

BULLETIN DE LA S. M. F.

J.-P. ALLOUCHE

M. MENDÈS-FRANCE

A.J. VAN DER POORTEN

Indépendance algébrique de certaines séries formelles

Bulletin de la S. M. F., tome 116, n° 4 (1988), p. 449-454

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_4_449_0

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INDÉPENDANCE ALGÈBRIQUE DE CERTAINES SÉRIES FORMELLES

PAR

J.-P. ALLOUCHE, M. MENDÈS FRANCE
ET A.-J. VAN DER POORTEN (*)

RÉSUMÉ. — Soit $f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k X^k$ une série formelle non constante à coefficients dans un corps fini F de caractéristique p , algébrique sur $F(X)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ des entiers p -adiques. On montre que les séries $f^{\lambda_1}, \dots, f^{\lambda_s}$ sont algébriquement indépendantes sur le corps des fractions rationnelles $F(X)$ si et seulement si $1, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

ABSTRACT. — Let $f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k X^k$ be a non-constant formal power series over a finite field F with characteristic p , algebraic over $F(X)$. Let $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ be p -adic integers. We prove that $f^{\lambda_1}, f^{\lambda_2}, \dots, f^{\lambda_s}$ are algebraically independent over the field of rational functions $F(X)$ if and only if $1, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ are \mathbb{Z} -linearly independent.

1. Un résultat d'indépendance

Soit p un nombre premier et soit F un corps fini de caractéristique p . Pour tout entier p -adique λ ,

$$\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{(i)} p^i \quad 0 \leq \lambda^{(i)} \leq p-1,$$

on définit l'élément $(1+X)^\lambda$ du corps des séries formelles $F((X))$ par :

$$(1+X)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} X^n$$

où

(*) Texte reçu le 5 juin 1987, révisé le 27 octobre 1987.

J.-P. ALLOUCHE et M. MENDÈS FRANCE, Université Bordeaux I, UER de Mathématiques et Informatique, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

A.-J. VAN DER POORTEN, School of Mathematics, Physics, Computing and Electronics, Macquarie University, NSW 2109, Australie.

$$\binom{\lambda}{n} = \prod_{i=0}^{\infty} \binom{\lambda^{(i)}}{n^{(i)}}$$

et où

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n^{(i)} p^i \quad 0 \leq n^{(i)} \leq p-1,$$

(les $n^{(i)}$ sont nuls à partir d'un certain rang).

On rappelle que $(1+X)^\lambda$ est transcendant sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}(X)$, à moins que l'exposant λ soit élément de $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, (voir [3]).

Dans cette note nous étendons ce résultat :

THÉORÈME 1. — *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ des entiers p -adiques. Les séries formelles $(1+X)^{\lambda_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$, sont algébriquement indépendantes sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}(X)$ si et seulement si $1, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .*

Notre preuve s'appuie essentiellement sur des propriétés simples des automates finis (voir paragraphe 3).

2. Réduction et extension

Supposons que $1, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{Z} . Le théorème affirme alors qu'il n'existe aucun polynôme non trivial en les variables $X, (1+X)^{\lambda_1}, \dots, (1+X)^{\lambda_s}$ qui s'annule identiquement. En d'autres termes, aucune somme finie de la forme :

$$b_0(X) + \sum_{i=1}^t b_i(X)(1+X)^{\mu_i}$$

(où les b_i sont dans $\mathbb{F}[X]$ et ne sont pas tous nuls), ne peut s'annuler identiquement. Comme les polynômes $b_i(X)$ peuvent s'exprimer linéairement en fonctions de monômes $(1+X)^d$, l'énoncé du théorème se déduit finalement de l'énoncé suivant (où les μ_i sont des combinaisons linéaires sur \mathbb{Z} des λ_i).

THÉORÈME 1'. — *Si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ sont des entiers p -adiques deux à deux distincts et si a_1, \dots, a_r sont des éléments non nuls du corps \mathbb{F} , alors la série formelle $\sum_{i=1}^r a_i(1+X)^{\mu_i}$ est algébrique sur $\mathbb{F}(X)$ si et seulement si tous les μ_i sont rationnels.*

Nous démontrerons cette assertion au paragraphe 4. Avant d'en présenter la preuve, notons que l'énoncé initial peut être étendu comme suit.

Remarquons d'abord que si $f = f(X) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X^n$ est un élément de $F((X))$, alors f^λ est bien défini pour tout λ dans \mathbb{Z}_p . Le passage de $(1 + X)$ à f calqué sur celui proposé dans [3] permet alors d'énoncer le corollaire (équivalent au THÉORÈME 1) :

COROLLAIRE. — *Soit $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n X^n$ une série formelle non constante à coefficients dans F , et algébrique sur $F(X)$. Alors $f^{\lambda_1}, f^{\lambda_2}, \dots, f^{\lambda_s}$ sont algébriquement indépendants sur $F(X)$ si et seulement si les entiers p -adiques $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .*

3. Un théorème préliminaire

Rappelons qu'une suite $\alpha = (\alpha(n))$, $n = 1, 2, 3, \dots$, est dite p -multiplicative si :

$$\forall n \geq 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \forall r \in [0, p^k - 1] \quad \alpha(np^k + r) = \alpha(np^k)\alpha(r).$$

Ces suites ont été introduites dans la littérature mathématique en 1967 par A.O. GELFOND [2].

Rappelons aussi qu'une suite $\beta = (\beta(n))$, $n = 1, 2, \dots$ est dite p -automatique s'il existe un p -automate qui l'engendre, et que les suites p -automatiques vérifient les trois importantes propriétés suivantes (voir [1]) :

PROPRIÉTÉ 1. — *La suite β est p -automatique si et seulement si l'ensemble des sous-suites $n \rightarrow \beta(np^k + t)$, avec $k \geq 0$ et $t \in [0, p^k - 1]$, est fini.*

PROPRIÉTÉ 2. — *Soit β une suite à valeurs dans le corps fini F de caractéristique p . Alors la suite β est p -automatique si et seulement si la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} \beta(n)X^n$ est algébrique sur $F(X)$.*

PROPRIÉTÉ 3. — *Si β est p -automatique, alors la suite $(\beta(p^n))$ est ultimement périodique.*

Nous nous proposons dans ce paragraphe de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient $\alpha_1 = (\alpha_1(n))$, $\alpha_2 = (\alpha_2(n))$, \dots , $\alpha_s = (\alpha_s(n))$ des suites p -multiplicatives à valeurs dans le corps fini F de caractéristique p . On suppose que ces suites sont linéairement indépendantes sur F . S'il existe des éléments non nuls a_1, \dots, a_s de F tels que la suite $a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s$ soit p -automatique, alors chacune des suites α_i est p -automatique.*

Preuve. — Comme les suites α_i sont indépendantes, il existe des entiers t_1, \dots, t_s tels que le déterminant $\det(\alpha_i(t_j))$ soit différent de 0.

La suite $a_1\alpha_1 + \dots + a_s\alpha_s$ est p -automatique donc l'ensemble de sous-suites

$$\begin{aligned} E &= \left\{ n \mapsto \sum_{i=1}^s a_i \alpha_i(p^k n + t); k \geq 0, 0 \leq t \leq p^k - 1 \right\} \\ &= \left\{ n \mapsto \sum_{i=1}^s a_i \alpha_i(p^k n) \alpha_i(t); k \geq 0, 0 \leq t \leq p^k - 1 \right\} \end{aligned}$$

est fini, donc sont aussi finis les s ensembles

$$E_j = \left\{ n \mapsto \sum_{i=1}^s a_i \alpha_i(p^k n) \alpha_i(t_j); k \geq (\text{Log } t_j) / (\text{Log } p) \right\}.$$

Comme le déterminant $\det(\alpha_i(t_j))$ est non nul, on en déduit la finitude des ensembles

$$F_i = \left\{ n \mapsto \alpha_i(p^k n); k \geq 0 \right\}.$$

Dès lors, comme les α_i sont à valeurs dans un ensemble fini, chaque ensemble de sous-suites

$$n \mapsto \alpha_i(p^k n + t) = \alpha_i(p^k n) \alpha_i(t)$$

est aussi fini quand k parcourt les entiers positifs et t les entiers entre 0 et $p^k - 1$. Les suites α_i sont donc p -automatiques.

4. Preuve du théorème 1'

Ce paragraphe débute par un lemme.

LEMME. — Soient μ_1, \dots, μ_s des entiers p -adiques deux à deux distincts. Alors les suites $\binom{\mu_i}{n}$ sont linéairement indépendantes sur \mathbb{F} .

Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que si μ_1, \dots, μ_s sont deux à deux distincts, on peut trouver un entier n tel que les $\binom{\mu_i}{n}$ soient tous nuls sauf un qui vaille 1.

Posons $\mu_i = \sum_k \mu_i^{(k)} p^k$ avec $0 \leq \mu_i^{(k)} \leq p - 1$. On définit alors:

$$D_0 = \{1, 2, \dots, s\} \quad \text{et} \quad n^{(0)} = \max_{j \in D_0} \mu_j^{(0)},$$

puis si D_k et $n^{(k)}$ sont définis :

$$D_{k+1} = \left\{ j \in D_k; \mu_j^{(k)} = n^{(k)} \right\} \quad \text{et} \quad n^{(k+1)} = \max_{j \in D_{k+1}} \mu_j^{(k+1)}.$$

On remarque que si i est dans D_k , alors j est aussi dans D_k si et seulement si les $k - 1$ premiers chiffres p -adiques de μ_i et μ_j coïncident.

Par construction la suite D_k est décroissante, donc stationnaire :

$$\exists k_0 \exists D \forall k \geq k_0 D_k = D.$$

Comme D_k n'est jamais vide, D ne l'est pas non plus. De plus tous les éléments de D ont tous leurs chiffres p -adiques égaux, donc sont égaux. Par conséquent D est réduit à un élément, soit $D = \{j_0\}$.

L'entier n défini par

$$n = \sum_0^{k_0} n^{(j)} p^j$$

vérifie :

$$\binom{\mu_{j_0}}{n} = \prod_i \binom{\mu_{j_0}^{(i)}}{n^{(i)}} = 1,$$

et pour chaque j différent de j_0 , il y a au moins un indice i tel que $n^{(i)} > \mu_j^{(i)}$, d'où

$$\binom{\mu_j^{(i)}}{n^{(i)}} = 0 \quad \text{et donc} \quad \binom{\mu_j}{n} = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le THÉORÈME 1'. Notons d'abord que pour μ dans \mathbb{Z}_p , la suite $\binom{\mu}{n}$ est p -multiplicative. Soit alors :

$$g = g(X) = \sum_{i=1}^r a_i (1 + X)^{\mu_i} = \sum_{i=1}^r a_i \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu_i}{n} X^n$$

d'où

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} X^n \left(\sum_{i=1}^r a_i \binom{\mu_i}{n} \right).$$

Si g est algébrique sur $\mathbb{F}(X)$, alors la suite

$$n \mapsto \sum_{i=1}^r a_i \binom{\mu_i}{n}$$

est p -automatique. Le THÉORÈME 2 et le LEMME ci-dessus montrent que les r suites $n \mapsto \binom{\mu_i}{n}$ sont p -automatiques. Dès lors les r suites $n \mapsto \binom{\mu_i}{p^n}$ sont ultimement périodiques, ce qui implique $\mu_i \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

Par conséquent si $\sum_{i=1}^r a_i(1+X)^{\mu_i}$ est algébrique, alors les μ_i sont rationnels. La réciproque est immédiate.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, t. **108**, 1980, p. 401–419.
 - [2] GELFOND (A.O.). — Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, *Acta Arith.*, t. **13**, 1967–68, p. 259–265.
 - [3] MENDÈS FRANCE (M.) et VAN DER POORTEN (A.J.). — Automata and the arithmetic of formal power series, *Acta Arith.*, t. **46**, 1986, p. 211–214.
-