BULLETIN DE LA S. M. F.

FERDAOUS BOUAZIZ-KELLIL

Représentations sphériques des groupes agissant transitivement sur un arbre semi-homogène

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 3 (1988), p. 255-278
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_3_255_0>

Bull. Soc. math. France,
116, 1988, p. 255–278.

REPRÉSENTATIONS SPHÉRIQUES DES GROUPES AGISSANT TRANSITIVEMENT SUR UN ARBRE SEMI-HOMOGÈNE

PAR

FERDAOUS BOUAZIZ–KELLIL (*)

RÉSUMÉ. — Le groupe Γ des automorphismes d'un arbre semi-homogène est analogue à $SL_2(\mathbb{R})$ et admet des séries dites principales et complémentaires de représentations unitaires sphériques.

Nous étudions les sous-groupes fermés unimodulaires Δ de Γ agissant transitivement sur l'arbre et montrons qu'à part un nombre fini d'entre elles, les représentations précédentes se restreignent en des représentations irréductibles de Δ.

ABSTRACT. — The automorphism group Γ of a semi-homogeneous tree is similar to $SL_2(\mathbb{R})$ and admits so called principal and complementary series of spherical unitary representations.

We are studying here closed unimodular sugbroups Δ of Γ which act transitively on the set of vertices of the same index, and we prove that opart from a finite number among them, the previous representations restrict to irreducible representations of Δ.

Introduction

Un certain nombre d'articles de A. FIGA TALAMANCA, M.A. PICARDELLO et d'autres ont été consacrés à de l'analyse harmonique sur des groupes discrets, plus particulièrement des groupes libres ou des produits amalgamés : voir en particulier [7], [8], [1], [11] et les références citées dans ces articles.

Une notion importante dans ce cadre est celle de fonction radiale sur le groupe. Mais comme l'a remarqué F. CHOUCROUN dans [3] pour le groupe libre, ce groupe Δ agit simplement transitivement sur un arbre homogène X et l'algèbre de convolution des fonctions radiales sur Δ se définit entièrement grâce à l'arbre X. En fait X est "l'espace symétrique" Γ/K

(*) Texte reçu le 28 juin 1985, révisé le 18 avril 1988.

F. BOUAZIZ–KELLIL, Université de Nancy I, Département de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy, France et Département de Mathématiques, Université de Annaba, Annaba, Algérie.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1988/255/$ 5.00

d'une paire de GUELFAND (Γ, K) où Γ est le groupe des automorphismes de X. Ainsi beaucoup de notions d'analyse harmonique sur Δ, Γ ou X sont identiques.

Parmi ces articles certains s'intéressent plus particulièrement à l'étude des représentations sphériques unitaires d'un groupe discret Δ et à leur irréductibilité : ces représentations peuvent se définir sur le plus gros groupe Γ qui possède une paire de GUELFAND (Γ, K), mais le problème est de montrer que la restriction des représentations à Δ est encore irréductible.

Cette étude a été initiée par A. FIGA TALAMANCA et M.A. PICARDELLO [7], [8] pour le cas du groupe libre à r générateurs (r fini) qui agit simplement transitivement sur un arbre homogène X_{2r} d'indice $2r$.

Par la suite leurs travaux ont été généralisés par W. BETTORI et M. PAGLIACCI [1] qui ont traité le cas du produit amalgamé $(\mathbb{Z}^{*r}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*s}$ agissant simplement transitivement sur X_{2r+s}. De plus ils ont démontré que ces groupes sont les seuls agissant simplement transitivement sur un arbre homogène.

D'autre part A. IOZZI et M.A. PICARDELLO [11] ont démontré des résultats analogues dans le cas du produit amalgamé $\overset{r}{*}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ qui agit simplement transitivement sur un graphe symétrique.

Dans cet article, on se propose de généraliser ces résultats au cas de certains groupes agissant sur un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ d'indice $(q+1, \ell+1)$ avec $q \geq 1$ et $\ell \geq 1$. Ces arbres sont aussi appelés arbres de Bruhat-Tits ou immeubles affines de rang 1, les représentations du groupe de leurs automorphismes ont été étudiés par G. I. OL'SHANSKII [15]. Comme un graphe symétrique peut être considéré comme un arbre semi-homogène, on retrouve ainsi tous les cas particuliers déjà étudiés.

Les résultats et ingrédients principaux sont les suivants :

On calcule le noyau de Green et le noyau de Martin de l'arbre $X_{q,\ell}$ comme cela est fait par P. CARTIER [2] dans le cas d'un arbre homogène. L'algèbre de convolution des fonctions radiales est la même pour tout groupe Δ agissant sur $X_{q,\ell}$ transitivement sur l'ensemble S^q des sommets d'indice $q+1$. Ceci évite le calcul (un peu technique) des fonctions sphériques puisqu'il suffit de traduire les résultats de [11] faits pour un cas particulier. Ces fonctions sphériques définissent des représentations unitaires irréductibles (série principale et complémentaire) du groupe $\Gamma_{q,\ell}$ des automorphismes de $X_{q,\ell}$.

Le groupe Δ agissant toujours transitivement sur S^q on donne, relativement à un système particulier de générateurs, une décomposition de tout élément de Δ analogue à celle des groupes libres ou produits amalgamés.

Sauf pour un nombre fini de représentations, on obtient l'irréductibilité de la restriction des représentations unitaires ci-dessus de $\Gamma_{q,\ell}$ à tous les sous-groupes Δ fermés unimodulaires de $\Gamma_{q,\ell}$ transitifs sur S^q. Le principe de la démonstration est le même que celui de [7] (déjà utilisé dans [1] et [11]). Le travail est de montrer qu'un lemme technique sur Δ est encore vrai pour ces groupes Δ très généraux, on utilise alors la décomposition déjà signalée.

Un exemple à la fin du chapitre II montre que si l'on affaiblit l'hypothèse "Δ transitif sur S^q," quelques autres restrictions de représentations deviennent réductibles.

1. Le groupe Γ des automorphismes d'un arbre semi-homogène X

1.1. Arbres semi-homogènes. — Soient X un arbre, S l'ensemble des sommets. L'ensemble S est muni d'une distance : si $s, t \in S$ $d(s,t)$ est la longueur de la géodésique joignant s à t.

L'indice d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant pour extrémités ce sommet.

Un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ est un arbre d'indice $(q+1, \ell+1)$ (avec $q \geq 1$; $\ell \geq 1$). C'est-à-dire que tout sommet est soit d'indice $q+1$, soit d'indice $\ell+1$ et si un sommet est d'indice $q+1$, tout sommet voisin est d'indice $\ell+1$ et réciproquement. (Il est clair que $X_{q,\ell}$ est unique à un isomorphisme près).

On considère alors deux cas :

a) $q \neq \ell$: on définit S^q comme l'ensemble des sommets d'indice $q+1$ et S^ℓ comme l'ensemble des sommets d'indice $\ell+1$. On a $S^q \cap S^\ell = \emptyset$ et $S = S^q \cup S^\ell$.

b) $q = \ell$: on définit une subdivision de S en deux, on choisit $s_0 \in S$ et on pose :

$$S' = \{s \in S\ ;\ d(s, s_0) \text{ est pair}\}$$
$$S'' = \{s \in S\ ;\ d(s, s_0) \text{ est impair}\}.$$

Ainsi S' et S'' sont les classes d'équivalences pour la relation :

$$s \sim s' \iff d(s, s') \text{ est pair.}$$

Dans la suite chaque fois que l'on parlera de S^q ou S^ℓ, il faudra lire S' (*resp.* S'') à la place de S^q (*resp.* S^ℓ) si $q = \ell$.

Si X_q est un arbre homogène, d'indice $q+1$ (où $q \geq 2$), d'ensemble de sommet Σ, c'est aussi un arbre semi-homogène de type $X_{q,1}$ où $S^q = \Sigma$ et $S^1 =$ (milieux des arêtes de Σ). Cependant les distances sur Σ sont doubles dans $X_{q,1}$.

X_q est aussi un arbre semi-homogène de type $X_{q,q}$.

On peut relier cette notion d'arbre semi-homogène à celle de graphe symétrique définie dans [11] : *si on a un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$, l'ensemble S^q est l'ensemble des sommets d'un graphe symétrique obtenu en joignant par une arête deux sommets de S^q à distance deux.*

Réciproquement à partir d'un graphe symétrique, on construit un arbre semi-homogène : l'ensemble S^q est l'ensemble des sommets du graphe. L'ensemble S^ℓ est l'ensemble des barycentres des polygônes du graphe. Un élément de S^q et un élément de S^ℓ sont joints par une arête si le sommet correspondant appartient au polygône correspondant.

Le dictionnaire permettant de traduire les résultats de [11] dans nos notations est donc :

$$k \mapsto \ell + 1; \quad r \mapsto q + 1; \quad q \mapsto \ell q; \quad \overset{r}{*}\mathbb{Z}_k \mapsto X_{q,\ell}$$

(les distances sur S^q ou Σ diffèrent cependant d'un facteur 2).

Fixons un sommet s_0 et considèrons une géodésique infinie d'origine s_0. C'est une suite infinie $[s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots]$ où les s_i sont différents deux à deux et où s_n est lié à s_{n-1} pour tout $n \geq 1$. On introduit une relation d'équivalence : deux telles géodésiques infinies définissent le même bout si elles ne diffèrent que par un nombre fini de sommets. Donc un bout ne dépend plus de l'origine.

Soit $\widehat{S} = S \cup B$, où B est l'ensemble des bouts. On définit $\delta_t(s,s') = d(s,t) - d(s',t)$ pour tout $s, s', t \in S$. De même $\delta_b(s,s') = \delta_t(s,s')$ où t est le point d'intersection des géodésiques $[s,s']$; $[s,b]$; $[s',b]$. La relation $\delta_b(s,s') = 0$ est une relation d'équivalence entre sommets s, s'. Les classes d'équivalences s'appellent les *horocycles associés* à b [2].

De manière plus explicite, choisissons un sommet s_0 de référence et pour tout entier n, notons H_n l'ensemble des sommets s tels que $\delta_b(s,s_0) = n$. Les H_n sont les horocycles associés à b. On a $s_0 \in H_0$ et $S = \coprod_{n=-\infty}^{\infty} H_n$, les H_n sont deux à deux disjoints.

On note aussi $S_n = \{s \in S \mid d(s,s_0) = n\}$ la sphère de centre s_0 et de rayon n.

THÉORÈME 1.1 : [2]. — *Il existe une topologie compacte sur $\widehat{S}$ telle que :*

1) *S est un ouvert, dense, discret de $\widehat{S}$;*
2) *B est un compact;*
3) *Si $b = \{s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots\} \in B$, alors les ensembles :*

$$V_{b,n}^{s_0} = \Big\{b' \in B \mid b' = \{s_0, \ldots, s_n, s'_{n+1}, \ldots\}\Big\} \cup \Big\{s' \in S \mid s_n \in [s'_0 s']\Big\}$$

forment, quand n varie, une base de voisinages de b.

1.2. Groupe des automorphismes. — On considère le groupe des automorphismes $\Gamma_{q,\ell}$ (ou Γ) de l'arbre $X_{q,\ell}$. Il stabilise automatiquement S^q et S^ℓ si $q \neq \ell$.

Si $q = \ell$, on appelle $\Gamma_{q,q}$ le groupe des automorphismes de $X_{q,q}$ qui stabilisent S' et S'' (c'est un sous-groupe d'indice 2 du groupe Γ_q de tous les automorphismes de $X_q = X_{q,q}$).

Le groupe Γ agit isométriquement sur S.

PROPOSITION 1.2. — *Soit $X_{q,\ell}$ un arbre semi-homogène, alors :*

1) *Γ opère transitivement sur $S^q \times B$;*

2) *Si $s_0 \in S^q$, le stabilisateur K_0 de s_0 opère transitivement sur l'ensemble B et sur S_n pour $n \geq 1$;*

3) *Γ opère doublement transitivement sur S^q relativement à la distance, c'est-à-dire que les orbites de Γ dans S^q sont formées de tous les couples de sommets à la même distance.*

Démonstration. — C'est évident par transport de structure.

THÉORÈME 1.3 (*cf.* [2]). — *Il existe une topologie sur Γ telle que :*

1) *Γ soit localement compact;*

2) *Si on fixe $s_0 \in S$ et si on considère K_0 le stabilisateur de s_0, alors K_0 est un compact, ouvert;*

3) *L'application*

$$\begin{aligned} \Gamma \times \widehat{S} &\longrightarrow \widehat{S} \\ (\gamma, s) &\longmapsto \gamma s \end{aligned}$$

est continue.

COROLLAIRE 1.4. — (Γ, K_0) *est une paire de* GUELFAND.

Démonstration. — Γ agit doublement transitivement sur S^q relativement à la distance.

COROLLAIRE 1.5. — *Il existe une unique mesure μ_{s_0} de masse totale 1 sur B invariante par K_0.*

Démonstration. — La mesure de $V_{b,n}^{s_0} \cap B$ est nécessairement : $[(q+1)\ell(\ell q)^{p-1}]^{-1}$ si $2p = n$ et $[(q+1)(\ell q)^{p-1}]^{-1}$ si $2p-1 = n$. Il est facile de voir que ceci définit une unique mesure [2].

Remarques 1.6.

1) D'après [2], si on change s_0, on a :

$$d\mu_{s'_0}(b) = K_{s'_0,s_0}(b)\, d\mu_{s_0}(b)$$

où $K_{s'_0,s_0}(b)$ est la fonction qui va être définie et calculée par la suite.

2) Il existe une métrique sur Γ définie de la façon suivante : on fixe $s_0 \in S$ et $g, h \in \Gamma$, alors :

$$\delta(g,h) = \sum_{s \in S} d(gs, hs)\alpha^{-2d(s_0,s)}, \qquad \alpha > \sup(q,\ell) + 1.$$

Cette métrique induit sur Γ la topologie ci-dessus.

1.3. Groupes transitifs sur S^q. — On considère un sous-groupe Δ de Γ, un élément $s_0 \in S^q$ et le stabilisateur Δ_0 de s_0 dans Δ.

Pour $\delta \in \Gamma$, on pose $|\delta| = d(s_0, \delta s_0)$.

Pour une partie Δ_2 de Δ, on considère la condition (*) suivante.

$$(*) \qquad \begin{cases} \textit{l'application } \Delta_2 \to S_2 \textit{ définie par } \delta \mapsto \delta s_0 \textit{ est une bijection} \\ \textit{de } \Delta_2 \textit{ sur l'ensemble } S_2 \textit{ des sommets à distance deux de} \\ s_0. \end{cases}$$

PROPOSITION 1.7 (comparer à [4]). — *S'il existe une partie $\Delta_2 \subset \Delta$ vérifiant (*) alors :*

1) *Pour tout $s \in S^q$ avec $d(s, s_0) = 2n$, il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ uniques tels que :*

$$s = \delta_1 \dots \delta_n s_0.$$

2) *Pour tout $\delta \in \Delta$ tel que $|\delta| = 2n$, il existe $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ et $\delta_0 \in \Delta_0$ uniques tels que :*

$$\delta = \delta_1 \dots \delta_n \delta_0.$$

De plus $\delta_1, \dots, \delta_n$ sont déterminés par δs_0.

3) *Si $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$ et $\delta_0 \in \Delta_0$, on a $|\delta_1 \dots \delta_n \delta_0| = 2n$ si et seulement si $|\delta_i \delta_{i+1}| = 4$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.*

Remarques.

1) Comme Card $\{s \in S \mid d(s, s_0) = 2\} = (q+1)\ell$, on a $|\Delta_2| = (q+1)\ell$.

2) Si Δ_2 vérifie (*) et si $\delta \in \Delta$, alors ${}^\delta\Delta_2$ vérifie l'analogue de la condition (*) obtenue en remplaçant s_0 par δs_0 où ${}^\delta\Delta_2 = \delta\Delta_2\delta^{-1}$.

3) Si $\delta_1, \dots, \delta_n \in \Delta_2$, notons $s_i = \delta_1 \dots \delta_i s_0$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a $d(s_i, s_{i-1}) = 2$. Donc $d(s_0, s_n) = 2n$ si et seulement si $[s_0, s_1, \dots, s_n]$ est la géodésique dans S^q joignant s_0 à s_n.

Démonstration.

1) Soit $s \in S^q$; $d(s, s_0) = 2n$, on considère la géodésique dans S^q joignant s_0 à s, soit $[s_0, s_1, \dots s_n = s]$. D'après la *Remarque* 3, les $\delta_1, \dots, \delta_n$ cherchés sont tels que $\delta_1 \dots \delta_i s_0 = s_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Par récurrence, on peut supposer qu'on a trouvé $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ uniques tels que $\delta_1 \ldots \delta_i s_0 = s_i$, avec $1 \leq i \leq n-1$. Il faut trouver $\delta_n \in \Delta_2$ unique tel que $\delta_1 \ldots \delta_n s_0 = s_n = s$. Soit $\delta'_n = (\delta_1 \ldots \delta_{n-1})\, \delta_n (\delta_1 \ldots \delta_{n-1})^{-1}$, on a donc $\delta_1 \ldots \delta_n s_0 = \delta'_n s_{n-1}$. Comme on cherche $\delta_n \in \Delta_2$, l'élément δ'_n doit être dans ${}^{\delta_1 \ldots \delta_{n-1}}\Delta_2$. Comme de plus $d(s_n, s_{n-1}) = 2$, on conclut grâce à la *Remarque* 2 ci-dessus.

2) La seconde partie est une conséquence évidente de la première partie.

3) Pour la troisième partie, il suffit d'après la *Remarque* 3 de remarquer qu'une suite $s_0, s_1, \ldots, s_n$ de points de S^q à distance 2 est une géodésique si et seulement $d(s_i, s_{i+2}) = 4$ et que

$$d\big(\delta_1 \ldots \delta_{i-1} s_0, \delta_1 \ldots \delta_{i+1} s_0\big) = d\big(s_0, \delta_i \delta_{i+1} s_0\big) = |\delta_i \delta_{i+1}|.$$

COROLLAIRE 1.8. — *Δ agit transitivement sur S^q si et seulement s'il existe un $\Delta_2 \subset \Delta$ vérifiant $(*)$.*

PROPOSITION 1.9. — *Soit Δ_2 une partie de Γ vérifiant $(*)$. Soient Δ le sous-groupe de Γ engendré par Δ_2 (Δ agit transitivement sur S^q) et Δ_0 l'ensemble des éléments de Δ qui fixent s_0. Alors Δ_0 est la réunion (croissante) des sous-groupes Δ_0^i définis par récurrence comme suit : $\Delta_0^0 = \{1\}$. Si Δ_0^i est défini, on note Δ_2^i l'ensemble des conjugués d'un élément de Δ_2 par un élément de Δ_0^i et Δ_0^{i+1} le groupe engendré par Δ_0^i et les éléments de l'une des deux formes suivantes :*

$$\begin{aligned} &\delta\delta' \quad \textit{avec } \delta, \delta' \in \Delta_2^i \quad \textit{et} \quad |\delta\delta'| = 0\,; \\ &\delta\delta'\delta'' \quad \textit{avec } \delta, \delta', \delta'' \in \Delta_2^i \quad \textit{et} \quad |\delta\delta'\delta''| = 0. \end{aligned}$$

Cette proposition (non essentielle pour la suite) se démontre par la même méthode que la précédente.

1.10. Exemples de sous-groupes Δ de $\Gamma_{q,\ell}$ transitifs sur S^q. Le but de ce travail est de généraliser un certain nombre de travaux se situant dans le sillage de [7].

Ceux-ci traitent de cas particuliers de groupes agissant sur un arbre semi-homogène.

a) Le groupe libre à r générateurs agit simplement transitivement sur X_{2r} (*cf.* [7], [8], [13]).

b) Le produit libre $\mathbb{Z}^{*r} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*s}$ agit simplement transitivement sur X_{2r+s} (*cf.* [1]). D'après [1] ou [14], ces groupes sont les seuls agissant simplement transitivement sur un arbre homogène.

c) Le produit amalgamé $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{*r}$ agit simplement transitivement sur un graphe symétrique (cf. [11]), c'est-à-dire qu'il agit sur $X_{r-1,k-1}$, avec une seule orbite dans S^{r-1}. Les r sous-groupes $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ engendrant ce groupe sont les stabilisateurs de r voisins d'un sommet s d'indice r. Ils permutent chacun transitivement l'ensemble de leurs sommets voisins.

d) Le produit amalgamé $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ qui contient le groupe précédent, agit transitivement sur un graphe symétrique (*cf.* [11]), c'est-à-dire sur $X_{r-1,k-1}$ transitivement sur S^{r-1} et S^{k-1}. Les groupes $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sont les stabilisateurs de deux sommets voisins de $X_{r-1,k-1}$ respectivement d'un sommet d'indice r et d'un sommet d'indice k. Ils permutent chacun transitivement l'ensemble de leurs sommets voisins.

e) On peut trouver dans [13] la classification de tous les groupes agissant sur des arbres. Si on exige que cet arbre soit un arbre semi-homogène $X_{q,\ell}$ et que le groupe Δ agisse simplement transitivement sur S^q et sur S^ℓ, on trouve que le seul exemple est le suivant : $q = \ell$ et Δ est le groupe fondamental du graphe formé de deux sommets et de $q+1$ arêtes joignant ces deux sommets. Le groupe Δ est donc un groupe libre à q générateurs agissant sur l'arbre $X_{q,q}$ qui est le revêtement universel du graphe précédent.

Si $q = 2r-1$ est impair, le groupe libre F à r générateurs agit sur X_q (simplement transitivement sur tous les sommets) et Δ est le sous-groupe de F formé des mots de longueur paire.

f) On peut construire (grâce à la PROPOSITION 1.9) un exemple de groupe discret Δ agissant transitivement sur X_q, qui ne possède pas de sous groupe agissant simplement transitivement sur X_q. Ainsi la démonstration au chapitre 3 de l'irréductibilité de la restriction à Δ de certaines représentations de Γ ne se déduit pas trivialement de la même démonstration dans [1] pour le cas b).

2. Analyse harmonique sur $X_{q,\ell}$

2.1. Noyaux sur $X_{q,\ell}$. — *Un noyau* est une fonction

$$\begin{aligned} P : S\times S &\longrightarrow [0,+\infty] \\ (s,t) &\longmapsto P(s,t). \end{aligned}$$

Si on a deux noyaux P, Q, on définit leur produit de convolution

$$PQ(s,t) = \sum_{u\in S} P(s,u)Q(u,t).$$

Si Q est un noyau, on note Q^q (*resp.* Q^ℓ) le noyau dont la valeur en (s,t) est $Q(s,t)$ si $s\in S^q$ (*resp.* S^ℓ) et 0 sinon. On a donc $Q = Q^q + Q^\ell$.

a) Noyau de GREEN. On arrive à trouver explicitement le noyau de Green G et à démontrer qu'il est fini, grâce à des calculs analogues à ceux de [2].

PROPOSITION 2.1. — *Le noyau de* GREEN *est fini et vaut* $G^\ell + G^q$, *avec*

$$G^\ell(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\ell(q+1)}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \textit{si } s,t \in S^\ell \textit{ et } d(s,t) = 2n \\ \dfrac{q+1}{q\ell - 1}(\ell q)^{-n} & \textit{si } s \in S^\ell,\ t \in S^q \textit{ et } d(s,t) = 2n+1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

$$G^q(s,t) = \begin{cases} \dfrac{q(\ell+1)}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \textit{si } s,t \in S^q \textit{ et } d(s,t) = 2n \\ \dfrac{\ell+1}{\ell q - 1}(\ell q)^{-n} & \textit{si } s \in S^q,\ t \in S^\ell \textit{ et } d(s,t) = 2n+1 \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

b) Noyau de MARTIN associé à P. On veut définir une fonction localement constante sur $\widehat{S}$ prenant la valeur :

$$K_{s,s'}(t) = \frac{G(s,t)}{G(s',t)} \quad \text{pour tout} \quad t \in S.$$

On obtient selon les différents cas :

$$K_{s,s'}(t) = \begin{cases} (\ell q)^{-\delta_t(s,s')/2} & \text{si } (s,s',t) \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \times S^\ell \\ S^\ell \times S^\ell \times S^q \\ S^q \times S^q \times S^q \\ S^q \times S^q \times S^\ell \end{cases} \\ \dfrac{q+1}{q(\ell+1)}(\ell q)^{(-\delta_t(s,s')+1)/2} & \text{si } (s,s',t) \in \begin{cases} S^\ell \times S^q \times S^\ell \\ S^\ell \times S^q \times S^q \end{cases} \\ \dfrac{\ell+1}{\ell(q+1)}(\ell q)^{(-\delta_t(s,s')+1)/2} & \text{si } (s,s',t) \in \begin{cases} S^q \times S^\ell \times S^q \\ S^q \times S^\ell \times S^\ell \end{cases} \end{cases}$$

On prolonge $K_{s,s'}$ sur S par :

$$K_{s,s'}(b) = K_{s,s'}(t)$$

où t est un point d'intersection des géodésiques $[s,b]$ et $[s',b]$. D'où :

$$K_{s,s'}(b) = \begin{cases} (\ell q)^{-\delta_b(s,s')/2} & \text{si } (s,s') \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \\ S^q \times S^q \end{cases} \\ \dfrac{q+1}{q(\ell+1)}(\ell q)^{(-\delta_b(s,s')+1)/2} & \text{si } (s,s') \in S^\ell \times S^q \\ \dfrac{\ell+1}{\ell(q+1)}(\ell q)^{(-\delta_b(s,s')+1)/2} & \text{si } (s,s') \in S^q \times S^\ell \end{cases}$$

Ainsi le noyau de MARTIN se détermine en choisissant un sommet s_0 de référence.

Le noyau de MARTIN est $K_{s_0}(s,b) = K_{s,s_0}(b)$. D'où :

$$K_{s_0}(s,b) = \begin{cases} (\ell q)^{-n/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s,s_0) \in \begin{cases} S^\ell \times S^\ell \\ S^q \times S^q \end{cases} \\ \dfrac{q+1}{q(\ell+1)}(\ell q)^{(-n+1)/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s,s_0) \in S^\ell \times S^q \\ \dfrac{\ell+1}{\ell(q+1)}(\ell q)^{(-n+1)/2} & \text{si } s \in H_n(b) \text{ et } (s,s_0) \in S^q \times S^\ell. \end{cases}$$

Remarques 2.2.

1) Dans le cas $\ell = q$ ou $\ell = 1$, on retrouve les résultats de [2] pour un arbre homogène.

2) Dans le cas $(s,s_0) \in S^q \times S^q$ on retrouve les formules de [11] où $K_{s_0}(\gamma_{s_0},b)$ est noté $P(\gamma,b)$ et appelé noyau de Poisson.

3) Si s, s' appartiennent au même horocycle relatif à b, on a

$$K_{s_0}(s,b) = K_{s_0}(s',b).$$

Si $\ell > 1$ ou $q > 1$, on peut démontrer que la réciproque est vraie, ce qui généralise un résultat de CARTIER [2] dans le cas homogène.

2.2. Fonctions radiales et fonctions sphériques

Définition 2.3. — *Une fonction radiale* sur $X_{q,\ell} \times X_{q,\ell}$ est une fonction invariante par Γ, soit $F(s,t) = F(\gamma s, \gamma t)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'espace vectoriel R des fonctions radiales est une algèbre pour le produit de convolution. Une fonction radiale F s'écrit de la façon suivante :

$$F(s,t) = F_{q,q}(s,t) + F_{q,\ell}(s,t) + F_{\ell,\ell}(s,t) + F_{\ell,q}(s,t)$$

avec

$$F_{q,q}(s,t) = \begin{cases} F(s,t) & \text{si } s,t \in S^q\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_{\ell,\ell}(s,t) = \begin{cases} F(s,t) & \text{si } s,t \in S^\ell\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_{q,\ell}(s,t) = \begin{cases} F(s,t) & \text{si } s \in S^q,\ t \in S^\ell\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_{\ell,q}(s,t) = \begin{cases} F(s,t) & \text{si } s \in S^\ell,\ t \in S^q\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la PROPOSITION 1.2, les fonctions $F_{q,q}$; $F_{q,\ell}$; $F_{\ell,q}$ et $F_{\ell,\ell}$ (restreintes à leur support) ne dépendent que de $d(s,t)$. Ainsi R est la somme directe de quatre espaces vectoriels

$$R = R_{q,q} \oplus R_{q,\ell} \oplus R_{\ell,q} \oplus R_{\ell,\ell}$$

définis par $F \in R_{x,y} \Leftrightarrow F = F_{x,y}$.

PROPOSITION 2.4. — *$R_{q,q}$ et $R_{\ell,\ell}$ sont deux sous-algèbres commutatives et commutant entre elles de R.*

Démonstration. — Il est clair que le produit de convolution de deux éléments de $R_{q,q}$ et $R_{\ell,\ell}$ est zéro.

En utilisant le même genre de calcul que [7] on arrive à démontrer que $R_{q,q}$ est une sous-algèbre commutative engendrée par F^1 où

$$F^1(s,t) = \begin{cases} \big((q+1)\ell\big)^{-1} & \text{si } s,t \in S^q \text{ et } d(s,t) = 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la suite on ne s'occupe que de l'algèbre commutative

$$R' = R_{q,q} \oplus R_{\ell,\ell}$$

et, sauf indication contraire, que de $R_{q,q}$. On choisit $s_0 \in S^q$.

Définition 2.5. — Soit Δ un sous-groupe de Γ transitif sur S^q. *Une fonction radiale* sur Δ est une fonction telle que

$$f(\delta) = f\big(|\delta|\big) \quad \text{où} \quad |\delta| = d(s_0, \delta s_0).$$

On note $\mathcal{R}_\Delta$ l'ensemble des fonctions radiales sur Δ.

COROLLAIRE 2.6.

1. *L'application $F \to f$ de $R_{q,q}$ vers $\mathcal{R}_\Delta$ définie par $f(\delta) = F(s_0, \delta s_0)$ est une bijection entre fonctions radiales.*
2. *Cette bijection conserve le produit de convolution.*

Démonstration. — La première partie est claire. Pour la seconde on utilise les mêmes genres de calculs que [3].

Remarque 2.7. — L'algèbre de convolution des fonctions radiales est donc la même qu'on la considère sur $S^q \times S^q$ ou sur n'importe quel groupe Δ transitif sur S^q.

En particulier, pour $\Delta = \Gamma$, le couple (Γ, K_0) est une paire de GUELFAND où $\Delta = \overset{q+1}{*} \mathbb{Z}_{\ell+1}$.

Tous les résultats d'analyse harmonique sur les fonctions radiales démontrés pour l'un de ces exemples s'étendent donc à tous les cas envisagés ici.

Fonctions sphériques.

Définition 2.8. — Une *fonction sphérique* φ est une fonction radiale telle que :

1. $\varphi(s_0, s_0) = 1$.
2. φ est un vecteur propre de l'opérateur de convolution à droite par F^1.

Remarque 2.9. — Grâce à la *Remarque* 2.7 et au dictionnaire qui nous permet de passer d'un graphe symétrique à un arbre semi-homogène, on trouve :

1. *Les fonctions sphériques sont, pour* $z \neq \frac{1}{2} + (ki\pi)/\log(\ell q)$*, données par la formule*

$$\varphi_z(s_0, s) = c_z h_z(s_0, s) + c_{1-z} h_{1-z}(s_0, s)$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$c_z = \frac{[q + (\ell q)^z][(\ell q)^z - \ell q]}{(q+1)[(\ell q)^{2z} - \ell q]} \quad \textit{et} \quad h_z(s_0, s) = (\ell q)^{-zd(s_0,s)/2}.$$

Pour $z = \frac{1}{2} + (ki\pi/\log(\ell q)$ *et* $k \in \mathbb{Z}$*, elles sont données par la formule*

$$\varphi_z(s_0, s) = \left[1 + \frac{2\ell q + (-1)^k(\ell - 1)\sqrt{\ell q} - \ell(q+1)}{\ell(q+1)} \frac{d(s_0, s)}{2}\right] \times (-1)^{kd(s_0,s)/2} (\ell q)^{-d(s_0,s)/4}.$$

La valeur propre de l'opérateur de convolution associé à φ_z *est*

$$\gamma(z) = \frac{\ell - 1 + (\ell q)^{1-z} + (\ell q)^z}{\ell(q+1)}$$

et, pour $\delta \in \Gamma$ *tel que* $|\delta| = 2$*, on a* $\varphi_z(\delta) = \varphi_z(s_0, \delta s_0) = \gamma(z)$.

2. φ_z *est bornée si et seulement si* $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$.
3. *On a les équivalences*

$$\varphi_z = \varphi_{z'} \iff \gamma(z) = \gamma(z') \iff z = z' \textit{ ou } 1 - z' \textit{ à } 2hi\pi/\log(\ell q) \textit{ près.}$$

4. *On a* $\varphi_z(s_0, s) = \int_B K^z_{s_0}(s, \omega)\, d\mu_{s_0}(\omega)$.

5. *Soit φ_z une fonction sphérique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *φ_z est de type positif;*

b) *$\gamma(z)$ est réel et $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$;*

c) *$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ ou $\mathrm{Im}\, z = k\pi/\log(\ell q)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$.*

2.3. Représentations sphériques. — Soit $E(s)$ l'ensemble des bouts b tels que la géodésique de s_0 à b passe par s.

On note $X_s = X_{E(s)}$ la fonction caractéristique de $E(s)$. Ces fonctions engendrent un espace vectoriel $K(B)$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la représentation π_z de Δ (supposé transitif sur S^q) dans $K(B)$ défini par :

$$\pi_z(\gamma)\xi(\omega) = K^z_{s_0}(\gamma s_0, \omega)\xi(\gamma^{-1}\omega).$$

On note par $\mathbf{1}$ la fonction identiquement égale à 1 sur B. On remarque que $\varphi_z(s_0, \gamma s_0) = \langle \pi_z(\gamma)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\rangle$ où $\langle\ \mid\ \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $(L^2(B), d\mu_{s_0})$.

PROPOSITION 2.10. — *Le sous-espace K_z de $K(B)$ engendré par la fonction $\mathbf{1}$ et l'action de π_z est $K(B)$ l'espace tout entier si et seulement si :*

$$\begin{cases} z \neq 2ik\pi/\log(\ell q), \\ z \neq \big(\log \ell + (2k+1)i\pi\big)/\log(\ell q), \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. En particulier le vecteur $\mathbf{1}$ est cyclique pour la représentation π_z si et seulement si z est différent des valeurs ci-dessus.

Démonstration. — Il suffit d'adapter la démonstration de [11] à notre cas en remarquant que seule la transitivité de Δ sur S^q intervient. On notera que si $z = 2ki\pi/\log(\ell q)$, on a $K^z_{s_0}(\gamma s_0, \omega) = 1$ et donc $K_z = \mathbb{C}\mathbf{1}$.

Si $z = \log \ell + (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$, l'espace K_z est engendré par $\mathbf{1}$ et les fonctions $\ell X_s - X_{s_-}$ pour $s \in S^q$ et $d(s, s_0) > 0$ (on note s_- le sommet de $X_{q,\ell}$ tel que $d(s, s_0) = 1$ et $d(s_0, s_-) = d(s, s_0) - 1$). Il n'est pas dense dans $K(B)$ car son orthogonal pour la norme L^2 contient les fonctions $X_{s'} - X_{s''}$ pour $s', s'' \in S^\ell$ et $s'_- = s''_-$.

COROLLAIRE 2.11. — *Soit la transformation de Poisson définie par $P_z\xi(\gamma) = \langle \pi_z(\gamma^{-1})\xi \mid \mathbf{1}\rangle$ pour tout $\xi \in K(B)$. Si $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou si $z \neq 1 - (\log \ell + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q) = (\log q + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$, alors P_z est injective.*

Démonstration. — La démonstration est la même que celle de [11] en s'appuyant sur la proposition précédente et en notant que l'adjointe de

$\pi_z(\gamma)$ est $\pi_z(\gamma)^* = \pi_{1-\bar{z}}(\gamma^{-1})$ et donc que $P_z\xi(\gamma) = (\xi, \pi_{1-\bar{z}}(\gamma) \cdot \mathbf{1}) = \int_B \xi(\omega) \cdot K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0, \omega)\, d\mu_{s_0}(\omega)$.

Remarque 2.12.

1. La transformation de Poisson applique l'espace K_z sur l'espace des combinaisons linéaires de translatés à droite de la fonction sphérique φ_z. Puisque

$$\begin{aligned}\big(P_z\pi_z(\gamma_i)\mathbf{1}\big)(\gamma) &= \big\langle \pi_z(\gamma^{-1})\pi_z(\gamma_i)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\big\rangle \\ &= \big\langle \pi_z(\gamma^{-1}\gamma_i)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\big\rangle = \varphi_z(\gamma^{-1}\gamma_i).\end{aligned}$$

2. En utilisant le fait que $\varphi_z(\gamma) = \int_B \pi_z(\gamma)\mathbf{1}\, d\mu_{s_0}(\omega)$ et que $K(B)$ est dense dans $L^2(B)$, on prolonge π_z en une *représentation unitaire* dans $(L^2(B), d\mu_{s_0})$ dans le cas $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (quitte à noter par π_z le prolongement) et c'est la *série principale.*

D'autre part pour $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$, $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$ et $k \in \mathbb{Z}$, on sait, d'après le THÉORÈME 2, que φ_z est de type positif, ce qui va nous permettre de prolonger π_z en une représentation unitaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\ddagger$ défini comme suit : pour $\xi \in K_z$ tel que $\xi = \sum_i C_i\pi_z(\gamma_i)\mathbf{1}$, on considère la fonction

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_{i,j} C_i C_j \varphi_z(\gamma_i^{-1}\gamma_j).$$

Alors $\| \ \|_z$ définit une structure préhilbertienne sur K_z et $\mathcal{H}_z$ est le séparé complété de K_z pour $\| \ \|_z$.

Si de plus P_z est injective, $\mathcal{H}_z$ est le complété de K_z pour la norme $\| \ \|_z$. Ce qui correspond à la *série complémentaire* (si $\operatorname{Re} s \neq 0, 1$).

Cas particuliers 2.13.

a) $z = 2ki\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = 1$, $\varphi_z(\gamma) = 1$, alors $K_z = \mathbb{C}\mathbf{1}$ et $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ est la représentation triviale.

b) $z = 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = 1$, $\varphi_z(\gamma) = 1$, alors $K_z = K(B)$; $\operatorname{Im} P_z = \mathbb{C}\varphi_z$, la structure préhilbertienne sur K_z n'est pas séparée et $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ est la représentation triviale.

c) $z = (\log \ell + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$, $\ell \neq q$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$; $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z \neq K(B)$ et P_z est injectif, c'est-à-dire que K_z est séparé pour la structure préhilbertienne.

d) $z = (\log q + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$, $\ell \neq q$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$; $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z = K(B)$, mais P_z n'est pas injectif, la structure préhilbertienne sur K_z n'est pas séparée.

e) $\ell = q$, $z = \frac{1}{2} + (2k+1)i\pi/(2\log q)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma(z) = -1/\ell$, $\varphi_z(\gamma) = (-1/\ell)^{|\gamma|/2}$, alors $K_z \neq K(B)$ et P_z n'est pas injectif. Donc $\mathcal{H}_z$ est un sous-quotient de $L^2(B)$: le quotient de l'adhérence de K_z par l'adhérence du noyau de P_z.

f) En dehors de ces cinq cas, on a $K_z = K(B)$ et P_z est injectif, donc $\mathcal{H}_z$ est soit $L^2(B)$ si $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, soit le complété de $K(B)$ pour $\| \ \|_z$ si $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z = k\pi/\log(\ell q)$, $k \in \mathbb{Z}$.

g) $z = (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$ ou $z = 1 + (2k+1)i\pi/\log(\ell q)$, $\gamma(z) = \big(2(\ell-1)\big)\big(\ell(q+1)\big) - 1$.

Par analogie avec la théorie des groupes de Lie (*cf* [11]), ces cas sont exclus de la série complémentaire (de même les cas a) et b)).

COROLLAIRE 2.14. — *Dans le cas $\Delta = \Gamma$, $\Delta_0 = K_0$. Si $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ou si $\operatorname{Im} z = k\pi/log(\ell q)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, alors la représentation $(\pi_z, \mathcal{H}_z)$ est irréductible.*

Démonstration. — Comme (Γ, K_0) est une paire de GUELFAND, l'ensemble des fonctions sphériques de type positif est équivalent à l'ensemble des représentations sphériques unitaires irréductibles. D'après [6], l'espace de Hilbert associé à φ_z est le complété de l'espace préhilbertien des combinaisons linéaires des translatés à droite de φ_z, on voit donc que c'est bien l'espace que nous venons de construire.

Remarques 2.15.

1. On s'intéresse au chapitre 3 à l'irréductibilité de la restriction de π_z à un sous-groupe Δ de Γ (elle est claire dans les cas a) et b)) et on se restreindra pour cela aux séries principales et complémentaires (c'est-à-dire tous les cas sauf a), b), g)).

2. Considérons le cas d'un arbre homogène X_q. Il correspond au cas d'un arbre semi-homogène avec $\ell = 1$. Les résultats ci-dessus permettent donc de retrouver les formules de [7] et [8], si on se rappelle que les distances dans $X_{q,1}$ sont doubles de celles dans X_q. Mais on peut aussi considérer X_q comme un arbre semi-homogène $X_{q,q}$ (les distances sont alors les mêmes dans X_q et dans $X_{q,q}$). On a donc le sous-groupe $\Gamma_{q,q}$ de $\Gamma_q = \Gamma_{q,1}$ des automorphismes conservant la parité des sommets.

D'après la *Remarque* 1.6, le noyau de MARTIN est le même pour les deux points de vue. L'expression intégrale des fonctions sphériques montre que la fonction sphérique φ_z ne dépend que de l'arbre. On peut d'ailleurs vérifier directement cette égalité des fonctions φ_z pour $X_{q,1}$ et $X_{q,q}$ (en se rappelant le facteur 2 sur les distances). De plus, les représentations π_z dans $K(B)$ sont restrictions l'une de l'autre.

Par contre les opérateurs de convolution $*F^1$ et donc la valeur propre

$\gamma(z)$ sont différents. De plus le COROLLAIRE 2.9 montre que la période de la fonction $z \mapsto \varphi_z$ est $i\pi/\log q$ pour $\Gamma_{q,q}$ et $2i\pi/\log q$ pour Γ_q et qu'il y a plus de fonctions sphériques φ_z de type positif pour $\Gamma_{q,q}$ que pour Γ_q : une représentation de la série principale (*resp.* complémentaire) de Γ_q se restreint à $\Gamma_{q,q}$ en une représentation de la série principale (*resp.* complémentaire), mais deux représentations non isomorphes peuvent avoir des restrictions isomorphes; d'autre part certaines représentations (la moitié) de la série complémentaire de $\Gamma_{q,q}$ ne sont pas des restrictions de représentations de la série complémentaire de Γ_q.

Intéressons-nous maintenant au cas $z_0 = \frac{1}{2} + (2k+1)i\pi/\log q$. La représentation correspondante (série principale) π_{z_0} de Γ_q dans $L^2(B)$ est irréductible (d'après le corollaire ci-déssus avec $\ell = 1$) et, comme on le verra plus tard, sa restriction à un sous-groupe fermé unimodulaire de Γ_q transitif sur X_q est encore irréductible. Par contre d'après le cas particulier e) ci-dessus l'espace engendré par $\pi_{z_0}(\Gamma_{q,q})\mathbf{1}$ n'est pas dense dans $K(B)$, donc la restriction de la représentation π_{z_0} de Γ_q dans $L^2(B)$ à $\Gamma_{q,q}$ (ou à tout sous-groupe de $\Gamma_{q,q}$ unimodulaire transitif en respectant la parité des sommets) ne l'est pas.

Ceci permet de répondre négativement à une question énoncée dans [9].

2.16 *Noyau reproduisant.* — Soit $A_z = \{P_z\xi \mid \xi \in L^2(B)\}$. Dans le cas $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou $z \neq (\log q + (2k+1)i\pi)/\log(\ell q)$ et, du fait que P_z est injective, on définit une norme sur A_z par :

$$\|P_z\xi\| = \|\xi\|_{L^2(B)}.$$

L'espace A_z, muni de cette norme, est un espace de Hilbert. De plus il est évident de voir que :

$$\left|P_z\xi(\gamma)\right| \leq \sup_{\omega\in B}\left|K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0,\omega)\right| \|\xi\|_{L^2(B)} \qquad \forall\gamma\in\Delta.$$

Donc d'après ARONSZAJN–BERGMAN (*cf* YOSIDA [16], p. 96), il existe pour A_z un *noyau reproduisant*, c'est-à-dire une fonction H_z définie sur $\Delta\times\Delta$, telle que pour tout γ' fixé dans Δ :

a) La fonction $\gamma \mapsto H_z(\gamma,\gamma')$ est dans A_z,

b) Pour toute $F \in A_z$, on a $F(\gamma') = \langle F(\gamma) \mid H_z(\gamma,\gamma')\rangle_\gamma$ où le produit scalaire est pris dans A_z sur les deux fonctions de la variable γ.

PROPOSITION 2.17. — *Dans le cas $z \neq 1 + 2ki\pi/\log(\ell q)$ ou $z \neq (\log q + (2ki)i\pi)/\log(\ell q)$*

$$H_z(\gamma,\gamma') = \int_B K_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0,\omega)\overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0,\omega)}\, d\mu_{s_0}(\omega)$$

défini sur $\Delta \times \Delta$ *est un noyau reproduisant sur* A_z.

Démonstration.

a) $\gamma \overset{\Phi}{\longmapsto} H_z(\gamma,\gamma') \in A_z$ car $\Phi(\gamma) = P_z\xi(\gamma)$ avec $\xi(\omega) = \overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0,\omega)}$.

b) Pour toute $F \in A_z$, il existe $f \in L^2(B)$ telle que $F = P_z f$ et d'où $\langle F(\gamma) \mid H_z(\gamma,\gamma')\rangle = \langle F(\gamma) \mid \Phi(\gamma)\rangle = \int_B f(\omega)\overline{\overline{K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0,\omega)}}\, d\mu_{s_0}(\omega) = P_z f(\gamma') = F(\gamma')$.

Remarque 2.18. — Dans le cas $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, on a $H_z(\gamma,\gamma') = \varphi_z(\gamma'^{-1}\gamma)$ pour tout $\gamma,\gamma' \in \Delta$. On obtient ainsi l'analogue au résultat de P. EYMARD dans le cas de $Su(1,1)$ [5].

Démonstration. — Comme

$$H_{s_0}^{1-z}(\gamma s_0,\omega) = \pi_{1-z}(\gamma)\mathbf{1}(\omega), \quad K_{s_0}^{1-z}(\gamma' s_0,\omega) = \pi_{1-z}(\gamma')\mathbf{1}(\omega),$$

on a $H_z(\gamma,\gamma') = \langle \pi_{1-z}(\gamma)\mathbf{1} \mid \pi_{1-z}(\gamma')\mathbf{1}\rangle_{L^2(B)}$ et comme pour $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, π_{1-z} est unitaire dans $L^2(B)$, il vient

$$H_z(\gamma,\gamma') = \langle \pi_{1-z}(\gamma'^{-1}\gamma)\mathbf{1} \mid \mathbf{1}\rangle_{L^2(B)} = \varphi_{1-z}(\gamma'^{-1}\gamma) = \varphi_z(\gamma'^{-1}\gamma)$$

car $\varphi_z = \varphi_{1-z}$.

3. Sous-groupes fermés unimodulaires de Γ transitifs sur X

1. Caractérisation des sous-groupes fermés unimodulaires. On considère un sous-groupe fermé Δ de Γ, ce groupe est donc localement compact. On appelle μ la mesure de Haar à gauche telle que $\mu(\Delta_0) = 1$ (c'est possible puisque Δ_0 est un compact ouvert). On suppose toujours que Δ agit transitivement sur S^q.

PROPOSITION 3.1. — Δ *est unimodulaire si et seulement si il existe une partie* Δ_2 *de* Δ *telle que* Δ_2 *et* Δ_2^{-1} *vérifient la condition* (*) *du* 1.3).

Démonstration. — Considérons S_2/Δ_0. Si $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$, on note $\operatorname{mult}(\bar{s})$ le cardinal de $\bar{s}$ (comme orbite de Δ_0 dans S_2).

Soit $\Delta^2 = \{\delta \in \Delta : |\delta| = 2\}$. Il est stable à gauche et à droite par Δ_0. L'application $\delta \mapsto \delta^{-1}$ induit une bijection involutive sur Δ^2 et, par passage au quotient, une bijection involutive $\Psi : \Delta_0\backslash\Delta^2/\Delta_0 \to \Delta_0\backslash\Delta^2/\Delta_0$ telle que $\bar{\delta} \mapsto \overline{\delta^{-1}}$. L'application $\Delta_0\backslash\Delta^2/\Delta_0 \xrightarrow{\pi} S_2/\Delta_0$ telle que $\delta \mapsto \delta_{s_0}$ est évidemment bijective (puisque Δ est transitif). Alors $\varphi = \pi \circ \Psi \circ \pi^{-1} : S_2/\Delta_0 \to S_2/\Delta_0$ telle que $\overline{\delta s_0} \mapsto \overline{\delta^{-1} s_0}$ est une bijection involutive.

La proposition résulte du lemme suivant :

LEMME. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) Δ *est unimodulaire,*
2) $\operatorname{mult}(\bar{s}) = \operatorname{mult}(\varphi(\bar{s}))$ *pour tout* $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$,
3) *Il existe* $\Delta_2 \subset \Delta$ *tel que* Δ_2 *et* Δ_2^{-1} *vérifient* (*).

Démonstration.

$1 \Leftrightarrow 2$. — Soit θ la fonction module : $\Delta \to \mathbb{R}_+^*$. On a $\theta(\Delta_0) = 1$ et donc θ passe au quotient par $\Delta_0 \backslash \Delta / \Delta_0$.

Démontrer que μ est invariante à droite revient à démontrer que $\theta(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta^2$ (car Δ^2 et Δ_0 engendrent Δ). Or $\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 = \delta^{-1}s_0\} = \Delta_0\delta$ donc $\theta(\delta) = \mu(\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 = \delta^{-1}s_0\})$ et comme $\theta(\delta)$ ne dépend que de la classe de δ dans $\Delta_0 \backslash \Delta^2 / \Delta_0$ on a

$$\theta(\delta) = \frac{1}{\operatorname{mult}(\overline{\delta^{-1}s_0})}\mu\Big(\big\{\delta' \in \Delta \mid \delta'^{-1}s_0 \in \overline{\delta^{-1}s_0}\big\}\Big).$$

Or $\delta'^{-1}s_0 \in \overline{\delta^{-1}s_0} \Leftrightarrow \delta' s_0 \in \varphi(\delta^{-1}s_0)$. Donc

$$\begin{aligned}\theta(\delta) &= \frac{1}{\operatorname{mult}(\overline{\delta^{-1}s_0})}\mu\Big(\big\{\delta' \in \Delta \mid \delta' s_0 \in \varphi(\overline{\delta^{-1}s_0})\big\}\Big)\\ &= \frac{\operatorname{mult}\varphi(\overline{\delta^{-1}s_0})}{\operatorname{mult}(\overline{\delta^{-1}s_0})}.\end{aligned}$$

On a donc bien $\theta(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta^2$ si et seulement si $\operatorname{mult}(\bar{s}) = \operatorname{mult}\varphi(\bar{s})$ pour tout $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$.

$2 \Rightarrow 3$. — Considérons $\Delta_2' \subset \Delta^2$ vérifiant (*) (qui existe puisque Δ est transitif). Alors Δ_2' est réunion disjointe des $\Delta'_{2,\bar{s}} = \{\delta' \in \Delta_2' \mid \delta s_0 \in \bar{s}\}$ pour $\bar{s} \in S_2/\Delta_0$. Par définition l'application $\Delta'_{2,\bar{s}} \to \bar{s}$ telle que $\delta \mapsto \delta s_0$ est une bijection. Donc $|\Delta'_{2,\bar{s}}| = \operatorname{mult}(\bar{s}) = \operatorname{mult}(\varphi(\bar{s})) = h$. Soit alors $\Delta'_{2,\bar{s}} = \{\delta_1, \dots, \delta_h\}$. On définit $\Delta_{2,\bar{s}} = \{\delta_i\delta_{0,i} \mid \delta_{0,i} \in \Delta_0, \delta_i \in \Delta'_{2,\bar{s}}, 1 \leq i \leq h\}$ où les $\delta_{0,i}$ sont choisis de telle façon que l'application $(\Delta_{2,\bar{s}})^{-1} \to \varphi(\bar{s})$ telle que $\delta \mapsto \delta s_0$ soit une bijection. C'est-à-dire que les $\delta_{0,i}^{-1}\delta_i^{-1}$ soient tous différents. C'est possible car $\varphi(\bar{s})$ est une orbite de Δ_0 et les ensembles ont les mêmes cardinaux. Alors $\Delta_2 = \coprod \Delta_{2,\bar{s}}$ et $\Delta_2^{-1} = \coprod (\Delta_{2,\bar{s}})^{-1}$.

$3 \Rightarrow 2$. — Considérons les bijections $\pi_1 : \Delta_2 \to S_2$ et $\pi_2 : \Delta \to S_2$ définies par $\delta \mapsto \delta s_0$ et $\delta \mapsto \delta^{-1}s_0$. On a $\varphi(\overline{\pi_1(\delta)}) = \overline{\pi_2(\delta)}$ et donc $\operatorname{mult}(\bar{s}) = \operatorname{mult}(\varphi(\bar{s}))$.

2. Irréductibilité de π_2.

Remarque 3.2. — Si on regarde la démonstration de l'irréductibilité par IOZZI et PICARDELLO [11], on voit que tout repose sur les faits suivants :

a) $q_{2n}(j,x,y) = 1/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}\,\mu(\{\delta' \in \Delta\,;\ |\delta| = 2n\,;\ |y^{-1}\delta x| = |x|+|y|+2n-2j\})$ a une limite $p_j(x,y)$ quand n tend vers l'infini. Cette limite ne dépend que de $|x|$, $|y|$ et de j. De plus $q_{2n}(j,x,y) - p_j(x,y) = O(q^{-n})$.

b) Les résultats analogues à 2.10 et 2.11.

Pour étudier a), considérons :

$$A_j(n,x,y) = \Big\{\omega : |\omega| = 2n\,;\ |y^{-1}\omega x| = 2n + |x| + |y| - 2j\Big\}.$$

On a $q_{2n}(j,x,y) = 1/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}\,\mu\big(A_j(n,x,y)\big)$.

On peut supposer d'autre part que $n \geq |x| + |y| + 4$ puisqu'on veut estimer $\mu(A_j(n,x,y))$ pour n grand.

On définit aussi pour $u, v \in \Delta_2$ et $k \in \mathbb{N}$ l'ensemble $C_h(u,v)$ des $\omega \in \Delta$ qui satisfont la condition $|\omega| = 2k$, avec $\omega = \omega_{i_1}\dots\omega_{i_h}$ et $\omega_{i_1} = u$, $\omega_{i_h} = v$, $|\omega_{i_j}\omega_{ij+1}| = 4$ pour $1 \leq j \leq h-1$ et $\omega_i \in \Delta_2$.

LEMME 3.3. — *$|C_h(u,v)|/(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}$ converge quand h tend vers l'infini vers une limite L indépendante de u et de v. De plus $|C_k(u,v)|/(q+1)\ell(\ell q)^{h-1} = L + O(q^{-h})$.*

Démonstration. — Nous allons adopter la démonstration dans [8] ou [11] de ce genre de résultat au cas qui nous intéresse.

Comme $|\Delta_2| = (q+1)\ell$, écrivons $\Delta_2 = \{\delta_1, \dots, \delta_{(q+1)\ell}\}$. Considérons la matrice carrée S d'ordre $(q+1)\ell$ dont les coefficients sont donnés par la formule :

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(\delta_i^{-1}s_0, \delta_j s_0) = 4, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\omega = \omega_{i_1}\dots\omega_{i_h} \in (\Delta_2)^h$, on a $\omega \in C_h(u,v)$ ce qui signifie $\omega_{i_1} = u$ et $\omega_{i_h} = v$ ainsi que $S_{i_j,i_{j+1}} \neq 0$ pour $1 \leq j \leq h-1$, ce qui équivaut encore à $\prod_{j=1}^{h-1} S_{i_j,i_{j+1}} = 1$.

Donc, si $u = \delta_{i_1}$ et $v = \delta_{i_h}$, on a

$$\big|C_h(u,v)\big| = \sum_{i_2,\dots,i_h=1}^{(q+1)\ell}\ \prod_{j=1}^{h-1} S_{i_j,i_{j+1}}$$

et donc $|C_h(u,v)|$ est le coefficient $(S^{h-1})_{i_1,i_h}$ de la matrice S^{h-1}.

D'autre part on remarque que la somme des coefficients de la matrice S dans chaque ligne ou dans chaque colonne est ℓq. D'où $\lambda = \ell q$ est une valeur propre pour la matrice S. De plus le vecteur $(1,\dots,1) = \mathbf{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ℓq.

Donc $\mathbb{R}^{(q+1)\ell} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}^\perp$ et $\mathbf{1}^\perp$ est stable par S puisque si $v \in \mathbf{1}^\perp$, alors $v = \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} v_i e_i$ avec $\sum_{i=1}^{(q+1)\ell} v_i = 0$.

$$\begin{aligned}
Sv_i &= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} v_j \\
\sum_{i=1}^{(q+1)\ell} Sv_i &= \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} v_j \\
&= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} v_j \sum_{i=1}^{(q+1)\ell} S_{ij} = \ell q \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} v_j = 0.
\end{aligned}$$

Soit alors $T = S - (1)$ où (1) est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Comme (1) est nulle sur $\mathbf{1}^\perp$, l'action de S sur $\mathbf{1}^\perp$ est la même que celle de T. La somme des modules de coefficients de T dans chaque colonne ou dans chaque ligne est ℓ.

On considère alors la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^{(q+1)\ell}$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le (q+1)\ell} |X_i|$. On a

$$\begin{aligned}
T &= (t_{ij})_{ij}, \quad Y = TX \\
y_i &= \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} t_{ij} X_j \quad \Longrightarrow \quad |y_i| \le \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} |t_{ij}||X_j| \\
&\le \sum_{j=1}^{(q+1)\ell} |t_{ij}| \|X\|_\infty = \ell \|X\|
\end{aligned}$$

donc $|y_i| \le \ell\|X\|$ pour tout $1 \le i \le (q+1)\ell$.

Par conséquent $\|Y\|_\infty \le \ell\|X\|_\infty$ implique $\|T\|_\infty \le \ell$. Or le coefficient $(S^{h-1})_{i_1 i_k}$ est le coefficient sur e_{i_1} de $S^{h-1}e_{i_h}$ (si e_i désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{(q+1)\ell}$). On a $e_{i_h} = 1/((q+1)\ell)\mathbf{1} + v$ avec $v \in \mathbf{1}^\perp$ et $\|v\|_\infty \le 2$ et $S^{h-1}e_{i_k} = (\ell q)^{h-1}/((q+1)\ell)\mathbf{1} + T^{h-1}v$, puis

$$\begin{aligned}
\|S^{h-1}e_{i_h} - \frac{(\ell q)^{h-1}}{(q+1)\ell}\mathbf{1}\|_\infty &\le \|T^{h-1}v\|_\infty \\
&\le \|T\|_\infty^{h-1} \|v\|_\infty .
\end{aligned}$$

Il en résulte la majoration

$$\left| \frac{(S^{h-1})_{i_1,i_h}}{(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}} - \frac{1}{(q+1)^2\ell^2} \right| \le \frac{2\ell^{h-1}}{(q+1)\ell(\ell q)^{h-1}} = O(q^{-h}),$$

ce qui prouve le résultat avec $L = 1/(q+1)^2\ell^2$.

3.4 *Exemples de matrices S.*

1) Soit $\Delta_{2,m} = \{\delta \in \Delta \mid d(\delta s_0, s_m) = 1$ où $s_m \in S^\ell$ et $d(s_0, s_m) = 1\}$. Alors $\Delta_2 = \coprod_{m=1}^{q+1} \Delta_{2,m}$.

Si on suppose que $(\Delta_{2,m})^{-1} = (\Delta_2^{-1})_m = \{\delta' \in \Delta_2^{-1} \mid d(\delta' s_0, s_m) = 1\}$, la matrice S est formée de coefficients égaux à 1 sauf pour des blocs diagonaux $\ell \times \ell$ formés de 0.

Dans ce cas S est une matrice symétrique, trouver $(S^{h-1})_{i_1,i_h}$ revient à diagonaliser S. On retrouve ainsi la démonstration de [11].

2) Si $\Delta_2 = \coprod_{j=1}^{q+1} \Delta_2^j$ et s'il y a une bijection d'ordre deux de :

$$\{1,\ldots,(q+1)\} \to \{1,\ldots,(q+1)\}\ ;\ j \mapsto j'$$

de façon que $(\Delta_2^j)^{-1} = (\Delta_2^{-1})^{j'}$.

On obtient encore une matrice symétrique formée de 1 sauf pour les blocs diagonaux carrés de dimension $\ell \times \ell$ ou $2\ell \times 2\ell$ et de la forme (0_ℓ) ou $\begin{pmatrix} 1_\ell & 0_\ell \\ 0_\ell & 1_\ell \end{pmatrix}$ respectivement.

3) L'exemple 1.10 e) montre que l'on ne peut pas toujours se ramener au cas 2. En particulier S n'est pas toujours symétrique. Cependant dans tous les exemples calculés jusqu'ici elle est diagonalisable.

THÉORÈME 3.5. — *Soit Δ un sous-groupe fermé de Γ, transitif sur S^q et unimodulaire. Alors $q_{2n}(j,x,y)$ a une limite $p_j(x,y)$ quand n tend vers l'infini. De plus cette limite ne dépend que de $|x|$, de $|y|$ et de j et l'on a*

$$q_{2n}(j,x,y) - p_j(x,y) = O(q^{-n}).$$

Démonstration. — Soit $\delta \in \Delta$ avec $|\delta| = 2n$. Ecrivons $\delta = \delta'\delta_0$ où $\delta_0 \in \Delta_0$ et $\delta' = \delta_1 \ldots \delta_n \in (\Delta_2)^n$.

$$y = \delta_1^y \ldots \delta_{|y|/2}^y \delta_0^y; \quad \delta_0^y \in \Delta_0; \quad \delta_i^y \in \Delta_2,$$
$$\delta_0 = \delta_1^x \ldots \delta_{|x|/2}^x \delta_0^x \qquad \text{où} \quad \delta_0^x \in \Delta_0; \quad \delta_i^x \in \Delta_2^{-1}$$

(car Δ_2^{-1} vérifie (*)).

D'après ce qui précède, les δ_i^x ne dépendent que de $\delta_0 x s_0$, donc que de x et de la classe de δ_0 dans le quotient de Δ_0 par le sous-groupe :

$$\Delta_0^{|x|} = \{\delta \in \Delta \mid \delta s = s \text{ si } d(s_0, s) \le |x|\}.$$

Soit $B_n(i_1,i_2) = \{\delta \in \Delta_2 : |\delta| = 2n, |y^{-1}\delta| = 2n + |y| - 2i_2 |\delta x| = 2n + |x| - 2i_1\}$. Alors $A_j(n,x,y)$ est la réunion disjointe des $B_n(i_1,i_2)$

pour $i_1 + i_2 = j$ avec $i \leq |x|$ et $i_2 \leq |y|$. Il suffit donc d'estimer $\mu(B_n(i_1, i_2))/(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}$.

L'hypothèse $|y^{-1}\delta| = 2n + |y| = 2i_2$ se traduit par $d(ys_0, \delta s_0) = 2n + |y| - 2i_2$. Donc selon les cas :

$$\text{si} \quad i_2 = 2j_2 \quad \text{par} \quad \begin{cases} \delta_i = \delta_i^y & \text{pour } i \leq j_2, \\ |\delta_{j_2+1}^{-1}\delta_{j_2+1}^y| = 4 & \text{si } |y| > i_2. \end{cases}$$

$$\text{si} \quad i_2 = 2j_2 + 1 \quad \text{par} \begin{cases} \delta_i = \delta_i^y & \text{pour } i \leq j_2, \\ |\delta_{j_2+1}^{-1}\delta_{j_2+1}^y| = 2. \end{cases}$$

L'hypothèse $|\delta x| = 2n + |x| - 2i_1$ se traduit par $d(xs_0, \delta^{-1}s_0) = d(\delta_0 x s_0, \delta'^{-1}s_0) = 2n + |x| - 2i_1$. Donc selon les cas :

$$\text{si} \quad i_1 = 2j_1 \quad \text{par} \quad \begin{cases} \delta_{n+1-i}^{-1} = \delta_i^x & \text{pour } i \leq i_1, \\ |\delta_{n-j_1}\delta_{j_1+1}^x| = 4 & \text{si } |x| > i_1 \end{cases}$$

$$\text{si} \quad i_1 = 2j_1 + 1 \quad \text{par} \quad \begin{cases} \delta_{n+1-i}^{-1} = \delta_i^x & \text{pour } i \leq i_1, \\ |\delta_{n-j_1}\delta_{j_1+1}^x| = 2. \end{cases}$$

Les conditions ne portent donc que sur δ' et sur $\delta_0' \in \Delta_0/\Delta_0^{|x|}$. Donc

$$B_n(i_1, i_2) = \coprod_{\bar{\delta}_0, u, v} \delta_1^y \ldots \delta_{j_2}^y C_{n-j_1-j_2}(u,v)(\delta_{j_1}^x)^{-1} \ldots (\delta_1^x)^{-1} x \bar{\delta}_0 \Delta_0^{|x|}$$

où la réunion disjointe porte sur $\bar{\delta}_0 \in \Delta_0/\Delta_0^{|x|}$ et les $u, v \in \Delta_2$ vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |\delta_{j_2}^y u| = 4 = |v(\delta_{j_1}^x)^{-1}|, & \\ |u^{-1}\delta_{j_2+1}^y| = 4 & \text{si} \quad i_2 = 2j_2 \quad \text{et} \quad i_2 < |y|, \\ |v\delta_{j_1+1}^x| = 4 & \text{si} \quad i_1 = 2j_1 \quad \text{et} \quad i_1 < |x|, \\ |u^{-1}\delta_{j_2+1}^y| = 2 & \text{si} \quad i_2 = 2j_2 + 1, \\ |v\delta_{j_1+1}^x| = 2 & \text{si} \quad i_1 = 2j_1 + 1. \end{cases}$$

Ainsi $\mu(B_n(i_1, i_2)) = \sum_{\bar{\delta}_0, u, v} |C_{n-j_1-j_1}(u,v)| \, \mu(\Delta_0^{|x|})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(B_n(i_1, i_2))}{(q+1)\ell(\ell q)^{n-1}} = \sum_{\bar{\delta}_0, u, v} \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}} \mu(\Delta_0^{|x|}).$$

Si par exemple $i_1 = 2j_1 + 1$; $i_2 = 2j_2 < |y|$ cette limite est

$$\sum_{\overline{\delta}_0} \ell \times \ell q \times \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}} \mu(\Delta_0^{|x|}) = \ell \times \ell q \times \frac{L}{(\ell q)^{j_1+j_2}}.$$

Tous les autres cas se démontrent de la même façon et on a donc un théorème analogue à celui de [11].

THÉORÈME 3.6. — *Soit Δ un sous-groupe de Γ, transitif sur S_q et unimodulaire. Alors la restriction de π_2 à Δ est irréductible dès que π_z est dans la série principale ou complémentaire et satisfait à $\gamma(z) \neq -1/\ell$ si $\ell \geq q$.*

Remarque. — Pour un groupe Δ discret vérifiant les hypothèses ci-dessus, la réciproque du théorème est également vraie, car si $\gamma(z) = -1/\ell$ et $\ell > q$, alors le coefficient φ_z de π_z est dans $\ell^2(\Delta)$ et donc π_z est réductible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BETTORI (W.) and PAGLIACCI (M.). — Harmonic analysis for groups acting on trees, *Boll. Un. Mat. Ital. A*(6), t. **3-B**, 1984.

[2] CARTIER (P.). — Fonctions harmoniques sur un arbre, *Sympos. Math.*, t. **9**, 1972, p. 203–270.

[3] CHOUCROUN (F.). — Analyse harmonique sur le groupe des automorphismes d'un arbre homogène et application aux groupes libres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **296**, 1983, p. 585–588.

[4] CHOUCROUN (F.). — Groupes opérant simplement transitivement sur un arbre homogène et plongement dans $\mathrm{PGL}_2(Q_p)$, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **298**, 1984, p. 313–315.

[5] EYMARD (P.). — Le noyau de Poisson et la théorie des groupes, *Sympos. Math.*, t. **12**, 1977, p. 107–132.

[6] FARAUT (J.). — Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques, [Analyse harmonique, Nancy 1980], *CIMPA*, Nice 1983.

[7] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Spherical functions and harmonic analysis on free groups, *J. Funct. Anal.*, t. **47**, 1982, p. 281–304.

[8] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Harmonic analysis on free groups, [L.N. in Pure and Applied Mathematics], 1983, M. Dekker, New-York.

[9] FIGA-TALAMANCA (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Restriction of spherical representations of $\mathrm{PGL}_2(Q_p)$ to a discrete subgroup, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **91**, 1984, p. 405–408.

[10] HAAGERUP (U.). — An example of a non nuclear C-algebra wich has the metric approximation property, *Invent. Math.*, t. **50**, 1978, p. 279–293.

[11] IOZZI (A.) and PICARDELLO (M.A.). — Spherical functions on symetric graphs, [Harmonic analysis], *Proceedings Cortona* 1982, Springer LN **992**.

[12] MATSUMOTO (H.). — Représentations irréductibles de certains groupes d'automorphismes d'un arbre demi-homogène, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **290**, 1980, p. 737–740.
[13] SERRE (J.P.). — Arbres amalgames, SL_2, *Astérisque* t. **46**, 1977.
[14] TITS (J.). — Sur le groupe des automorphismes d'un arbre, [Mémoires dédiés à Georges DE RHAM], pp. 188–211. — 1970, Berlin, Springer-Verlag.
[15] OL'SHANSKII (G.I.). — Classification of irreductible representations of groups of automorphisms of Bruhat-Tits trees, *Functional Anal. Appl.*, t. **11**, 1977, p. 26–34.
[16] YOSIDA (K.). — Functional analysis, 4$^{\text{ième}}$ édition, Springer, 1974.