BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LÉAUTÉ

Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 46-49
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__46_0>

Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse; par M. H. Léauté.

(Séance du 3 décembre 1880.)

Lorsqu'une corde enroulée sur un cylindre fixe est sur le point de glisser, la relation qui lie la puissance P à la résistance Q est

$$\frac{P}{Q} = e^{fA},$$

A étant l'angle des deux tangentes extrêmes à l'arc embrassé, f le coefficient de frottement au départ, e la base des logarithmes népériens.

Cette formule, qui est rigoureusement exacte quelle que soit la forme du cylindre, suppose seulement que la corde est enroulée suivant une section droite; elle s'établit en écrivant l'équilibre de toutes les forces appliquées à un élément de corde, c'est-à-dire des deux tensions aux extrémités, de la résistance normale du cylindre et du frottement.

La condition d'adhérence à laquelle conduit cette formule

$$\frac{P}{Q} < e^{fA}$$

n'est évidemment pas applicable en toute rigueur au cas où la corde est enroulée sur une poulie qu'elle entraîne, puisque dans ce cas, la corde ayant une certaine vitesse, les forces d'inertie auraient dû intervenir dans les équations d'équilibre. Cependant on l'admet d'une façon générale dans les règles d'établissement des transmissions par courroies, par cordes ou par câbles métalliques.

Cette approximation, qui est suffisante, en pratique, lorsque la transmission ne marche pas très vite, devient inadmissible dans le cas, très fréquent aujourd'hui, des transmissions à grande vitesse. On arrive en effet souvent à faire parcourir au lien 25^{m} et même 32^{m} par seconde; les forces d'inertie sont alors loin d'être négligeables, et le rapport des tensions peut être inférieur à e^{fA} sans que l'adhérence soit assurée.

La remarque qui précède explique certains mécomptes qui se produisent lorsqu'on installe des courroies ou des câbles à grande vitesse; elle montre que, dans ces circonstances, il est indispensable de tenir compte de la force centrifuge pour l'évaluation de la limite supérieure du rapport des tensions. C'est là le but que nous nous proposons dans cette Note.

Soit un élément AB d'une corde enroulée suivant la section droite d'un cylindre circulaire qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire correspondant pour la corde à une vitesse linéaire V. Le glissement est sur le point de se produire de B vers A; T est la tension en B, $T + dT$ la tension en A.

La force centrifuge, qui est ici la seule force d'inertie à considérer, puisqu'il y a équilibre relatif et que le cylindre est animé d'une rotation uniforme, donne sur l'élément AB une résultante $\frac{p}{g}V^2 d\alpha$, p étant le poids de la corde par mètre courant, g l'accélération de la pesanteur et $d\alpha$ l'angle de contingence.

Les deux équations d'équilibre entre les tensions T et $T + dT$, la résistance normale N du cylindre, le frottement fN et la force centrifuge, obtenues en projetant toutes ces forces sur la direction de N et sur celle de fN, sont alors, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$N = \left(T - \frac{p}{g}V^2\right) d\alpha,$$
$$dT = fN.$$

On déduit de là, en éliminant N entre ces deux équations et intégrant,

$$\frac{T_1 - \frac{p}{g}V^2}{T_2 - \frac{p}{g}V^2} = e^{fA}.$$

La condition d'adhérence est donc

$$\frac{T_1 - \frac{p}{g}V^2}{T_2 - \frac{p}{g}V^2} < e^{fA},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{fA} - \frac{p}{g}(e^{fA} - 1)\frac{V^2}{T_2}.$$

Cette relation doit remplacer celle que l'on admettait jusqu'ici :

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{fA}.$$

La condition que nous venons d'établir prouve que le rapport des tensions peut être plus petit que e^{fA} sans que l'adhérence soit assurée et montre qu'il est d'autant plus nécessaire de tenir compte de la vitesse, dans la fixation de ce rapport, que cette vitesse est plus grande et que les tensions sont plus petites.

Remarquons enfin que, le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ devant être plus grand que l'unité, il y a pour chaque tension une limite supérieure de vitesse que l'on ne pourra dépasser :

$$V < \sqrt{\frac{gT_2}{p}}.$$

Tout ce que nous venons de dire est applicable à toutes les transmissions par lien flexible; mais, dans le cas particulier des câbles télodynamiques, la condition d'adhérence est susceptible d'une interprétation importante à indiquer.

Soit, en effet, un câble de portée $2l$. Le mouvement uniforme étant réalisé, il y a équilibre, pour chaque brin, entre la tension, le poids $2pl$ et la force centrifuge $2\frac{p}{g}l\frac{V^2}{\rho}$ (ρ étant le rayon de courbure moyen de l'arc d'un très petit nombre de degrés que forme le brin).

On déduit de là, en projetant toutes les forces sur la verticale,

$$2pl + 2\frac{p}{g}l\frac{V^2}{\rho} = 2T_1\cos\varphi,$$

φ étant l'angle de T_1 et de la verticale.

Mais on a

$$\cos\varphi = \frac{2f_1}{l}, \quad \rho = \frac{l^2}{f_1},$$

en désignant par f_1 la flèche du brin considéré.

L'équation précédente devient dès lors

$$T_1 - \frac{p}{g} V^2 = \frac{pl^2}{f_1};$$

on a, de même,

$$T_2 - \frac{p}{g} V^2 = \frac{pl^2}{f_2},$$

et, par suite, la condition d'adhérence peut s'écrire

$$\frac{f_2}{f_1} < e^{f\lambda}.$$

Dans le cas des câbles, c'est donc le rapport des flèches, et non le rapport des tensions, comme on l'admet d'ordinaire, qui doit être inférieur à $e^{f\lambda}$ pour que le glissement ne puisse se produire.