

BULLETIN DE LA S. M. F.

AHMED JEDDI

**Un cas d'indépendance des courants
polaires de $f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m}$**

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 2 (1991), p. 127-139

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_2_127_0

© Bulletin de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UN CAS D'INDÉPENDANCE DES
COURANTS POLAIRES DE $f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m}$**

PAR

AHMED JEDDI (*)

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, nous montrons que si f est un germe en 0 de \mathbb{C}^{n+1} d'une fonction holomorphe appartenant à son idéal jacobien $J_f = (\partial f / \partial z_i)_{0 \leq i \leq n}$, alors les courants polaires de type (1,1) du prolongement méromorphe de $f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m} df \wedge d\bar{f} \wedge \square$ sont linéairement indépendants. Comme application de ce résultat, nous donnons une généralisation du théorème classique de E. Borel.

ABSTRACT. — In this work, we show that for a germ f of holomorphic function at 0 in \mathbb{C}^{n+1} such that f is in its jacobian ideal $J_f = (\partial f / \partial z_i)_{0 \leq i \leq n}$, the polar currents of type (1,1) of the meromorphic extension of $f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m} df \wedge d\bar{f} \wedge \square$ are linearly independent. As application of this result, we give a generalization of the classical E. Borel theorem.

Mots clés : courant, fonction holomorphe, prolongement méromorphe, singularité.

Remerciements

Je remercie le Professeur D. BARLET pour le temps précieux qu'il m'a accordé durant mon séjour à Nancy et pour ses encouragements. Je remercie également le Département de Mathématiques de Nancy I pour son hospitalité et le rapporteur pour ses critiques constructives.

(*) Texte reçu le 17 avril 1990, révisé le 14 janvier 1991.

A. JEDDI, Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, BP 1014, Rabat, Maroc. Adresse actuelle : Université Nancy I, Département de Mathématiques, BP 239, 54506 Vandœuvre les Nancy Cedex.

Introduction

Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe d'une fonction holomorphe telle que $df(0) = 0$. Nous notons également $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor de ce germe (voir [M]). Nous pouvons supposer que sur X on a :

$$\{df = 0\} \subset \{f = 0\}.$$

Dans cette situation, pour tout φ dans l'espace $C_c^{(n,n)}(X)$ des formes C^∞ de type (n, n) à support compact dans X , la fonction $F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi$ admet le développement asymptotique suivant :

$$(I) \quad F_\varphi(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \tilde{F}_\varphi(s) := \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq i \leq r, 0 \leq k \leq n}} T_{p,q}^{i,k}(\varphi) s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} (\text{Log } |s|)^k,$$

où $R = \{u_0 = 0, u_1, \dots, u_r\}$ est une suite finie de nombres rationnels, contenus dans $[0, 1[$, associés à la singularité de f en 0 et où les $T_{p,q}^{i,k}$ sont des courants de type $(1,1)$. Ce résultat est montré par D. BARLET dans [B] et redémontré conjointement par le même auteur et H.M. MAIRE dans [B-M].

La transformation de Mellin complexe permet de voir que les courants polaires de type $(1,1)$ du prolongement méromorphe de

$$f^{\lambda+m} \bar{f}^{\lambda-m} df \wedge d\bar{f} \wedge \square$$

sont justement (à des constantes près) les courants $T_{p,q}^{i,k}$ du développement asymptotique (I).

Notons par θ l'ensemble $\{(i, k, p, q) ; T_{p,q}^{i,k} \neq 0\}$ et par J_f l'idéal jacobien de f . Le but de ce travail est de montrer que sous l'hypothèse :

$$(H) \quad f \in J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \right)_{0 \leq j \leq n},$$

la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ est libre.

Notre démonstration est inspirée de celle donnée par H. RUBENTHALER pour un polynôme homogène à variables réelles (voir [R]). Remarquons que dans le cas où f est à singularité isolée, notre hypothèse (H) est équivalente au fait que f se ramène (par un changement de variables biholomorphe) à un polynôme quasi-homogène (voir [S]).

Notre démarche est la suivante : nous montrons dans le §1 que notre résultat est vrai sous l'hypothèse technique (H'). Dans le §2, nous

montrons que l'hypothèse (H) entraîne l'hypothèse (H'). Enfin, dans le § 3, nous donnons une généralisation du théorème classique de E. BOREL, que nous établissons par un argument d'algèbre. Nous donnons également dans le § 3 une autre démonstration de cette généralisation qui utilise un critère de surjectivité entre espaces de Fréchet. Cela nécessite une estimation des ordres des courants $T_{p,q}^{i,k}$ (LEMME 3.3), que nous établissons en utilisant un résultat dû à D. BARLET (voir Appendice).

1. Indépendance linéaire des courants $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ sous l'hypothèse (H').

Rappelons quelques résultats de [B-M].

Pour n un entier naturel non nul et une suite finie de nombres rationnels $R = \{u_0 = 0, u_1, \dots, u_r\}$ dans $[0, 1[$, on note :

$$I(R, n) = \{(u_i, k, p, q) \in R \times \mathbb{N}^3 ; 0 \leq k \leq n\}.$$

a) On note par $ASY_{R,n}(\mathbb{C}^*)$ l'espace vectoriel formé par les fonctions $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- i) g est C^∞ sur \mathbb{C}^* ;
- ii) Le support de g est borné ;
- iii) $g(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \sum_{(u_i, k, p, q) \in I(R, n)} a_{p,q}^{i,k} s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} (\text{Log } |s|)^k, a_{p,q}^{i,k} \in \mathbb{C}.$

b) On note par $MERO_{R,n}(\mathbb{C} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel formé par les fonctions méromorphes $F : \mathbb{C} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

i') L'ensemble des pôles de F est contenu dans

$$\bigcup_{0 \leq i \leq r} \{(\lambda, m) \in \mathbb{C} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z} ; -(\lambda + u_i + |m|) \in \mathbb{N}\}.$$

ii') Il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\sup_{\substack{\sigma > -N, \tau \in \mathbb{R}, \\ m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \sigma^2 + \tau^2 \geq N^2 + 1}} A^{-2\sigma} (1 + |\tau| + |m|)^N |F(\sigma + i\tau, m)| < +\infty.$$

Pour tout $g \in ASY_{R,n}(\mathbb{C}^*)$, la fonction :

$$\lambda \in \mathbb{C}_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} ; \text{Re } \lambda > 0\} \mapsto \frac{1}{2} \sqrt{-1} \int_{\mathbb{C}_0} s^{\lambda+m-1} \bar{s}^{\lambda-m-1} g(s) ds \wedge d\bar{s}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , qui est un élément de $\text{MERO}_{R,n}(\mathbb{C} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z})$, qu'on note par M_g . La transformation de Mellin ainsi obtenue :

$$M : \text{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \text{MERO}_{R,n}(\mathbb{C} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}), \\ g \mapsto M_g$$

est un isomorphisme.

Soit $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe

$$f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0) \quad (n \geq 1)$$

de fonction holomorphe telle que $df(0) = 0$. Ceci veut dire que X est l'intersection d'une boule $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ assez petite avec l'image réciproque d'un disque assez petit $D(0, \eta)$, l'ouvert X est de Stein contractible et la fonction f induit une fibration C^∞ localement triviale de $X - f^{-1}(0)$ sur $D^* = D - \{0\}$. Dans cette situation, il existe une suite finie R telle que la fonction $F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi$ soit dans $\text{ASY}_{R,n}(\mathbb{C}^*)$, pour toute forme φ dans $C_c^{(n,n)}(X)$. Le fait que $df(0) = 0$ implique que la suite R contient d'autres rationnels que 0; la preuve de cette assertion est due à D. BARLET (voir sa conférence[†]). La transformation de Mellin de F_φ est donnée par le prolongement méromorphe :

$$M_{F_\varphi}(\lambda, m) = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \int_X f^{\lambda+m-1} \bar{f}^{\lambda-m-1} df \wedge d\bar{f} \wedge \varphi.$$

Nous notons par $B_{p,q}^{i,k}$ le courant de type $(1,1)$ qui est donné par le coefficient de $(\lambda + u_i + \frac{1}{2}(p+q))^{-k}$ dans le développement de Laurent de M_{F_φ} au point $(-u_i - \frac{1}{2}(p+q), -\frac{1}{2}(p-q))$. On a la relation :

$$B_{p,q}^{i,k} = 2\pi(-1)^{k-1}(k-1)! 2^{-k} T_{p,q}^{i,k-1}.$$

Considérons l'hypothèse suivante :

(H') Pour tout ouvert relativement compact $\Omega \subset X$, il existe un voisinage ouvert U de $1 \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant la condition suivante :

$\forall \xi \in U$, il existe $\xi_* : C_c^{(n,n)}(\Omega) \rightarrow C_c^{(n,n)}(X)$, linéaire vérifiant

$$\xi_*(B_{p,q}^{i,k}(\varphi)) = \xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{k \leq h \leq n+1} \frac{(\log |\xi|^{-2})^{h-k}}{(h-k)!} B_{p,q}^{i,h}(\varphi),$$

pour toute forme φ dans $C^{(n,n)}(\Omega)$, $\forall (i, k, p, q)$.

[†] Monodromy and poles of $\int_X |f|^{2l}$. Complex Analysis and Algebraic Geometry. Göttingen (1985), Lectures Notes 1194.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Sous l'hypothèse (H'), la famille des courants $(T_{p,q}^{i,k})_{i,k,p,q \in \theta}$ est libre.*

Démonstration. — Nous allons utiliser les courants $B_{p,q}^{i,k}$. Introduisons l'ensemble :

$$\tilde{\theta} = \{(i, k, p, q) \in [0, r] \times [1, n + 1] \times \mathbb{N}^2 ; B_{p,q}^{i,k} \neq 0\}$$

et posons

$$k(i, p, q) = \max\{h \in [1, n + 1] ; (i, h, p, q) \in \tilde{\theta}\},$$

pour $(i, p, q) \in \text{pr}_2(\tilde{\theta})$, où pr_2 désigne la projection de $\tilde{\theta}$ sur $[0, r] \times \mathbb{N}^2$.

Soit F une partie finie de $\tilde{\theta}$ telle que l'on ait :

$$\sum_{(i,k,p,q) \in F} a_{p,q}^{i,k} B_{p,q}^{i,k} = 0, \quad a_{p,q}^{i,k} \in \mathbb{C}.$$

En posant au besoin $a_{p,q}^{i,k} = 0$, on peut supposer que $(i, k, p, q) \in F$ pour tout $k \leq k(i, p, q)$ dès que $(i, p, q) \in \text{pr}_2(F)$. L'hypothèse (H') entraîne (en utilisant la linéarité de ξ_*) que pour tout φ dans $C_c^{(n,n)}(\Omega)$, on a :

$$\sum_{(i,k,p,q) \in F} a_{p,q}^{i,k} \xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{k \leq h \leq k(i,p,q)} \frac{(\log |\xi|^{-2})^{h-k}}{(h-k)!} B_{p,q}^{i,h}(\varphi) = 0, \quad \forall \xi \in U.$$

Comme le membre de gauche est une fonction analytique réelle de $\xi \in \mathbb{C}^*$, cette relation est vraie pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$. Puisque la famille de fonctions sur \mathbb{C}^* donnée par $\xi \mapsto \xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} (\log |\xi|)^k$ est libre (cf. remarque (1.3) de [B-M]), il vient, pour tout $(i, p, q) \in \text{pr}_2(F)$:

$$\begin{cases} a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0, \\ a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)-1}(\varphi) + a_{p,q}^{i,2} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0, \\ \dots \\ a_{p,q}^{i,1} B_{p,q}^{i,1}(\varphi) + a_{p,q}^{i,2} B_{p,q}^{i,2}(\varphi) + \dots + a_{p,q}^{i,k(i,p,q)} B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) = 0 \end{cases}$$

pour tout $\varphi \in C_c^{(n,n)}(\Omega)$.

Ce système est de Cramer pour $(a_{p,q}^{i,k})_{1 \leq k \leq k(i,p,q)}$ si $B_{p,q}^{i,k(i,p,q)}(\varphi) \neq 0$, or on peut choisir Ω pour qu'il existe de telles φ , puisque $B_{p,q}^{i,k(i,p,q)} \neq 0$. Finalement, on a $a_{p,q}^{i,k} = 0, \forall (i,p,q) \in \text{pr}_2(F), \forall k \in [1, k(i,p,q)]$. Nous avons ainsi fini la démonstration du THÉORÈME 1.1. \square

2. L'hypothèse (H) entraîne l'hypothèse (H').

Rappelons que notre hypothèse (H) est le fait que f soit dans son idéal jacobien $J_f = (\partial f / \partial z_i)_{0 \leq i \leq n}$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe une famille $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ des fonctions holomorphes sur X , telle que

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} f(z).$$

Ceci veut dire que si l'on note W le champ de vecteurs $\sum_{i=0}^n a_i(z) \partial / \partial z_i$, on a $W(f) = f$.

On considère le flot complexe associé à W . Les courbes intégrales :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \gamma_z(t) = W(\gamma_z(t)), & t \in \mathbb{C}, \\ \gamma_z(0) = z, \end{cases}$$

donnent, pour tout ouvert relativement compact Ω de X contenant 0, un difféomorphisme

$$\Gamma_t : \Omega \xrightarrow{\sim} \Gamma_t(\Omega) \subset X, \Gamma_t(z) = \gamma_z(t)$$

pour tout $|t| < \alpha$, α réel petit (voir par exemple [S]).

LEMME 2.1. — *Pour tout ouvert relativement compact Ω de X contenant 0, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ autour de 1 tel que pour $\xi \in U$, on ait un difféomorphisme :*

$$D_\xi : \Omega \xrightarrow{\sim} D_\xi(\Omega) \subset X$$

vérifiant :

- i) $f(D_\xi(z)) = \xi^{-1} f(z)$;
- ii) $D_\xi\{f = 0\} \subset \{f = 0\}$.

Démonstration. — Pour $|t| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\Gamma_t(z)) &= \langle df(\Gamma_t(z)), W(\Gamma_t(z)) \rangle \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial f(\Gamma_t(z))}{\partial z_i} a_i(\Gamma_t(z)) = f(\Gamma_t(z)), \end{aligned}$$

d'où $f(\Gamma_t(z)) = e^t f(z)$.

Il suffit maintenant de prendre $U = \{\text{expt}, |t| < \alpha\}$ et $D_\xi = \Gamma_{-\text{Log } \xi}$. \square

Nous sommes en mesure de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *L'hypothèse (H) entraîne l'hypothèse (H').*

Démonstration. — L'application ξ_* est la transposée de l'application linéaire qui, à φ dans $C_c^{(n,n)}(\Omega)$, associe $\varphi_\xi = \varphi \circ D_{\xi^{-1}}$ dans $C_c^{(n,n)}(X)$. On a donc par définition :

$$\langle \xi_*(B_{p,q}^{i,k}), \varphi \rangle = \langle B_{p,q}^{i,k}, \varphi_\xi \rangle,$$

et

$$M_{F_{\varphi_\xi}}(\lambda, m) = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \int_X f^{\lambda+m-1} \bar{f}^{\lambda-m-1} df \wedge d\bar{f} \wedge \varphi \circ D_{\xi^{-1}}.$$

Précisons que pour $z \notin D_\xi(\text{support}(\varphi))$, on a $\varphi \circ D_{\xi^{-1}}(z) = 0$, ce qui donne :

$$\text{support}(\varphi_\xi) \subset D_\xi(\text{support}(\varphi)).$$

Effectuons le changement de variables $z' = D_{\xi^{-1}}(z)$. On obtient :

$$\begin{aligned} & M_{F_{\varphi_\xi}}(\lambda, m) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-1} \int_{\text{support}(\varphi)} (f(D_\xi))^{\lambda+m-1} (\bar{f}(D_\xi))^{\lambda-m-1} df(D_\xi) \wedge d\bar{f}(D_\xi) \wedge \varphi. \end{aligned}$$

La propriété $f(D_\xi(z)) = \xi^{-1} f(z)$ entraîne que

$$M_{F_{\varphi_\xi}}(\lambda, m) = \xi^{-(\lambda+m)} \bar{\xi}^{-(\lambda-m)} M_{F_\varphi}(\lambda, m).$$

Comme la fonction holomorphe (invertible) $|\xi|^{-2\lambda}$ admet le développement en série entière suivant, au voisinage de $\lambda_0 = -u_i - \frac{1}{2}(p+q)$,

$$\xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(\text{Log } |\xi|^{-2})^\ell}{\ell!} (\lambda - \lambda_0)^\ell,$$

le coefficient de $(\lambda + u_i + \frac{1}{2}(p+q))^{-k}$, $1 \leq k \leq n+1$, dans le développement de Laurent de $M_{F_{\varphi_\xi}}$ au point $(-u_i - \frac{1}{2}(p+q), -\frac{1}{2}(p-q))$, est égal à :

$$\xi^{u_i+p} \bar{\xi}^{u_i+q} \sum_{\ell-h=-k} \frac{(\text{Log } |\xi|^{-2})^\ell}{\ell!} B_{p,q}^{i,h}(\varphi).$$

La proposition est ainsi établie. \square

3. Application : une généralisation du théorème classique de E. Borel.

Rappelons que l'isomorphisme $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]] \xrightarrow{\sim} C_0^\infty / I_0^\infty$ (Théorème classique de E. BOREL), où I_0^∞ désigne l'idéal des germes plats en 0, permet de construire pour toute série formelle $S \in \mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ un germe de fonction C^∞ qui admet S comme série de Taylor à l'origine. Nous nous proposons de généraliser ce résultat comme suit :

THÉORÈME 3.1. — *Supposons que la famille des courants $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ soit libre (ce qui est le cas sous l'hypothèse (H)). Alors pour toute suite de nombres complexes $(a_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$, il existe une forme φ dans $C_c^{(n,n)}(X)$ telle que $T_{p,q}^{i,k}(\varphi) = a_{p,q}^{i,k}, \forall (i, k, p, q) \in \theta$.*

Démonstration. — Soit K un compact de X tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. Posons

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{\mathcal{M}}_K = \{ \widetilde{F}_\varphi ; \varphi \in C_0^{(n,n)}(K) \},$$

où $C_0^{(n,n)}(K) = \{ \varphi \in C_c^{(n,n)}(X) ; \text{support}(\varphi) \subset K \},$

et $\widetilde{\mathcal{M}}^\infty = \{ \widetilde{F}_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}} ; T_{p,q}^{i,k}(\varphi) = 0, \forall (i, k, p, q) \in \theta \}$

(espace des développements asymptotiques plats) et $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} / \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$, alors l'espace vectoriel \mathcal{M} peut être muni d'une structure de module sur l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$, par la multiplication :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[s, \bar{s}]] \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (S, \widetilde{F}_\varphi) &\mapsto S \cdot \widetilde{F}_\varphi = \widetilde{F}_{f^*(g) \cdot \varphi}, \end{aligned}$$

où g est le germe en 0 d'une fonction C^∞ , dont la série de Taylor est S . La multiplication est bien définie puisque l'on a $\widetilde{g}\widetilde{F}_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$ si $g \in I_0^\infty$ ou si $\widetilde{F}_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$.

En fait, \mathcal{M} est un sous-module du module de type fini :

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\substack{0 \leq i \leq r \\ 0 \leq k \leq n}} \mathbb{C}[[s, \bar{s}]] |s|^{2u_i} (\text{Log } |s|)^k.$$

Le module \mathcal{M} est de type fini puisque $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ est noéthérien. Si \mathfrak{M} désigne l'idéal maximal (s, \bar{s}) , le module \mathcal{M} est complet pour la topologie \mathfrak{M} -adique puisque $\mathbb{C}[[s, \bar{s}]]$ est local (donc de Zariski).

D'autre part, une application du lemme d'Artin-Rees permet de voir que la filtration \mathfrak{M} -adique sur \mathcal{M} est équivalente à la filtration par les :

$$\mathcal{M}^{(\nu)} = \{ \tilde{F}_\varphi \in \mathcal{M} ; T_{p,q}^{i,k}(\varphi) = 0, p+q \leq \nu \},$$

qui est en fait la trace de la filtration \mathfrak{M} -adique de \mathcal{N} sur \mathcal{M} . Il existe donc un entier naturel $d \neq 0$ tel que $\mathcal{M}^{(d+N)} \subset \mathfrak{M}^N \mathcal{M}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ (voir [Z-S]).

Soit maintenant une suite de nombres complexes $(a_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$; si N est un entier naturel, on peut trouver φ_N , telle que :

$$T_{p,q}^{i,k}(\varphi_N) = a_{p,q}^{i,k}, \quad p+q \leq N+d.$$

Ceci est dû au fait que la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{p+q \leq N+d}$ est libre. Ainsi on a :

$$(*) \quad \tilde{F}_{\varphi_N}(s) - \sum_{p+q \leq n+d} a_{p,q}^{i,k} s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} (\text{Log } |s|)^k \in \mathfrak{M}^{N+1} \mathcal{M},$$

puisque $\mathcal{M}^{(N+1+d)} \subset \mathfrak{M}^{N+1} \mathcal{M}$. Considérons la suite $(\tilde{F}_{\varphi_N})_{N \in \mathbb{N}}$; elle est de Cauchy à cause de (*). Le module \mathcal{M} étant complet, elle converge vers un élément de \mathcal{M} (encore à cause de (*)), qui n'est autre que le développement formel fixé à l'avance :

$$\sum_{(i,k,p,q) \in \theta} a_{p,q}^{i,k} s^p \bar{s}^q |s|^{2u_i} (\text{Log } |s|)^k.$$

La démonstration du théorème est terminée. \square

Le théorème précédent peut être établi par un critère de surjectivité entre espaces de Fréchet (Théorème 1.7, [T]), au lieu des arguments d'algèbre donnés ci-dessus. En fait, il découle du résultat plus général qui est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions linéairement indépendantes sur un ouvert U de \mathbb{R}^p et soit K un compact de U tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ordre}_K T_n = +\infty$. Alors l'application linéaire continue :

$$u : C_0^\infty(K) \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad u(g) = (T_n(g))_{n \in \mathbb{N}}$$

est surjective.

Démonstration. — Les espaces $C_0^\infty(K)$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ étant munis de leurs topologies naturelles d'espaces de Fréchet, nous savons que (cf. Théorème 17.1

de [T]) : u est surjective si et seulement si ${}^t u$ est injective et $\text{Im } {}^t u = (\text{Ker } u)^\perp$. Rappelons que si a appartient au dual de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ alors a est une suite finie de nombres complexes (a_n) et ${}^t u(a) = \sum a_n T_n$. L'injectivité de ${}^t u$ résulte immédiatement de l'indépendance linéaire des distributions T_n . Pour vérifier la deuxième condition, il suffit de montrer que $\text{Im } {}^t v$ est faiblement fermé, puisque $(\text{Ker } v)^\perp$ est la fermeture (faible) de $\text{Im } {}^t v$. D'après un résultat de Banach, il suffit de voir que son intersection avec le polaire de tout voisinage de $0 \in C_0^\infty(K)$ est faiblement fermée. On peut se contenter d'examiner les voisinages du type :

$$U = \{ \varphi \in C_0^\infty(K) ; \sup_{|\alpha| \leq m, x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \leq \varepsilon \},$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ sont fixés. On a :

$$U^0 = \{ T \in (C_0^\infty(K))' ; \sup_{\varphi \in U} |\langle T, \varphi \rangle| \leq 1 \}.$$

Donc U^0 est formé de distributions d'ordre au plus k . Par conséquent, $\text{Im } {}^t u \cap U_k^0$ est contenue dans un espace vectoriel de dimension finie, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ordre}_K T_n = +\infty$, il en résulte qu'elle est faiblement fermée. \square

Dans notre situation, nous avons seulement à expliquer comment établir la croissance des ordres (sur un voisinage compact de 0) des courants $T_{p,q}^{i,k}$ en fonction de (p, q) pour déduire le THÉORÈME 3.1 de la PROPOSITION 3.2. Pour ce faire, donnons la définition suivante : nous dirons qu'un courant $T \in (C_0^{(n,n)}(K))'$ (K étant un compact de X tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$) est *minimal* si

$$fT = 0 \quad \text{et} \quad \bar{f}T = 0.$$

Notons par Σ'_K le sous-espace vectoriel de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ qui est engendré par la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ et par Σ_K le sous-espace de Σ'_K engendré par les courants minimaux. Nous donnons en appendice une démonstration du fait que Σ_K est de dimension finie (sans hypothèse sur la singularité). Il y a donc un nombre fini de courants minimaux $T_{p,q}^{i,k}$, puisqu'ils sont linéairement indépendants ! Notons par M l'entier naturel

$$\max \{ p + q ; T_{p,q}^{i,k} \text{ minimal}, (i, k, p, q) \in \theta \}.$$

On a le lemme suivant :

LEMME 3.3. — *L'ordre du courant $T_{p,q}^{i,k}$, $(i, k, p, q) \in \theta$, sur le compact K , est au moins égal à $p + q - M - 1$ dès que $p + q \geq M + 1$.*

Démonstration. — L'identité $f^a \bar{f}^b T_{p,q}^{i,k} = T_{p-a, q-b}^{i,k}$ pour a et b dans \mathbb{N} , permet de construire un courant minimal $T_{p,q}^{i,k} \neq 0$ tel que :

- i) $p' \leq p$ et $q' \leq q$;
 ii) $f^{p-p'} \bar{f}^{q-q'} T_{p,q}^{i,k} = T_{p',q'}^{i,k}$.

Soit $\varphi \in C_0^{(n,n)}(K)$ une forme telle que $T_{p',q'}^{i,k}(\varphi) \neq 0$. On a $T_{p,q}^{i,k}(\Psi) \neq 0$ si $\Psi = f^{p-p'} \bar{f}^{q-q'} \varphi$. Il est clair que Ψ et ses dérivées d'ordre inférieur à $p+q-p'-q'-1$ sont nulles sur la fibre singulière $\{f=0\}$ (qui contient le support de $T_{p,q}^{i,k}$). Il vient alors que l'ordre de $T_{p,q}^{i,k}$ sur K est au moins égal à $p+q-p'-q'-1 \geq p+q-M-1$. Le lemme est ainsi établi. \square

REMARQUE 3.4. — On peut établir des résultats analogues à ceux de cet article pour un germe analytique $f : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, pour les développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur la trace de la fibre de f sur une composante connexe de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; f(x) \neq 0\}$ ou sur \mathbb{R}^{n+1} entier. Plus précisément, si f appartient à son idéal jacobien : $f = \sum_{i=0}^n a_i \partial f / \partial x_i$ où les a_i sont des fonctions analytiques (à variables réelles), on démontre des résultats analogues aux THÉORÈME 1.1, PROPOSITION 2.2 et THÉORÈME 3.1.

Nous terminons cet article par la question suivante :

QUESTION. — Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à singularité isolée. Supposons que la famille des courants $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ soit libre. Ceci entraîne-t-il que le réseau de Gauss-Manin est saturé ?

La réponse à cette question permettrait probablement d'éclaircir le cas où l'hypothèse (H) n'est pas satisfaite. Nous ne disposons pas d'exemple où ces courants sont liés.

Appendice

Nous donnons ci-dessous un résultat, sur le module des développements asymptotiques, dû à D. BARLET.

Soit K un compact de X , tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$, considérons $\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} / \widetilde{\mathcal{M}}^\infty$ (voir début de la démonstration du THÉORÈME 3.1). Notons par Σ'_K le sous-espace vectoriel de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ qui est engendré par la famille $(T_{p,q}^{i,k})_{(i,k,p,q) \in \theta}$ et par Σ_K le sous-espace engendré par les courants minimaux de Σ'_K . Rappelons qu'un courant T de $(C_0^{(n,n)}(K))'$ est dit minimal si $fT = 0$ et $\bar{f}T = 0$.

PROPOSITION. — *L'espace vectoriel Σ_K est naturellement isomorphe au dual de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M} / \mathfrak{M}\mathcal{M}$, avec $\mathfrak{M} = (s, \bar{s})$.*

Démonstration. — Posons $\Sigma = \Sigma_K$ et $E = \mathcal{M}/\mathfrak{M}\mathcal{M}$. Si ℓ est un élément de E^* et si φ est dans $C_0^{(n,n)}(K)$, on pose $\langle T_\ell, \varphi \rangle = \ell([\tilde{F}_\varphi])$, où $[\tilde{F}_\varphi]$ désigne l'image de \tilde{F}_φ dans E .

Montrons déjà que T_ℓ définit un élément de Σ . D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier $d \neq 0$ tel que l'annulation de $T_{p,q}^{i,k}(\varphi)$ pour $p + q \leq d + 1$ entraîne que $\tilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$ (voir par exemple le corollaire du Théorème 1 bis de [B], p. 167). Dans ces conditions, on aura *a fortiori* $\ell([\tilde{F}_\varphi]) = 0$. Ceci montre que la forme linéaire T_ℓ que l'on a définie sur $C_0^{(n,n)}(K)$ est une combinaison linéaire des courants $T_{p,q}^{i,k}$ pour $p + q \leq d + 1$, c'est-à-dire $T_\ell \in \Sigma'_K$. De plus, il est clair que T_ℓ est un élément de Σ car $\langle fT_\ell, \Psi \rangle = \ell([s\tilde{F}_\Psi]) = 0$ puisque, par définition, $s\tilde{F}_\Psi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$ (resp. $\bar{f}T_\ell = 0 \dots$).

L'application linéaire $E^* \rightarrow \Sigma$, que nous venons de définir, est injective ; en effet, s'il existe \tilde{F}_Ψ tel que $\ell([\tilde{F}_\Psi]) \neq 0$, on aura $\langle T_\ell, \Psi \rangle \neq 0$.

Il nous reste à prouver que cette application est surjective. Si T est un élément de Σ , nous cherchons donc ℓ dans E^* tel que $T_\ell = T$. Pour φ dans $C_0^{(n,n)}(K)$, nous voudrions poser $\ell([\tilde{F}_\varphi]) = \langle T, \varphi \rangle$. Pour que cela ait un sens, nous devons vérifier que si $\tilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$, alors on a $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Mais si $\tilde{F}_\varphi \in \mathfrak{M}\mathcal{M}$, il existe des formes Ψ et χ dans $C_0^{(n,n)}(K)$ telles que $\tilde{F}_{\varphi - f\Psi - \bar{f}\chi}$ soit nulle dans \mathcal{M} , c'est-à-dire admette un développement asymptotique nul en $s = 0$. D'après la Proposition 9 de [B], ceci entraîne que cette fonction est C^∞ au voisinage de $s = 0$ et plate en $s = 0$. Notons par g cette fonction et écrivons $g = sa + b\bar{s}$, où a et b sont C^∞ au voisinage de $s = 0$. Comme nous savons que toute fonction C^∞ au voisinage de $s = 0$ est de la forme $F_\omega, \omega \in C_0^{(n,n)}(K)$ (voir le Lemme 1 de [B], p. 167), il existe des formes Ψ_1 et χ_1 dans $C_0^{(n,n)}(K)$ telles que $F_{\varphi - f\Psi_1 - \bar{f}\chi_1}$ soit identiquement nulle au voisinage de $s = 0$. Alors T est nul sur $\varphi - f\Psi_1 - \bar{f}\chi_1$ et $fT = \bar{f}T = 0$ montre alors que $\langle T, \varphi \rangle = 0$. Finalement, la formule $\ell([\tilde{F}_\varphi]) = \langle T, \varphi \rangle$ définit ℓ dans E^* et $T_\ell = T$, ce qui prouve la surjectivité annoncée. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration sur les fibres, *Invent. Math.*, t. **68**, 1982, p. 129-174.
- [B-M] BARLET (D.) et MAIRE (H.M.). — Asymptotic expansion of complex integrals via Mellin transform, *J. Funct. Anal.*, t. **83**, 1989, p. 233-257.
- [M] MILNOR (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces*. — Ann. of Math. Studies 61, Princeton, 1968.
- [R] RUBENTHALER (H.). — La surjectivité de l'application moyenne pour les espaces préhomogènes., *J. Funct. Anal.*, t. **60**, 1985, p. 80-94.
- [S] SAITO (K.). — Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, *Invent. Math.*, t. **14**, 1971, p. 123-142.
- [T] TREVES (F.). — *Locally convex spaces and linear partial differential equations*. — Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
- [Z-S] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*. — Van Nostrand, 1967.