + b}\big)\,,$$

avec $\widetilde{F} = \widetilde{F}(y,z',s) \neq 0$ près de $(y_0,0)$. Par suite, pour $z = w(y_0)$, $y = y_0$, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial z'}\Im\mathrm{m}\, F = 0 \iff \tfrac{3}{2}\sqrt{z_n + b}\,\widetilde{F}\cdot\nabla_{z'}(f_n + b) + \sqrt{(z_n+b)^3}\,\nabla_{z'}\widetilde{F} + \tfrac{1}{2}(z_n + b)\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial s}\cdot\nabla_{z'}(z_n + b) = 0\,.$$

Puisque, sur Γ, $z_n + b \sim \sqrt{\epsilon^3}$, on en déduit :

$$\nabla_{z'}(z_n + b) = \mathcal{O}(z_n + b) = \mathcal{O}\big(\sqrt{\epsilon^3}\big).$$

Au point $(y_0, w(y_0))$, on trouve alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial y' \partial z'} \Im\mathrm{m}\, F = \mathcal{O}\big(\sqrt{z_n + b}\big) = \mathcal{O}\big(\sqrt{\epsilon}\big)$$

et par conséquent, en prenant $\epsilon > 0$ assez petit, on obtient :

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'}\big(y_0, w(y_0)\big) \neq 0. \tag{3.6}$$

4. Réduction à des estimations sur u dans le puits

On fixe désormais $\gamma \in \widetilde{G}$, et on note $f_2 = \Im\mathrm{m}\, F_+$. Soit maintenant Ω un voisinage connexe de $(\gamma \cap \{x_n > 0\}) \cup \{\exp t\nabla f_2(z_1),\ 0 < t < \epsilon\}$, où $\epsilon > 0$ est assez petit, tel que :

$$\partial\Omega = \Sigma \cup \Gamma \cup \mathcal{T}$$

avec :

(i) Σ voisinage assez petit de z_0 dans $\{x_n = 0\}$;

(ii) Γ hypersurface passant par $z_2 = \exp \epsilon\nabla f_2(z_1)$ et orthogonale en ce point à $\{\exp t\nabla f_2(z_1),\ 0 < t < 2\epsilon\}$;

(iii) $\mathcal{T}$ est un tube assez petit autour de

$$(\gamma \cap \{x_n \geq 0\}) \cup \big\{\exp t\nabla f_2(z_1),\ 0 < t \leq \epsilon\big\} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\gamma},$$

ne rencontrant pas $\overline{\gamma}$, et s'appuyant sur Γ et Σ.

On peut aussi choisir les coordonnées locales centrées en z_1 de telle sorte que $\Gamma = \{z_n = c\}$ avec $c > 0$, et $z_2 = (0, c)$.

On a alors :

$$\nabla_{z'} \Re\mathrm{e}\, F_\pm(y_0, z_2) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_{z'} f_2(z_2) = 0. \tag{4.1}$$

De plus, comme dans le lemme 10.2 de [6], on voit que (avec les notations du paragraphe 3) tout point z de $\mathcal{C}_{y_0}$ assez voisin de z_1 et distinct de z_1 vérifie $f_1(z) > 0$, où $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Re\mathrm{e}\, F_\pm(y_0, \cdot)$. Comme d'autre part, d'après l'équation eiconale vérifiée par $f = f_1 + i f_2$, on a $\nabla_{f_2} f_1 = 0$, on en déduit :

$$\forall z \in \mathcal{T} \cap \overline{\overline{\Omega}}_+, \quad f_1(z) > 0.$$

On a aussi, par définition de f :

$$\forall z \in \mathcal{T} \cap \widetilde{\Omega}_-, \quad f_1(z) \geq d(y_0, z) - d(y_0, U_1),$$

et donc, finalement :

$$\exists\, \epsilon_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall z \in \mathcal{T}, \quad d(z, U_1) + f_1(z) \geq \epsilon_1. \tag{4.2}$$

On choisit aussi Σ' hypersurface analytique passant par y_0 transverse à γ, et on note $\Sigma'_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de Σ'.

LEMME 4.1. — *Si $\exists\, \epsilon_0 > 0$ tel que $\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon_0)/h})$, alors*

$$\exists\, \epsilon'_0 > 0 \text{ tel que } \int_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial n} v_\pm - u \frac{\partial v_\pm}{\partial n}\Big) ds = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon'_0/h}\big)$$

pour tout y voisin de y_0 dans $\Sigma'_{\mathbb{C}}$, où $\partial/\partial n$ désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, et ds la mesure de surface de $\partial\Omega$.

Démonstration. — La formule de Green appliquée à Ω montre que :

$$\begin{aligned}\big((P-E)u \mid v_\pm\big)_{L^2(\Omega)} &- \big(u \mid (P-E)v_\pm\big)_{L^2(\Omega)} \\ &= -h^2 \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial n} v_\pm - u \frac{\partial v_\pm}{\partial n}\Big) ds,\end{aligned} \tag{4.3}$$

et on a : $(P-E)u = 0$, $(P-E)v_\pm(y,z,h) = \mathcal{O}(e^{-\Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h - \epsilon_1/h})$,

$$\|e^{d(z,U_1)/h} u\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}_\epsilon\left(e^{\epsilon/h}\right) \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

Par suite, le premier membre de (4.3) est majoré, pour tout $\epsilon > 0$, par :

$$C_\epsilon e^{\epsilon/h} \Big\| e^{-d(z,U_1)/h - \Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h - \epsilon_1/h} \Big\|_{L^2(\Omega)},$$

et puisque pour $y \in \Sigma'$, on a :

$$d(z, U_1) + \Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z) \geq 0$$

on en déduit, pour $y \in \Sigma'_{\mathbb{C}}$ assez voisin du réel, que le premier membre de (4.3) est $\mathcal{O}(e^{-\epsilon_2/h}), \epsilon_2 > 0$.

D'autre part, à cause de (4.2), et du fait que

$$u, \frac{\partial u}{\partial n} = \mathcal{O}_\epsilon\big(e^{-d(z,U_1)/h + \epsilon/h}\big)$$
$$v_\pm, \frac{\partial v_\pm}{\partial n} = \mathcal{O}_\epsilon\big(e^{-\Re\mathrm{e}\, F_\pm(y,z)/h + \epsilon/h}\big)$$

pour tout $\epsilon > 0$, on voit de même que :

$$\int_{T} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v_{\pm} - u \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \right) ds = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_3/h}\big)$$

avec $\epsilon_3 > 0$ et uniformément pour $y \in \Sigma'_{\mathbf{C}}$ assez voisin de y_0. On en déduit :

$$\int_{\Sigma \cup \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v_{\pm} - u \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \right) ds = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big) \quad \text{avec } \epsilon > 0. \tag{4.4}$$

Grâce à (2.2), on voit aussi comme dans la démonstration du LEMME 2.3 que si $\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon_0)/h})$, alors $\exists \widetilde{\epsilon}_0 > 0$ t.q. $\|\partial u/\partial n\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_O+\widetilde{\epsilon}_0)/h})$, et donc :

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v_{\pm} - u \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \right) = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon'/h}\big) \quad \text{avec } \epsilon' > 0\,,$$

d'où le lemme d'après (4.4). □

En utilisant ensuite les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine réel étudiés par SJÖSTRAND dans [15, section 5], que l'on localise près de la section nulle de $T^*\Gamma$, il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{h}{i} \frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} \equiv \pm \widetilde{A}(z, \widetilde{D}_{z'}) v_{\pm} \quad \text{près de } \Gamma, \text{ modulo } \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big)$$

avec $\epsilon > 0$, et $\widetilde{A}$ de symbole principal $a_0(z, \alpha_{\zeta'}) = \sqrt{E - V(z) - \alpha^2_{\zeta'}}$, et donc, d'après le LEMME 4.1, en posant $A = i\widetilde{A}/h$:

PROPOSITION 4.2. — *Si $\exists\, \epsilon_0 > 0$ tel que $\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon_0)/h})$, alors $\exists\, \epsilon_1 > 0$ tel que $\int_\Gamma (\partial u/\partial z_n \mp {}^t\! A u) v_{\pm}(y, (z', c)) dz'$ sont $\mathcal{O}(e^{-\epsilon_1/h})$ uniformément pour $y \in \Sigma'_{\mathbf{C}}$ assez voisin de y_0, où A est un O.P.D. analytique dans le domaine réel, localisé près de la section nulle de $T^*\Gamma$, et elliptique.*

Cette proposition, ainsi que les propriétés de $F_{\pm}$ près de (y_0, z_2) démontrées au paragraphe 3, conduisent tout naturellement à introduire une notion d'ensemble de fréquences pour u, directement inspirée de celle de front d'onde analytique telle que l'a donnée SJÖSTRAND dans [15], et qui est l'analogue à notre situation de l'ensemble de fréquences de GUILLEMIN-STERNBERG [1].

5. Ensemble de fréquences analytiques

Dans toute cette section, $u = u(x,h)$ désignera un élément de $H^{\mathrm{loc}}_{C_0|\Im m\, x|}(\widetilde{\Omega})$, avec $\widetilde{\Omega}$ ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\Omega \overset{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\Omega} \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, et $C_0 > 0$.

Définition 5.1. — Soit $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega$, $\psi(x,\alpha) = \psi(x, \alpha_x, \alpha_\xi)$ une fonction analytique définie près de (x_0, x_0, ξ_0), telle que :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi'_x = \alpha_\xi \quad \text{pour } x = \alpha_x\,,$$
$$\exists C > 0 \quad \Im m\, \psi \geq C|x - \alpha_x|^2 \quad \text{pour } x \text{ et } \alpha \text{ réels.}$$

Soient aussi $a(x,\alpha,h)$ un symbole analytique classique elliptique défini près de (x_0, x_0, ξ_0), et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ près de x_0. On dira que $(x_0, \xi_0) \notin FS_a(u)$ si $\exists \epsilon > 0$ tel que :

$$\int e^{i\psi(x,\alpha)/h} a(x,\alpha,h)\, \chi(u)\, \overline{u(x,h)}\, dx = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$$

uniformément pour α dans un voisinage réel de (x_0, ξ_0).

$FS_a(u)$ est alors un fermé de $T^*\Omega$ (en général non conique), et on montre comme dans [15, proposition 6.2] que cette définition est indépendante du choix de a et ψ.

PROPOSITION 5.2. — *Si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a $(x_0, \xi) \notin FS_a(u)$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $u = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ uniformément dans un voisinage réel de x_0.*

Démonstration. — Soit $\chi_1 \in C_0^\infty$, $\chi_1 = 1$ près de x_0. Pour $x \in \{\chi_1 = 1\}$, on écrit

$$u(x,h) = \int e^{i(x-y)\xi - \sqrt{1+h^2\xi^2}(x-y)^2/h} \chi_1(y) a(x-y,\xi,h) u(y) dy \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

avec $a(x,\xi,h) = 1 + ih(x\xi/\sqrt{1+h^2\xi^2})$, où l'égalité s'obtient en changeant de contour dans $\delta(x) = \int e^{ix\xi} d\xi/(2\pi)^n$, et en prenant comme nouveau contour : $\xi \mapsto \zeta = \xi + i(\sqrt{1+h^2\xi^2})x/h$ (voir par exemple LEBEAU [8] pour la justification de ce genre de transformation). On en déduit :

$$u(x,h) = \int e^{i(x-y)\xi/h - \sqrt{1+\xi^2}(x-y)^2/h} \tilde{a}(x-y,\xi) u(y) dy \frac{d\xi}{(2\pi h)^n}$$

avec $\tilde{a}(x,\xi) = 1 + i(x\xi/\sqrt{1+\xi^2})$, intégrale que l'on décompose sous la forme

$$u(x,h) = \int_{|\xi| \geq C_1} + \int_{|\xi| \leq C_1},$$

où l'on a pris $C_1 > C_0$. Dans $\int_{|\xi|\geq C_1}$, du fait que u est analytique on peut faire le changement de contour en y :

$$y \to \tilde{y} = y - i\epsilon_0 \frac{\chi(y)\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de x_0, $\operatorname{supp}\chi \subset \{\chi_1 = 1\}$, et $\epsilon_0 > 0$ est assez petit.

Le long de ce contour, on a :

$$\begin{aligned}\Re\mathrm{e}\big(i(x-\tilde{y})\xi - \sqrt{1+\xi^2}(x-\tilde{y})^2\big) &= -\epsilon_0\chi(y)\frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}} \\ &\quad + \epsilon_0^2\chi(y)^2\frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}} - \sqrt{1+\xi^2}(x-y)^2\end{aligned}$$

et donc, du fait que

$$|u(\tilde{y},h)| = \mathcal{O}_\epsilon\big(e^{(C_0\epsilon_0\chi(y)(|\xi|/\sqrt{1+\xi^2})+\epsilon)/h}\big) \qquad \forall\epsilon > 0,$$

et que $\sqrt{1+\xi^2}(x-y)^2 \geq 1/C\sqrt{1+\xi^2}$ là où $\chi \neq 1$, on aura :

$$\int_{|\xi|\geq C_1} = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_1/h}\big) \quad \text{avec } \epsilon_1 > 0.$$

Pour $|\xi| \leq C_1$, on pose $\psi(x,y,\xi) = (x-y)\xi + i\sqrt{1+\xi^2}(x-y)^2$, et on voit que ψ vérifie les hypothèses de la DÉFINITION 5.1.

Par suite :

$$\int e^{i\psi(x,y,\xi)/h}\chi_1(y)\tilde{a}(x-y,\xi)u(y)dy = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big)$$

uniformément pour $|\xi| \leq C_1$, d'où le résultat. □

Remarque 1. — Cette démonstration prouve aussi que l'on a toujours $FS_a(u) \subset \{|\xi| \leq C_0\}$.

Remarque 2. — En utilisant la démonstration de la PROPOSITION 6.2 de [15], on peut en fait montrer que la décroissance exponentielle a lieu dans un voisinage complexe de x_0, ce qui permet aussi de retrouver de manière indirecte le résultat du LEMME 2.2.

Soit maintenant $P(x, hD_x, h)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans Ω, de symbole principal $p(x,\xi)$ (au sens des opérateurs à grand paramètre $1/h$). Il résulte alors immédiatement de la définition de $FS_a(u)$ comme dans [15] que l'on a :

PROPOSITION 5.3. — *Si* $Pu = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ *uniformément près de* $x_0 \in \Omega$, *alors, au voisinage de* x_0, *on a* $FS_a(u) \subset \{p(x,\xi) = 0\}$.

Soit aussi Γ une hypersurface de Ω non-caractéristique pour P en x_0, et $m = \deg P$.

En coordonnées locales, on suppose $\Gamma = \{x_n = 0\}$, $x_0 = (x_0', 0)$. On a alors l'analogue suivant d'un résultat classique sur les singularités analytiques dû à SCHAPIRA [12] :

PROPOSITION 5.4. — *Soit* $(x_0', \xi_0') \in T^*\Gamma$. *Alors, si* $Pu = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})$ *uniformément près de* $x_0 = (x_0', 0)$, *et si :*

$$(x_0', \xi_0') \notin FS_a\big(u|_\Gamma\big) \cup FS_a\Big(\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_\Gamma\Big) \cup \ldots \cup FS_a\Big(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}\Big|_\Gamma\Big),$$

alors $\exists\, \epsilon_1 > 0$ *tel que* $\forall x_n \in]0, \epsilon_1[, \forall \xi_n \in \mathbb{R}$,

$$\big((x_0', x_n),\ (\xi_0', \xi_n)\big) \notin FS_a(u).$$

Démonstration. — On adapte la démonstration qui se trouve dans SJÖSTRAND [14, théorème 3.7], et, pour simplifier les notations, on se restreint au cas où $m = 2$. Les difficultés que l'on rencontre, par rapport à l'étude des singularités analytiques, proviennent du fait que l'on n'exclut pas ici la section nulle de $T^*\Omega$.

En modifiant u loin de x_0, on peut supposer que u est à support compact, et que P s'écrit sous la forme :

$$P = h^2 D_{x_n}^2 + hA(x, hD_{x'}, h)D_{x_n} + B(x, hD_{x'}, h)$$

avec A de degré 1 et B de degré 2.

Soit, pour $t > 0$ assez petit, $\Omega_t = \{0 < x_n < t\}$. Pour $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a alors :

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad &\langle Pu, w\rangle_{\Omega_t} + ih\langle hD_{x_n}u, w\rangle_{x_n=0} - ih\langle u, hD_{x_n}w\rangle_{x_n=0}\\ &\qquad\qquad + ih\langle u, {}^tA(x, hD_{x'})w\rangle_{x_n=0}\\ &= \langle u, {}^tPw\rangle_{\Omega_t} + ih\langle hD_{x_n}u, w\rangle_{x_n=t} - ih\langle u, hD_{x_n}w\rangle_{x_n=t}\\ &\qquad\qquad + ih\langle u, {}^tA(x, hD_{x'})w\rangle_{x_n=t}.\end{aligned}$$

Pour $\alpha = (\alpha_{x'}, \alpha_{\xi'}) \in T^*\mathbb{R}^{n-1}$, posons :

$$v_\alpha(x', h) = e^{-i(x'-\alpha_{x'})\alpha_{\xi'}/h - (x'-\alpha_{x'})^2/h}.$$

Pour $t \in [0, t_0]$, t_0 assez petit, on peut alors trouver $w = w_{\alpha,t}$ analytique près de x_0, et solution de :

$$\begin{cases} {}^tPw = 0 \\ w|_{x_n=t} = 0 \\ D_{x_n} w|_{x_n=t} = v_\alpha \end{cases}$$

et on a l'estimation, pour α voisin de (x_0', ξ_0') :

$$|w_{\alpha,t}(x)| \leq Ce^{C|x_n-t|/h} \sup_{\substack{|y'-x'|\leq C|x_n-t| \\ |\beta|\leq 2}} |\partial^\beta v_\alpha(y')|$$

$$\leq \widetilde{C}h^{-2}e^{\widetilde{C}|x_n-t|/h} \exp \frac{1}{h}\Big[\Im\mathrm{m}\, x' \cdot \alpha_{\xi'} - (\Re\mathrm{e}\, x' - \alpha_{x'})^2 + (\Im\mathrm{m}\, x')^2\Big]$$

ainsi que des estimations analogues pour les dérivées de $w_{\alpha,t}$.

Avec $w = w_{\alpha,t}$, (5.1) s'écrit, pour t assez petit :

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{aligned} \langle D_{x_n} u, w\rangle_{x_n=0} - \langle u, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0} + \langle u, {}^tAw\rangle_{x_n=0} = \\ - \langle u, v_\alpha\rangle_{x_n=t} + \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_1/h}\big) \end{aligned}$$

avec $\epsilon_1 > 0$.

Maintenant, comme on l'a vu dans la démonstration de la PROPOSITION 5.2 on a :

$$u(x', 0) = \int_{|\xi'-\xi_0'|\leq C_2} \exp\big[i(x'-y')\xi'/h - \sqrt{1+\xi'^2}(x'-y')^2/h\big]$$
$$\tilde{a}(x'-y', \xi')u(y', 0)dy' \frac{d\xi'}{(2\pi h)^{n-1}} + \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_2/h}\big)$$

avec C_2 assez grande et donc aussi, du fait que $(x_0', \xi_0') \notin FS_a(u|_{x_n=0})$,

$$u(x', 0) = \int_{\delta\leq|\xi'-\xi_0'|\leq C_2} (\ldots) + \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_3/h}\big)$$

où $\delta > 0$ est assez petit.

Soient maintenant $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ des cônes de $\mathbb{R}^{n-1}$ d'intérieurs disjoints et non vides tels que :

$$\bigcup_1^N \Gamma_j = \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{et} \quad \exists\, x_1', \ldots, x_N' \in \mathbb{R}^{n-1}, \ \exists\, a > 0 \quad \text{tels que} \quad \|x_j'\| = 1,$$

et $\quad \forall \xi' \in \Gamma_j \cap \{\delta \leq |\xi' - \xi'_0| \leq C_2\}, \ (\xi' - \xi'_0)x'_j \leq -a.$

Posons :

$$u_j(x') = \int_{\Gamma_j \cap \{\delta \leq |\xi' - \xi'_0| \leq C_2\}} e^{i(x'-y')\xi'/h - \sqrt{1+\xi'^2}(x'-y')^2/h} \tilde{a}(x'-y', \xi')u(y', 0)dy' \frac{d\xi'}{(2\pi h)^{n-1}}.$$

On a alors :

$$u(x', 0) = \sum_{j=1}^{N} u_j(x') + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_3/h}), \quad u_j \text{ analytique près de } x'_0,$$

et pour x' réel, $\epsilon > 0$, $u_j(x' - i\epsilon x'_j) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon a/h + \epsilon x'_j \xi'_0/h})$.

De la même manière, on a une décomposition analogue pour

$$D_{x_n} u(x', 0) = \sum_{j=1}^{N} v_j(x') + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_4/h}),$$

où les v_j ont les mêmes propriétés que les u_j.

Par suite, $\langle u, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0} = \sum_1^N \langle u_j, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0} + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_5/h})$ et, pour $\langle u_j, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0}$, on fait le changement de contour :

$$x' \to x' - is\chi(x')x'_j$$

où $s > 0$ est petit, et où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de x'_0.

On a alors :

$$\langle u_j, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0} = \int_{\chi=1} \mathcal{O}\big(e^{-sa/h - sx'_j(\alpha_{\xi'} - \xi'_0)/h + \widetilde{C}|t|/h + s^2/h}\big) + \int_{\chi \neq 1} \mathcal{O}\big(e^{\widetilde{C}|t|/h - (x' - \alpha_{x'})^2/h}\big) = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon_6/h}\big)$$

pour s fixé assez petit, avec $\epsilon_6 > 0$, et uniformément pour α assez voisin de (x'_0, ξ'_0) et t assez petit.

D'où $\langle u, D_{x_n} w\rangle_{x_n=0} = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_7/h})$, et le résultat analogue pour $\langle D_{x_n} u, w\rangle_{x_n=0}$ et $\langle u, {}^t A w\rangle_{x_n=0}$.

On en déduit d'après (5.2) :

$$\langle u, v_\alpha\rangle_{x_n=t} = \mathcal{O}\big(e^{-\epsilon/h}\big)$$

uniformément pour α assez voisin de (x'_0, ξ'_0) et t assez petit.

Maintenant, on a :

$$\int_{0<x_n<t} e^{-i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/h} u(x)dx$$
$$= \int_{0<x_n<t} \langle u(\cdot, x_n), v_{(y',\xi')}\rangle e^{-i(x_n-y_n)\xi_n/h-(x_n-y_n)^2/h} dx_n$$

$= \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ pour (y', ξ') voisin de (x'_0, ξ'_0), t assez petit, et ξ_n quelconque, d'où le résultat. □

Pour terminer cette section, on donne le résultat suivant de propagation, dont la démonstration est, sans aucun changement, celle de [15, théorème 9.1] (voir aussi HANGES [2]).

PROPOSITION 5.5. — *Si H_p admet une courbe intégrale réelle $\widetilde{\Gamma}$: $[-a, a] \to T^*\Omega$ telle que $\widetilde{\Gamma} \cap FS_a(Pu) = \emptyset$, alors :*

$$\widetilde{\Gamma} \subset FS_a(u) \quad \text{ou} \quad \widetilde{\Gamma} \cap FS_a(u) = \emptyset.$$

6. Fin de la démonstration du théorème 1.1

Le fait que $u \in H^{\mathrm{loc}}_{C_0|\Im\mathrm{m}\, x|}$ près de z_1 avec $C_0 > 0$ convenable se démontre comme dans le LEMME 2.1. On peut donc appliquer à u les considérations du paragraphe 5 dans un voisinage de z_1, que l'on peut aussi supposer contenir Γ.

Pour commencer, on remarque que le LEMME 3.2 et (3.6), ainsi que (4.1) impliquent que l'application $H^{\mathrm{loc}}_{C_0|\Im\mathrm{m}\, z'|}(\Gamma) \ni w \mapsto \int_\Gamma w v_\pm dz'$ est une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer dans un sens analogue à celui de [15, section 7], et permet, comme pour les singularités analytiques, de caractériser $FS_a(w)$.

Grâce au choix de Γ, on a $(\partial F/\partial z')(y_0, z_2) = 0$, et la PROPOSITION 4.2 signifie donc que si $\|u\|^2_{L^2(\Sigma)} = \mathcal{O}(e^{-(\widetilde{S}_0+\epsilon_0)/h})$, alors :

$$(z'_2, 0) \notin FS_a\Big(\big(\frac{\partial u}{\partial z_n} \pm {}^tAu\big)\big|_\Gamma\Big)$$

i.e.
$$(z'_2, 0) \notin FS_a\big(\frac{\partial u}{\partial z_n}\big|_\Gamma\big) \cup FS_a\big({}^tAu\big|_\Gamma\big)$$

où ${}^tAu$ est de la forme :

$${}^tAu(z', h) = h^{-3(n-1)/2} \iint_{\alpha' \in V} e^{i(x'-z')\alpha_{\xi'}/h-[(x'-\alpha_{x'})^2+(z'-\alpha_{x'})^2]/h}$$
$$\times\, a(x', z', \alpha_{\xi'}, h)\, \chi(x', z', \alpha')\, u(x', c, h)\, dx'\, d\alpha'$$

avec $V \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ voisinage ouvert de $(z_2', 0)$, et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4(n-1)})$ est à support près de

$$\left\{(x', z', \alpha') \mid \alpha' \in \overline{V}, x' = y' = \alpha_{x'}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\overline{V}, \quad \operatorname{supp}(\chi - 1) \cap \nabla\overline{V} = \emptyset.$$

Comme de plus a est elliptique en $(z_2', z_2', 0)$, on en déduit par composition des O.P.D. dans le domaine réel que l'on a aussi :

$$(z_2', 0) \notin FS_a(u|_\Gamma).$$

En appliquant la PROPOSITION 5.4, on voit que si $z_n^0 < c$ est assez proche de c, alors $\forall \zeta_n \in \mathbb{R}$,

$$\big((z_2', z_n^0), (0, \zeta_n)\big) \notin FS_a(u).$$

En particulier :

$$\rho_0 = \Big((z_2', z_n^0),\ \big(0, \sqrt{E - V(z_2', z_n^0)}\big)\Big) \notin FS_a(u).$$

La PROPOSITION 5.5 montre qu'alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp tH_p(\rho_0) \notin FS_a(u)$$

où $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x) - E$.

On voit ensuite facilement que si $\pi : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la projection naturelle, alors :

$$\pi\big(\exp tH_p(\rho_0)\big) = \exp 2t\nabla f_2(z_2', z_n^0)$$

où l'on a de plus choisi les coordonnées de telle sorte que

$$\Big\{\exp t\nabla f_2(z_1), \quad t \in]0, 2\epsilon[\Big\} = \{z' = 0\}.$$

Pour un t_0 convenable, on a alors :

$$\pi\big(\exp t_0 H_p(\rho_0)\big) = z_1$$

et donc, du fait que $p(\exp t_0 H_p(\rho_0)) = p(\rho_0) = 0$ et que $V(z_1) - E = 0$:

$$\exp t_0 H_p(\rho_0) = (z_1, 0).$$

D'après la PROPOSITION 5.3, on sait aussi que $FS_a(u)$ est inclus, au-dessus de z_1, dans la section nulle de $T^*_{z_1}\mathbb{R}^n$.

On a donc ici :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,,\ (z_1,\xi) \notin FS_a(u)$$

et donc (*cf.* PROPOSITION 5.2) : $u = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ uniformément près de z_1, ce qui contredit l'hypothèse du théorème. $\square$

Remarques sur l'hypothèse (1.1). — On se place ici dans le cas où V est analytique aussi dans $\overset{\circ}{U}_1$.

En dimension 1, $\{(x,\xi) \mid x \in U_1,\ \xi^2 + V(x) = E\}$ devient une courbe fermée simple de $\mathbb{R}^2$, et est entièrement recouverte par la bicaractéristique de $p = \xi^2 + V$ issue de $(z_1, 0)$. Dans ce cas, si on avait $\|u\|^2_{L^2(W)} = \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ avec W voisinage de z_1 et $\epsilon > 0$, on aurait alors $(z_1, 0) \notin FS_a(u)$ et, par propagation, $\{(x,\xi) \mid x \in U_1,\ \xi^2 + V = E\} \cap FS_a(u) = \emptyset$, et donc $FS_a(u) = \emptyset$. Par suite, u serait uniformément exponentiellement petite dans M_1, ce qui contredit le fait que u est normalisée ($\|u\|_{L^2(M_1)} = 1$). Dans ce cas, l'hypothèse (1.1) est donc nécessairement satisfaite.

En dimension supérieure, l'argument de propagation ci-dessus marche encore si l'on suppose en plus que le flot de H_p vérifie l'hypothèse énoncée dans la *remarque* 1.2, puisque par compacité on a alors : $\forall W$ voisinage dans $T^*\mathbb{R}^n$ de

$$\bigcup_{\gamma \in G} (\gamma \cap \partial U_1) \times \{0\}, \quad \exists T_W > 0 \text{ t.q. } \bigcup_{|t| \leq T_W} \exp tH_p(W)$$

est un voisinage de $\{\xi^2 + V = 0\} \cap \pi^{-1}(U_1)$.

Lorsque le flot de H_p est supposé ergodique sur $\{\xi^2 + V = 0\} \cap \pi^{-1}(U_1)$, on sait d'après [16] qu'il existe un grand nombre de valeurs propres $E(h)$ de P_{M_1} pour lesquelles la condition (1.1) est satisfaite. Malheureusement, il n'existe pour l'instant à notre connaissance aucune manière de savoir si de telles valeurs propres sont simples et vérifient (H5).

7. Démonstration du théorème 2.1. Exemple

Le THÉORÈME 2.1 est en fait une simple conséquence de la PROPOSITION 5.5. En effet, d'après les considérations précédentes, il suffit de montrer que si u n'a pas de FS_a au-dessus de z_1, alors $ue^{\psi/h}$ n'en a pas non plus au-dessus de z_0. Or $v = ue^{\psi/h}$ vérifie l'équation :

$$ih^2\Delta v + \frac{2h}{i}\nabla\psi\nabla v = ihv\Delta\psi$$

i.e. $Rv = 0$ avec R de symbole principal $r(x,\xi) = 2\nabla\psi \cdot \xi - i\xi^2$. On en déduit d'une part que $FS_a(v) \subset \{\xi = 0\}$ au-dessus de U_1^c, et, d'autre part, $(\gamma(t), 0)$ est une courbe intégrale de H_r.

Comme, par hypothèse, $(\gamma(t), 0) \notin FS_a(v)$ pour $\gamma(t)$ assez voisin de z_1, on en déduit le résultat voulu en appliquant la PROPOSITION 5.5.

Exemple de splitting exponentiellement petit devant $\exp(-S_0/h)$:

Dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, on considère $P(h) = P_x(h) + P_y(h)$ où $P_x = -h^2(\partial^2/\partial x^2) + (x^2-1)^2$ et $P_y = -h^2(\partial^2/\partial y^2) + y^2$.

La suite des valeurs propres $\mu_j(h)$ de $(P_y)_{[-1,1]}$ est alors donnée par $\mu_j(h) = (2j+1)h + \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h})$ où le $\mathcal{O}$ est uniforme en j pour $jh \leq \text{Cte} < 1$. On note $\lambda_k(h)$ la $(k+1)-$ième valeur propre de $(P_x)_{[-1/2,5/2]}$.

Montrons d'abord qu'il existe une suite $(h_n)_{n\geq 0}$, $h_n \to 0$ ainsi qu'une suite $(j_n)_{n\geq 0}$ à valeurs entières telles que :

$$\begin{aligned}&\forall n, \lambda_0(h_n) + \mu_{j_n}(h_n) \text{ est valeur propre simple de } P_{M_1}\\ &\text{avec } M_1 = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}] \times [-1,1]\,, \text{ et } \mu_{j_n}(h_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E_0 > 0.\end{aligned}$$

Pour cela, on remarque d'abord que si $\lambda_0(h) + \mu_j(h)$ n'est pas simple, alors $\exists\, k \geq 1$ t.q.

$$\frac{\lambda_k(h) - \lambda_0(h)}{h} \in \mathbb{N}^* + \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h}).$$

Pour $k \leq k_0$ ($k_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé) on voit par la méthode BKW (*cf.* [4]) que $\lambda_k(h) = (4k+2)h + E_k h^2 + \mathcal{O}(h^3)$ avec $E_k \neq 0$. Pour h assez petit, on aura donc :

$$\frac{\lambda_k(h) - \lambda_0(h)}{h} \notin \mathbb{N}^* + \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h}) \quad \forall k \leq k_0.$$

Pour $k \geq k_0$, on va appliquer les résultats de HELFFER–ROBERT [3]. Si l'on pose :

$$f(E) = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi^2 + (x^2-1)^2 \leq E} dx\, d\xi\,,$$

on a alors, en se restreignant aux $\lambda_k(h) \in [0, E_0]$, $E_0 > 0$ assez petit (*cf.* [3, remarque 4.9]) :

$$\lambda_k(h) = f^{-1}\big((k+\tfrac{1}{2})h\big) + h^2 g\big((k+\tfrac{1}{2})h\big) + \mathcal{O}(h^3)$$

où $g \in \mathcal{C}^\infty([0, E_0])$, et où le $\mathcal{O}$ est uniforme par rapport à k. (En fait, HELFFER et ROBERT ne précisent pas qu'il s'agit effectivement de la

$(k+1)$−ième valeur propre, mais cela se voit en comparant leurs résultats avec ceux de [4] dans la région $\lambda_k(h) \in [0, Ch]$, $C > 0$).

D'autre part, en utilisant la forme explicite de f, on trouve par un développement de Taylor :

$$f^{-1}\big((k+\tfrac{1}{2})h\big) = (4k+2)h - \tfrac{3}{2}(k+\tfrac{1}{2})^2 h^2 + (k+\tfrac{1}{2})^3 h^3 \ell\big((k+\tfrac{1}{2})h\big)$$

où $\ell \in \mathcal{C}^\infty([0, E_0])$.

Toujours d'après [3], le fait de se restreindre à $\lambda_k(h) \leq E_0$ se traduit par $(k+\frac{1}{2})h \leq \mathrm{Cte}E_0$, et quitte à diminuer la bande d'énergie que l'on regarde, on pourra considérer que la constante est ≤ 1, *i.e.* :

$$(k+\tfrac{1}{2})h \leq E_0. \tag{7.1}$$

On a alors :

$$\frac{\lambda_k(h) - \lambda_0(h)}{h} = 4k - \tfrac{3}{2}(k+\tfrac{1}{2})^2 \ell_k(h) + \mathcal{O}(h^2)$$

où

$$\ell_k(h) = h\Big[1 - \tfrac{2}{3}(k+\tfrac{1}{2})h\ell\big((k+\tfrac{1}{2})h\big) - \frac{1}{8\big(k+\frac{1}{2}\big)^2} - \frac{2g\big((k+\frac{1}{2})h\big)}{3\big(k+\frac{1}{2}\big)^2} + \frac{2g(\frac{1}{2}h)}{3\big(k+\frac{1}{2}\big)^2}\Big]$$

et donc

$$\frac{\lambda_k(h) - \lambda_0(h)}{h} \in \mathbb{N}^* + \mathcal{O}(e^{-\epsilon/h}) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \tag{7.2}$$

tel que

$$\left|\ell_k(h) - \frac{2n}{3(k+\frac{1}{2})^2}\right| \leq \frac{C\,h^2}{(k+\frac{1}{2})^2}$$

où $C > 0$ est une constante.

On voit sur l'expression de ℓ_k que si on a pris k_0 assez grand et E_0 assez petit, alors :

$$\ell_k'(h) \geq 1/2.$$

De plus, (7.1) et (7.2) impliquent :

$$\left|\ell_k(h) - \frac{2n}{3(k+\frac{1}{2})^2}\right| \leq \frac{C\,E_0^2}{(k+\frac{1}{2})^4}.$$

Soit

$$A_k = \left\{ y \in [0, h_0] \text{ tel que } \exists\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|y - \frac{2n}{3(k+\frac{1}{2})^2}\right| \leq \frac{C\,E_0^2}{(k+\frac{1}{2})^4} \right\}.$$

On a alors :

$$\operatorname{Mes}(A_k) \le \sum_{1\le n\le 2h_0(k+1/2)^2} \frac{2C\,E_0^2}{(k+\frac12)^4} = \mathcal{O}\Big(\frac{h_0E_0^2}{(k+\frac12)^2}\Big)$$

et donc :

$$\operatorname{Mes}\big(\ell_k^{-1}(A_k)\big) \le 2\operatorname{Mes}(A_k) = \mathcal{O}\Big(\frac{h_0E_0^2}{(k+\frac12)^2}\Big).$$

Par suite,

$$\operatorname{Mes}\Big(\bigcup_{k\ge k_0} \ell_k^{-1}(A_k)\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{h_0E_0^2}{(k_0+\frac12)^2}\Big)$$

et donc :

$$\operatorname{Mes}\Big\{h\le h_0 \mid \exists\, k\ge k_0\,,\ (k+\tfrac12)h\le E_0\,,\\ \frac1h\big(\lambda_k(h)-\lambda_0(h)\big)\in \mathbb{N}^*+\mathcal{O}(h^2)\Big\} = \mathcal{O}\Big(\frac{h_0E_0^2}{(k_0+\frac12)^2}\Big).$$

Comme ceci est vrai pour tout $h_0 \in]0,1]$, on en déduit en prenant E_0/k_0 assez petit :

$$\exists\,(h_n)_{n\ge0}\,,\ h_n\to 0 \text{ et } \exists\, C>0 \text{ tel que } \forall k\in \Big\{(k+\tfrac12)h_n\le E_0\Big\}\setminus\{0\}\,,$$

$$\operatorname{dist}\Big(\frac{\lambda_k(h_n)-\lambda_0(h_n)}{h_n},\mathbb{N}\Big)\ge C\,h_n^2. \tag{7.3}$$

En particulier, pour tout $j\in\{j\,h_n\le E_0\}$, $\lambda_0(h_n)+\mu_j(h_n)$ est valeur propre simple de $P(h_n)_{M_1}$.

En prenant ensuite $j_n=[E_0/2h_n]$, on a bien $\mu_{j_n}(h_n)\to E_0$. De plus, grâce à (7.3), l'hypothèse (H.5) est automatiquement satisfaite avec $E(h_n)=\lambda_0(h_n)+\mu_{j_n}(h_n)$.

La fonction propre associée à $E(h_n)$ est donnée par :

$$u_n(x,y)=v_n(x)w_n(y)$$

où v_n est la première fonction propre de $P_x(h_n)_{[-1/2,5/2]}$, et w_n est la fonction propre de $P_y(h_n)_{[-1,1]}$ associée à $\mu_{j_n}(h_n)$. Par suite, les seuls points au voisinage desquels u_n n'est pas exponentiellement petite sont ceux de $\{(1,y)\,;\ y^2\le E_0\}$.

D'autre part, il est facile de voir que la seule géodésique minimale joignant les deux puits (relativement à la métrique d'AGMON $[(x^2-1)^2+y^2-E_0]_+(dx^2+dy^2))$ est le segment

$$\Big[-\sqrt{1-\sqrt{E_0}},\sqrt{1-\sqrt{E_0}}\Big]_x \times\{0\}_y.$$

Le THÉORÈME 2.1 s'applique donc dans ce cas, et l'on trouve même ici que le splitting vérifie :

$$E^+(h_n) - E^-(h_n) \sim h_n^{1/2} e^{-(S_0+2s_0)/h_n}$$

où s_0 est la distance d'Agmon entre $\sqrt{1-\sqrt{E_0}}$ et 1 relativement à la métrique $(x^2-1)^2 dx^2$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque. — Il n'est pas difficile, en modifiant un peu notre exemple, d'obtenir aussi un cas où c'est le THÉORÈME 1.1 qui s'applique.

Note. — Dans le cas de la dimension 1, C. GÉRARD et A. GRIGIS ont récemment amélioré notre résultat en trouvant une estimation du type :

$$E^+ - E^- = m\big(E(h), h\big) e^{-\widetilde{S}_0/h}$$

où $m(E,h)$ est asymptotique à un symbole analytique de degré -1 en h (*cf.* [18]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUILLEMIN (V.) and STERNBERG (S.). — *Geometric asymptotic.* — Providence, R.I., Amer. Math. Soc. 1977.

[2] HANGES (N.). — Propagation of analyticity along real bicharacteristics, *Duke Math. J.*, t. **48** n° 1, 1981, p. 269–277.

[3] HELFFER (B.) et ROBERT (D.). — Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, t. **41** n° 3, 1984, p. 291–331.

[4] HELFFER (B.) and SJÖSTRAND (J.). — Multiple wells in the semi-classical limit *I*, *Comm. Partial Differentiel Equations*, t. **9** (4), 1984, p. 337–408.

[5] HELFFER (B.) et SJÖSTRAND (J.). — Puits multiples en limite semi-classique *II*, Interaction moléculaire, Symétries, Perturbation, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, t. **42** n° 2, 1985, p. 127–212.

[6] HELFFER (B.) et SJÖSTRAND (J.). — Résonances en limite semi-classique, *Mémoire* **n° 24/25**, *supp. au tome* **114**, *Fasc.* **3**, 1986, *Bull. Soc. Math. France.*

[7] HÖRMANDER (L.). — Fourier integral operators *I*, *Acta Math.*, t. **127**, 1971, p. 79–183.

[8] LEBEAU (G.). — Fonctions harmoniques et spectre singulier, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, t. **13**, 1980, p. 269–291.

[9] MARTINEZ (A.). — Estimations de l'effet tunnel pour le double puits *I*, *J. Math. Pures Appl.*, t. **66**, 1987, p. 195–215.

[10] MILNOR (J.). — *Morse theory.* — Princeton Univ. Press 1963.

[11] ROULEUX (M.). — Diffraction analytique sur une variété à singularité conique, *Comm. Partial Differentiel Equations*, t. **11** (9), 1986, p. 947–988.

[12] SCHAPIRA (P.). — Propagation at the boundary and reflexion of analytic singularities of solutions of linear partial differential equations *I*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, t. **12** Suppl., 1977, p. 441–453.

[13] SIMON (B.). — Semi-classical analysis of low lying eigenvalues *II*, *Ann. of Math.*, t. **120**, 1984, p. 89–118.

[14] SJÖSTRAND (J.). — Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems *I*, *Comm. Partial Differentiel Equations*, t. **5** (1), 1980, p. 41–94.

[15] SJÖSTRAND (J.). — Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, t. **95**, 1982.

[16] HELFFER (B.) et MARTINEZ (A.) et ROBERT (D.). — Ergodicité et limite semi-classique, *Comm. Math. Phys.*, t. **109**, 1987, p. 313–326.

[17] WILKINSON (M.). — Tunneling between tori in phase space, Pasadena, 1985, *Preprint du California Institute of Technology, et à paraître dans Physica D.*.

[18] GÉRARD (C.) and GRIGIS (A.). — Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier, *à paraître au J. of Diff. Eq.*.