BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMED ZARRABI

Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité

Bulletin de la S. M. F., tome 118, n° 2 (1990), p. 241-249

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_2_241_0>

Bull. Soc. math. France,
118, 1990, p. 241–249.

SYNTHÈSE SPECTRALE DANS CERTAINES ALGÈBRES DE BEURLING SUR LE CERCLE UNITÉ

PAR

MOHAMED ZARRABI (*)

RÉSUMÉ. — On montre que les ensembles dénombrables fermés du cercle unité Γ sont les seuls ensembles fermés de type ZA^+ qui sont de synthèse spectrale dans les algèbres de Beurling $A_w(\Gamma)$ pour tous les poids multiplicatifs w sur $\mathbb{Z}$ satisfaisant aux conditions $w(n) = 1$ pour $n \geq 0$ et $\overline{\lim}_{n\to-\infty}(\operatorname{Log} w_n)/|n|^{1/2} = 0$.

ABSTRACT. — We prove that countable closed subsets of the unit circle Γ are the only closed ZA^+ sets which satisfy spectral synthesis in the Beurling algebra $A_w(\Gamma)$ for all multiplicative weights w on $\mathbb{Z}$ such that $w(n) = 1$ for $n \geq 0$ and $\overline{\lim}_{n\to-\infty}(\operatorname{Log} w_n)/|n|^{1/2} = 0$.

1. Introduction

Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un poids multiplicatif sur $\mathbb{Z}$ vérifiant les conditions :

$$w(n) = 1 \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et} \tag{1}$$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\operatorname{Log} w_{-n}}{\sqrt{n}} = 0. \tag{2}$$

Soit Γ le cercle unité. Dans l'algèbre de Beurling

$$A_w(\Gamma) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| w_n < +\infty \Big\}$$

où $\hat{f}(n)$ est le n[ième] coefficient de Fourier de f, les points sont des ensembles de synthèse spectrale [1, Proposition 6]. Ces algèbres vérifient la condition de Ditkin (voir paragraphe 3). Il en découle que les

(*) Texte reçu le 18 décembre 1989, révisé le 11 mai 1990.
M. ZARRABI, UFR Mathématiques, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

ensembles fermés dénombrables de Γ vérifient aussi la synthèse spectrale [7, Théorème 7.3, p. 230]. Nous considérons maintenant une partie fermée S de Γ, non dénombrable et de mesure nulle.

Nous montrons (THÉORÈME 3.1) que si $f \in A^+(\Gamma)$ est de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$, pour tous les poids w vérifiant (1) et (2) alors $f \equiv 0$. Il en résulte que si S est de type ZA^+, c'est-à-dire s'il existe une fonction dans $A^+(\Gamma)$ non identiquement nulle et s'annulant sur S, alors il existe un poids w vérifiant (1) et (2) tel que S ne soit pas de synthèse dans $A_w(\Gamma)$. Les ensembles S qui vérifient la condition de Carleson, soit $\int_0^{2\pi} |\operatorname{Log} d(\mathrm{e}^{it}, S)|\,\mathrm{d}t < +\infty$, forment une classe importante d'ensembles de type ZA^+.

Nous donnons à la fin de ce travail une démonstration simple du THÉORÈME 3.1 lorsque S vérifie en plus la condition de Carleson. L'auteur ne sait pas si ce résultat s'étend aux ensembles S de mesure nulle qui ne sont pas de type ZA^+(*cf.* [3, Théorème 8]).

Je tiens à remercier le Professeur J. ESTERLE pour les nombreuses discussions que j'ai eu avec lui, discussions qui sont à l'origine de cet aticle. Je tiens également à remercier le rapporteur pour ses suggestions qui ont notamment contribué à simplifier la démonstration de la PROPOSITION 2.2.

2. Notations et préliminaires

On désigne par $A(\Gamma)$ l'algèbre des fonctions continues sur le cercle unité Γ et vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty, \quad \text{où} \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t, \ n \in \mathbb{Z}.$$

$A^+(\Gamma)$ est la sous algèbre de $A(\Gamma)$ formée des fonctions f vérifiant $\hat{f}(n) = 0$ pour $n < 0$. On dira qu'une suite de nombres réels positifs $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids si elle vérifie la condition : $w_{n+m} \leq w_n w_m$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$. On supposera toujours $w(0) = 1$ et $w(n) \geq 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Une telle suite définit l'algèbre de Beurling

$$A_w(\Gamma) = \Big\{ f \in \mathcal{C}(\Gamma) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| w_n < +\infty \Big\}\cdot$$

Cette algèbre sera munie de la norme $\|f\|_w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| w_n$. Son dual est l'ensemble des suites $T = (T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que la suite $(T_n/w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit bornée. On définit la dualité par : $\langle T, f\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{T}_n \hat{f}(n-1)$. Si w vérifie la condition :

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{Log} w_n}{1+n^2} < +\infty,$$

alors l'algèbre $A_w(\Gamma)$ est régulière [7, p. 118, Exercice 7]. On s'intéressera, essentiellement, aux poids vérifiant la double condition :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} w_n = 1 \text{ pour } n \geq 0, \\ \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\operatorname{Log} w_{-n}}{\sqrt{n}} = 0. \end{cases}$$

Notons que si w vérifie (II) alors $w_{-n} = w_{-n}w_n \geq w_0 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $w_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit I un idéal de $A^+(\Gamma)$. Notons par f le plus grand diviseur intérieur commun à tous les éléments de I [6, p. 85]. La fonction f se décompose en un produit d'une constante c de norme 1, d'un produit de Blaschke B et d'une fonction intérieure singulière J qui s'écrit

$$J(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\mu_I(t)\right)$$

où μ_I est une mesure positive singulière à support dans $h(I) \cap \Gamma$ où $h(I) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f(z) = 0, f \in I\}$, $\mathbb{D}$ désignant le disque unité, soit

$$f(z) = cB(z)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\mu_I(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

La mesure μ_I s'écrit de façon unique comme somme d'une mesure positive discrète, soit δ_I, et d'une mesure continue singulière positive ν_I. Notons par π la surjection canonique de $A^+(\Gamma)$ sur $A^+(\Gamma)/I$ et α la fonction $z \mapsto z$.

PROPOSITION 2.1. — *Si I est un idéal fermé non nul de $A^+(\Gamma)$, avec $h(I) \subset \Gamma$ et $\delta_I = 0$ alors* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\operatorname{Log}^+ \|\pi(\alpha)^{-n}\|}{\sqrt{n}} = 0$.

Preuve. — Ce résultat a été établi par ATZMON [1, preuve de la Proposition 8-b] dans le cas où $I = \{f \in A^+(\Gamma) : f \equiv 0 \text{ sur } E\}$. Le résultat ci-dessus se démontre de façon analogue.

On voit donc que si on pose $w_n = \|\pi(\alpha)^n\|$, $n \in \mathbb{Z}$, alors $w = (w_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est un poids qui vérifie la condition (II).

On note par H^∞ l'ensemble des fonctions analytiques et bornées sur $\mathbb{D}$. Soit J une fonction intérieure sur le disque unité. Soit $f \in J^nH^\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si le facteur de Blaschke B de J n'est pas constant, f admet un zéro d'ordre infini et donc $f \equiv 0$. On a en fait le résultat général suivant, probablement bien connu :

PROPOSITION 2.2. — *Soit J une fonction intérieure, non constante sur $\mathbb{D}$. Si $f \in J^n H^\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f \equiv 0$.*

Preuve. — Soit $F = \bigcap_{n\geq 1} J^n H^\infty$; supposons qu'il existe une fonction non nulle dans F. Le produit de Blashke associé à J est alors nécessairement constant. Notons par μ [resp. ν] la mesure positive singulière qui définit la partie intérieure singulière de f [resp. J]. On a $n\nu \leq \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que ν est nulle et donc J est une constante de module 1.

3. Ensembles et fonctions de synthèse

Soit S un fermé de Γ et w un poids vérifiant (I). Posons

$$I_S^w = \{f \in A_w(\Gamma) : f|_S \equiv 0\} \quad \text{et}$$
$$J_S^w = \{f \in A_w(\Gamma) : \operatorname{Supp} f \cap S = \emptyset\},$$

où $\operatorname{Supp} f$ est le support fermé de f.

Définition 3.1.

(1) S est un ensemble de synthèse spectrale dans $A_w(\Gamma)$ si $\bar{J}_S^w = I_S^w$.

(2) Une fonction $f \in A_w(\Gamma)$ est de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$ s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $A_w(\Gamma)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n s'annule sur un voisinage de S et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_w = 0$.

On voit donc que S est un ensemble de synthèse spectrale dans $A_w(\Gamma)$ si et seulement si toute fonction dans $A_w(\Gamma)$, qui s'annule sur S, est de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$. Il est prouvé dans [1, Proposition 6] que les points sont des ensembles de synthèse spectrale dans $A_w(\Gamma)$, pour tous les poids w vérifiant la condition (II). Ces algèbres vérifient la condition de Ditkin [7, Définition 5.9, p. 225]. En effet, pour $\lambda \in \Gamma$ on pose

$$e_n : z \longmapsto \frac{z-\lambda}{z-\lambda-\dfrac{\lambda}{n}}, \qquad n \geq 1.$$

Un développement en série de Taylor montre que la suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $A^+(\Gamma)$ et donc aussi dans $A_w(\Gamma)$. On a

$$\|(e_n - 1)(\alpha - \lambda)\|_w \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

où α désigne toujours la fonction $z \mapsto z$. Soit $f \in A_w(\Gamma)$. Si $f(\lambda) = 0$ alors $f = \lim_{m\to+\infty} \sum_{|p|\leq m} \hat{f}(p)(\alpha^p - \lambda^p)$. Puisque $\sum_{|p|\leq m} \hat{f}(p)(\alpha^p - \lambda^p)$

est divisible par $\alpha - \lambda$ dans $A_w(\Gamma)$ on a

$$\Big\| e_n\Big(\sum_{|p|\le m} \hat{f}(p)(\alpha^p - \lambda^p)\Big) - \sum_{|p|\le m} \hat{f}(p)(\alpha^p - \lambda^p)\Big\|_w \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} \|fe_n - f\|_w = 0$. Puisque $\{\lambda\}$ est un ensemble de synthèse spectrale dans $A_w(\Gamma)$, il existe alors pour tout $n \ge 1$ un élément u_n dans $A_w(\Gamma)$ tel que $\|e_n - u_n\| \le 1/n$ et $\lambda \notin \operatorname{Supp} u_n$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} \|fu_n - f\|_w = 0$ et $\{\lambda\}$ vérifie la condition de Ditkin. Il découle de ceci, d'après [7, Théorème 7.3, p. 230] que les ensembles fermés et dénombrables sont aussi de synthèse spectrale dans $A_w(\Gamma)$ pour tous les poids w vérifiant la condition (II). Des résultats analogues sont valables sur la droite réelle (voir [6] et [8]).

Le résultat suivant montre que les fermés dénombrables du cercle sont les seuls ensembles ZA^+ fermés de mesure nulle à posséder cette propriété.

THÉORÈME 3.1. — *Soit S un fermé de Γ non dénombrable et de mesure nulle. Si $f \in A^+(\Gamma)$ est de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$ pour tous les poids w vérifiant la condition* (II), *alors $f \equiv 0$.*

Preuve. — Soit μ une mesure positive continue à support dans S (une telle mesure existe toujours d'après un résultat classique de Lebesgue). Soit J la fonction intérieure définie par μ. On a :

$$J(z) = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + \mathrm{e}^{it}}{z - \mathrm{e}^{it}} \mathrm{d}\mu(t)\Big)$$

et J est analytique sur $\mathbb{C} \setminus S$. Soit

$$J(\infty) = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\mu(t)\Big)$$

la limite de $J(z)$ quand $|z| \to +\infty$. On a :

$$J(z) - J(\infty) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| < 1,$$

$$J(z) - J(\infty) = \sum_{n< 0} a_n z^n \quad \text{pour } |z| > 1.$$

On a d'après les inégalités de Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{r^n} &\le \max_{|z|=r} \Big|J\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big| \qquad (n<0,\ r<1) \\ &\le \max_{|z|=r} \Big|\frac{1}{V(z)}\Big| \end{aligned}$$

où
$$V(z) = \exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + \mathrm{e}^{it}}{z - \mathrm{e}^{it}} \mathrm{d}\mu(-t)\Big).$$

Il résulte de [1, Lemme 5.c] que pour toute fonction $f \in H^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon > 0$ tel que $\max_{|z|=r} 1/|f(z)| \geq m_\varepsilon \, \mathrm{e}^{(2\|\delta\|+\varepsilon)/(1-r)}$ où δ est la partie discrète de la mesure singulière définissant le facteur intérieur de f et $\|\delta\|$ est sa variation totale. Comme μ est continue on a :

$$|a_n| \leq m_\varepsilon r^n \mathrm{e}^{\varepsilon/(1-r)} \quad \text{pour tout } n < 0, \;\; \varepsilon > 0 \text{ et } r < 1.$$

Pour $r = 1 - (\varepsilon/|n|)^{1/2}$ on obtient que $|a_n| \leq k_\varepsilon \, \mathrm{e}^{2(\varepsilon/|n|)^{1/2}}$ pour une constante k_ε dépendante uniquement de ε. On en déduit enfin que

$$\varlimsup_{n\to-\infty} \frac{\operatorname{Log}^+ |a_n|}{|n|^{1/2}} = 0.$$

Posons $T = (T_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ avec :

$$T_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \geq 0, \\ -a_n & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Soient pour $n \leq -1$, $\gamma_n = \sup\limits_{m\leq n} \dfrac{\operatorname{Log}^+ |T_m|}{\sqrt{-m}}$ et $v_n = \mathrm{e}^{\gamma_n\sqrt{-n}}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+m} = \mathrm{e}^{\gamma_{n+m}\sqrt{-n-m}} &\leq \mathrm{e}^{\gamma_{n+m}\sqrt{-n}+\gamma_{n+m}\sqrt{-m}} \\ &\leq \mathrm{e}^{\gamma_n\sqrt{-n}}\mathrm{e}^{\gamma_m\sqrt{-m}} \\ &\leq v_n v_m. \end{aligned}$$

Si on pose $w_n = \sup_{n\leq m\leq -1} v_m$ pour $n \leq -1$, $w_n = 1$ pour $n \geq 0$ alors $w = (w_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est un poids. De plus $\operatorname{Log} w_n/\sqrt{-n} = \gamma_{m_n}\sqrt{-m_n}/\sqrt{-n}$ avec $n \leq m_n \leq -1$ pour tout n et on en déduit facilement que w vérifie la condition (II). On voit aussi que T est dans le dual de $A_w(\Gamma)$. Soit $f \in A_w(\Gamma)$. On a $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)\, \mathrm{e}^{in\theta}$. On obtient par un calcul simple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(r\mathrm{e}^{i\theta}) f(\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \big(\bar{J}(\infty) + \bar{a}_0\big)\hat{f}(-1) \\ + \sum_{n\geq 1} \bar{a}_n \hat{f}(n-1)\, r^n \qquad (0 \leq r < 1). \end{aligned}$$

Il vient de cette égalité en faisant tendre r vers 1^- :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(\mathrm{e}^{i\theta}) f(\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{e}^{i\theta} \mathrm{d}\theta = \big(\bar{J}(\infty) + \bar{a}_0\big)\hat{f}(-1) + \sum_{n\geq 1} \bar{a}_n \hat{f}(n-1).$$

On obtient de même :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(re^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta = \bar{J}(\infty)\hat{f}(-1) + \sum_{n\le -1} \bar{a}_n\hat{f}(n-1)\,r^n \quad (r>1),$$

et

$$\lim_{r\to 1+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(re^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta = \bar{J}(\infty)\hat{f}(-1) + \sum_{n\le -1} \bar{a}_n\hat{f}(n-1).$$

On voit donc que

$$\begin{aligned}\langle T,f\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{T}_n\hat{f}(n-1)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta\\ &\qquad - \lim_{r\to 1+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(re^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta.\end{aligned}$$

De plus si $f\in A^+(\Gamma)$, $\int_0^{2\pi} \bar{J}(re^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta = 0$ pour tout $r>1$ et donc

$$\langle T,f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta \quad \big(f\in A^+(\Gamma)\big). \tag{1}$$

Si $f\in A_w(\Gamma)$ est nulle sur un voisinage de S alors $\langle T,f\rangle = 0$. Soit $\bar{J}_S^w$ l'ensemble des fonctions de $A_w(\Gamma)$ qui sont de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$. On obtient par continuité

$$\langle T,f\rangle = 0 \qquad (f\in \bar{J}_S^w). \tag{2}$$

On a alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{J}(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i\theta}d\theta = 0 \qquad \big(f\in A^+(\Gamma)\cap \bar{J}_S^w\big). \tag{3}$$

Si $f\in A^+(\Gamma)\cap \bar{J}_S^w$ alors $\alpha^n f\in A^+(\Gamma)\cap \bar{J}_S^w$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. D'où

$$\int_0^{2\pi} \bar{J}(e^{i\theta})f(e^{i\theta})\,e^{i(n+1)}d\theta = 0 \qquad \big(n\ge 0,\ f\in A^+(\Gamma)\cap \bar{J}_S^w\big). \tag{4}$$

Soit $f\in A^+(\Gamma)\cap \bar{J}_S^w$. Il résulte de (4) qu'il existe $h\in H^\infty$ tel que $\bar{J}f = h$ sur Γ. Sur Γ, $|J| = 1$ p.p. et donc $f = Jh$ p.p. On en déduit que $f = Jh$ sur $\mathbb{D}$ et donc $f\in JH^\infty$.

Prenons maintenant $f \in A^+(\Gamma)$, de synthèse spectrale pour S dans $A_w(\Gamma)$ pour tous les poids w vérifiant la condition (II). Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la mesure $\mu_n = n\mu$; μ_n est une mesure positive continue à support dans S et la fonction intérieure définie par μ_n est J^n. Il résulte de ce qui précède que $f \in J^n H^\infty$ et de la PROPOSITION 2.2 que $f \equiv 0$. Ceci achève la preuve du théorème.

Nous allons donner une démonstration plus simple de ce résultat lorsque S vérifie, en plus, la condition de Carleson :

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}^+ \frac{1}{d(\mathrm{e}^{it}, S)}\, \mathrm{dt} < +\infty,$$

où $d(\mathrm{e}^{it}, S)$ est la distance de e^{it} à S. Soient μ une mesure positive et continue concentrée sur S et J la fonction intérieure définie par μ. D'après [6, Théorème 3.3], il existe

$$\varphi \in A^\infty(\mathbb{D}) = \Big\{ f \text{ analytique sur } \mathbb{D} : f \text{ continue sur } \overline{\mathbb{D}} ; \; f(\mathrm{e}^{it}) \in \mathcal{C}^m(\Gamma),\ m \in \mathbb{N} \Big\},$$

extérieure et telle que $S = Z(\varphi) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : \varphi(z) = 0\}$ et $J^n\varphi \in A^\infty(\mathbb{D})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $A^\infty(\mathbb{D}) \subset A^+(\Gamma)$, l'idéal $I_n = J^n H^\infty \cap A^+$, $n \in \mathbb{N}$, de A^+ est non réduit à $\{0\}$. En outre $h(I_n) = S$ et $\delta_{I_n} = 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$ on note par π_p la surjection canonique de A^+ sur A^+/I_p et on pose $w^{(p)} = (\|\pi_p(\alpha)^n\|)_{n\in\mathbf{Z}}$. D'après la PROPOSITION 2.1, $w^{(p)}$ est un poids vérifiant la condition (II). Considérons l'application

$$\mathcal{O}_p : A_{w^{(p)}}(\Gamma) \to A^+/I_p, \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)\pi_p(\alpha)^n.$$

On a $\mathcal{O}_p|_{A^+} = \pi_p$ ce qui entraîne que $I_p \subset \ker \mathcal{O}_p$ et donc $h(\ker \mathcal{O}_p) \subset h(I_p) = S$. Soit $f \in A^+(\Gamma)$ satisfaisant les hypothèses du THÉORÈME 3.1. La fonction f est aussi de synthèse spectrale dans $A_{w^{(p)}}(\Gamma)$ pour $h(\ker \mathcal{O}_p)$ et puisque $A_{w^{(p)}}(\Gamma)$ est régulière, $f \in \ker \mathcal{O}_p$. On a $\pi_p(f) = \mathcal{O}_p(f) = 0$ d'où $f \in I_p$. D'après la PROPOSITION 2.2, on peut conclure que $f \equiv 0$.

On a rappelé dans l'introduction que si I est un idéal fermé de $A^+(\Gamma)$ tel que $h(I)$ est dénombrable, alors $h(I) \cap \Gamma$ est de synthèse dans $A_w(\Gamma)$ si w vérifie (II). Supposons maintenant que $h(I) \subset \Gamma$, que $h(I)$ est dénombrable et que $\delta_I = 0$, les notations sont celles de la PROPOSITION 2.1. L'argument ci-dessus prouve que $I = \{f \in A^+(\Gamma) : f \equiv 0 \text{ sur } h(I)\}$ puisque d'après la PROPOSITION 2.1 le poids $(\|\pi(\alpha)^n\|)_{n\in\mathbf{Z}}$ vérifie la condition (II). On retrouve ainsi un résultat de BENETT et GILBERT [2]. Cette observation, due à [4], était la motivation de ce travail. Le THÉORÈME 3.1 montre malheureusement que dans le cas où $h(I) \subset \Gamma$ est non dénombrable et $\mu_I = 0$ il faudrait des renseignements beaucoup plus précis que la PROPOSITION 2.1 sur le poids $(\|\pi(\alpha)^n\|)_{n \in \mathbf{Z}}$ pour arriver à conclure que $I = \{f \in A^+(\Gamma) : f \equiv 0 \text{ sur } h(I)\}$ par des arguments de synthèse spectrale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATZMON (A.). — Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, *Acta Math.*, t. **144**, 1980, p. 27–63.

[2] BENETT (C.) and GILBERT (J.E.). — Homogeneous algebras on the circle I, *Ann. Inst. Fourier*, t. **22**, **3**, 1972, p. 1–19.

[3] CARLESON (L.). — Sets of the uniqueness of functions regular in the unit circle, *Acta Math.*, t. **87**, 1952, p. 325–345.

[4] ESTERLE (J.), STROUSE (E.) and ZOUAKIA (F.). — Closed ideals of A^+, *à paraître.*

[5] GURARII (V.P.). — Harmonic Analysis in the spaces with weight, *Trans. Moscow Math. Soc.* , t. **1**, 1979, p. 21–75.

[6] HOFFMANN (K.). — *Banach spaces of analytic functions.* — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[7] KATZNELSON (Y.). — *An introduction to harmonic analysis.* — New-York, Wiley, 1968.

[8] TAYLOR (B.A.) and WILLIAMS (D.L.). — Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, *Can. J. Math. XXII*, t. **6**, 1970, p. 1266–1283.

[9] ZARRABI (M.). — Ensembles de synthèse pour certaines algèbres de Beurling, *Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées*, *à paraître.*