BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL DOMERGUE

YVES MATHIEU

Nœuds qui ne sont pas déterminés par leur complément dans les 3-variétés à bord

Bulletin de la S. M. F., tome 119, nº 3 (1991), p. 327-341

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_3_327_0>

Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 327–341.

NŒUDS QUI NE SONT PAS DÉTERMINÉS PAR LEUR COMPLÉMENT DANS LES 3-VARIÉTÉS A BORD

PAR

MICHEL DOMERGUE ET YVES MATHIEU (*)

RÉSUMÉ. — Pour toute variété V de dimension 3 compacte orientable, à bord de genre 1, nous construisons deux nœuds k et k' dans l'intérieur de V, avec $V-k$ degré $+1$ homéomorphe à $V-k'$, mais (V,k) non homéomorphe à (V,k'). En fait, dans toute 3-variété V qui porte sur son bord une courbe γ simple fermée et "admissible" on peut construire un tel exemple s'il n'existe pas d'homéomorphisme de V de degré -1 qui respecte γ.

ABSTRACT. — In every compact orientable 3-manifold with boundary a torus, we construct two knots k and k' in $\mathrm{int}(V)$, with $V-k$ degree $+1$ homeomorphic to $V-k'$, but (V,k) non homeomorphic to (V,k'). In fact, in every 3-manifold V with an simple closed and "admissible" curve γ on the boundary we can construct such example if V doesn't admit an orientation-reversing homeomorphism respecting γ.

1. Conjecture généralisée du complément

1.1. Complément et type de nœuds.

Soit V une variété de dimension 3, orientée, compacte, avec ou sans bord. Deux nœuds k et h dans l'intérieur de V, noté $\mathrm{int}(V)$, sont de même type (ou équivalents) s'il existe un homéomorphisme entre les paires (V,k) et (V,h). Nous dirons qu'un nœud k est *déterminé par son complément* si pour tout nœud h de V, $V-k \cong V-h$ implique $(V,k) \cong (V,h)$, où $\cong$ représente l'homéomorphie.

La conjecture généralisée du complément pose la question : les nœuds sont-ils déterminés par leur complément en dimension 3 ? *La conjecture classique* a été posée par TIETZE [Ti] en 1908 pour le cas où la variété V

(*) Texte reçu le 5 mars 1990, révisé le 7 mars 1991.
M. DOMERGUE, Y. MATHIEU, U.F.R.–M.I.M. URA 225, Université de Provence, 3, Place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/327/$ 5.00

est la sphère S^3 et a été résolue 80 ans plus tard par GORDON et LUECKE [GoL]. Cette preuve globale et directe avait été précédée par une foule de résultats partiels, dont on peut voir la progression dans l'article de W. WHITTEN [W] de 1986. Dans les variétés quelconques de dimension 3, le problème général peut se décomposer en plusieurs questions :

Question 1. — Existe-t-il pour une variété V des nœuds k et k' dans $\operatorname{int}(V)$ tels que $V - k$ soit homéomorphe à $V - k'$, mais $(V, k) \not\cong (V, k')$?

Question 1′. — Existe-t-il pour une variété V des nœuds k et k' dans $\operatorname{int}(V)$ tels que $V - k$ soit degré $+1$ homéomorphe à $V - k'$, mais $(V, k) \not\cong (V, k')$?

Question 2 *et Question* 2′. — Peut-on trouver de tels contre-exemples dans les variétés fermées, voire des sphères d'homologie, différentes de la 3-sphère, pour un espace de nœud $V - \operatorname{int}(n(k))$ qui soit bord-incompressible ?

Nous répondons ici positivement à (Q1′) en montrant que dans la plupart des variétés à bord (cf. THÉORÈME 3) il existe des nœuds qui ne sont pas déterminés par leur complément. En particulier ce résultat est vrai dans toute 3-variété à bord un tore. GABAI [Ga2] et BERGE [B] avaient potentiellement une réponse à cette question pour le cas où V est un tore solide, puisqu'ils avaient trouvé des nœuds qui redonnent le tore solide après chirurgie de Dehn; mais ils n'avaient pas caractérisé le type de l'âme de chirurgie.

La question (Q2) se pose naturellement, car ce phénomène apparaît aussi dans certains lenticulaires, où les “axes” ne sont pas déterminés par leur complément qui est dans ce cas le tore solide. Il n'est pas difficile de démontrer que (les détails sont dans [M, chapitre 3]) :

PROPOSITION 3. — *Dans un lenticulaire $L(q,p)$, les deux axes du diagramme de Heegaard ont pour complément un tore solide mais ne sont pas équivalents si et seulement si* $p^2 \neq \pm 1 \pmod q$.

Notons que D. GABAI [Ga1] répond partiellement à la question (Q2′) pour $V = S^1 \times S^2$ en prouvant que les nœuds non contenus dans une boule étaient déterminés par leur complément (pour le type orienté).

Enfin MATHIEU obtient dans [M] des variétés de Seifert (closes) à trois fibres exceptionnelles dans lesquelles deux des fibres ont des complémentaires degré -1 homéomorphes et ne sont pas équivalentes par homéomorphie. Une telle variété peut être obtenue par deux chirurgies distinctes (en valeur absolue) sur un $(2, 2p+1)$-nœud de tore et les âmes des deux chirurgies ont des compléments homéomorphes mais ne sont pas des nœuds équivalents par homéomorphisme.

1.2. Aspect chirurgical.

Envisageons deux nœuds k et k' pour lequel il existe un homéomorphisme des compléments $\theta : V - k \to V - k'$. Si θ préserve les méridiens μ et μ', les nœuds k et k' sont équivalents puisqu'on peut étendre θ en un homéomorphisme entre les paires (V, k) et (V, k').

Sinon, il existe une courbe α distincte de μ telle que $\theta(\alpha) = \mu'$. Pour toute courbe x dans une variété X, on désignera par $N(x; X)$ ou simplement $N(x)$ un voisinage régulier de x dans X.

Si $K = V - \mathrm{int}(N(k))$, notons $K(\alpha)$ ou $V(k; \alpha)$ la variété

$$V - \mathrm{int}(N(k)) \cup_{\varphi} (S^1 \times D^2)$$

où $\varphi : S^1 \times \partial D^2 \to \partial N(k)$ est un homéomorphisme d'attachement qui envoie le méridien $\{1\} \times \partial D^2$ sur la courbe α. On dit que $K(\alpha)$ est *l'obturation (Dehn filling) de K* ou que $V(k; \alpha)$ est *obtenue par chirurgie de Dehn sur k le long de la courbe α*. L'âme de la chirurgie k_α est la courbe $S^1 \times \{0\}$ dans le quotient $V(k; \alpha)$ et θ réalise alors un homéomorphisme entre la paire abstraite $(V(k; \alpha), k_\alpha)$ et le modèle (V, k'). Nous venons de voir qu'un nœud qui n'est pas déterminé par son complément dans une variété V produit V par une chirurgie de Dehn non triviale dont l'âme k' n'est pas équivalente au nœud initial k.

En d'autres termes, appelons X l'espace abstrait homéomorphe à $V - \mathrm{int}(N(k))$ et $V - \mathrm{int}(N(k'))$:

On suppose qu'il y a deux pentes γ et ρ sur ∂X telles que

$$(X(\gamma), k_\gamma) \cong (V, k) \quad \textit{et} \quad (X(\rho), k_\rho) \cong (V, k').$$

Les nœuds k et k' ont des complémentaires homéomorphes dans V ; ils sont équivalents par homéomorphisme de V si et seulement si il existe un homéomorphisme de (X, γ) sur (X, ρ).

1.3. Organisation de l'article. Résultats.

Pour une variété à bord V, on décrit dans le § 2 un procédé général de construction qui associe à une courbe γ du bord de V une paire de nœuds k et k' ayant leurs complémentaires degré $+1$ homéomorphes dans V. Pour $V \cong S^1 \times D^2$, on démontre en restant dans le cadre de la théorie classique des nœuds que (vu avec le plongement standard de V dans S^3) les nœuds k et k', respectivement $(1,2)$- et $(-1,2)$-câbles des (p,q)-nœuds de tore ($|q| \geq 3$), ont des compléments homéomorphes, mais ne sont pas équivalents dans le tore solide.

Dans le § 3, on donne une condition assez générique sur (V, γ) (THÉORÈME 3) qui assure la non-équivalence des deux nœuds k et k'

par homéomorphie de V. On peut alors construire, pour toute variété à bord un tore, une infinité de paires $\{k, k'\}$ de nœuds dans $\mathrm{int}(V)$ tels que $V - k \cong V - k'$ (degré $+1$) mais k et k' non équivalents dans V. En particulier, on retrouve le cas du tore solide développé au § 2.

En conclusion, on remarque dans le § 4 qu'il n'est pas possible de boucher V en une variété fermée $H = V \cup W$ (avec $\partial V = \partial W$) pour étendre l'homéomorphisme de $V - k$ sur $V - k'$ en un homéomorphisme de $H - k$ sur $H - k'$ sans avoir $(H, k) \cong (H, k')$.

1.4. Conventions. — Pour alléger les notations :

1) Une courbe simple fermée sur le bord d'une 3-variété désigne aussi bien la classe d'homologie ou la classe d'isotopie (c'est-à-dire la pente) qu'elle définit sur le bord.

2) On ne change pas de notation pour désigner un homéomorphisme, sa classe d'isotopie, la restriction au bord, l'isomorphisme induit en homologie ou en homotopie.

2. Construction de base. Le cas du tore solide en théorie classique des nœuds

2.1. Lemme préliminaire.

Soient k et k' les deux nœuds dans l'intérieur de la boule $B = B^3$, indiqués dans la figure 1 page suivante; ils sont disjoints de l'axe vertical (diamètre) δ et d'un petit voisinage tubulaire fermé $N(\delta)$ de δ. Notons que la projection de k est sans auto-croisements et qu'un 2-disque D de bord k qui se plonge par projection dans le plan (de la figure) coupe δ en deux points, transversalement, et dans le même sens. Finalement, le nœud k' se déduit de k par réflexion dans un plan contenant δ. Distinguons un anneau équatorial A dans le bord ∂B ; la paire (B, A) devient alors une 2-anse dont l'âme est un 2-disque équatorial et dont la co-âme est δ. La variété $B - \mathrm{int}(N(\delta))$ est un tore solide dont le méridien m est isotope à $\delta' \cup \delta$ (où δ' est la géodésique Nord Sud de la sphère ∂B) ; pour ce tore solide le méridien de l'axe δ est un parallèle noté ℓ.

LEMME 1.

(i) *Il n'y a pas d'homéomorphie du tore solide $B - \mathrm{int}(N(\delta))$, de degré $+1$ et respectant l'anneau équatorial A, qui envoie k sur k'.*

(ii) *Il existe un homéomorphisme $\theta : B - k \to B - k'$ de degré $+1$, qui fixe $(\partial B) \cup \delta$ et qui respecte un voisinage tubulaire $N(\delta)$ de δ.*

(iii) *L'action de θ sur le tore bord de $B - \mathrm{int}(N(\delta))$ est la puissance quatre du twist de Dehn associé au méridien de δ.*

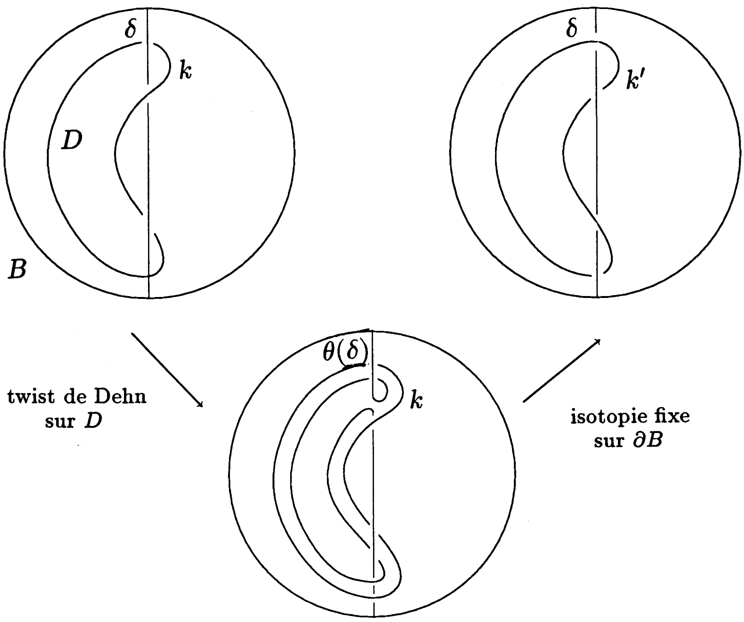

Figure 1.

Preuve.

(i) Un homéomorphisme ϕ qui envoie k sur k' et respecte l'anneau A fixe les courbes ℓ et m à orientation près, $\phi(m) = \pm m$ et $\phi(\ell) = \pm\ell$. Les nœuds k et k' sont respectivement parallèles (avec unicité à isotopie près de l'anneau de parallélisme) aux courbes du bord ayant pour homologie $2 \cdot m + \ell$ et $2 \cdot m - \ell$, et nécessairement, en regardant la restriction de ϕ au bord, on a $\phi(2m + \ell) = \pm(2m - \ell)$. La matrice de cette restriction a donc un déterminant égal à -1 : ϕ renverse l'orientation.

(ii) Le twist de Dehn associé au disque est un homéomorphisme $\theta : B - k \to B - k$ qui est fixe en dehors d'un petit voisinage régulier de D dans B. On oriente le parallèle préféré λ de k en sorte que $\theta(\mu \cdot \lambda) = \mu$ pour μ le méridien de k. Pour tout entier n différent de 0 et de 1, $\theta^n(\delta)$ se noue dans B : il y a une isotopie ambiante de B fixe sur ∂B qui déforme $(B, \theta(\delta))$ en (B, δ) tout en déformant le nœud k et k'. Associée à θ, cette isotopie définit un homéomorphisme, noté encoreθ, de $(B - k, \delta)$ sur $(B - k', \delta)$ qui est fixe sur $\partial B \cup \delta$ et qui envoie la courbe $d = \mu \cdot \lambda$ sur le méridien μ' de k'.

(iii) Appelons V le tore solide $B - \mathrm{int}(N(\delta))$. Il reste à déterminer l'action de θ sur ∂V. La courbe ℓ a été orientée pour que $\theta(\ell) = \ell$. Le méridien m de V est homologue à 2μ et donc $\theta(m) = 4(\mu' - \lambda')$;

puisque $2\mu'$ est homologue à m et λ' est homologue à 2ℓ, on en déduit $\theta(m) = m - 4 \cdot \ell$.

Remarque. — La paire abstraite $(B(k;d), k_d)$ a pour modèle géométrique la paire (B, k'). Il y a aussi un homéomorphisme de $V - k$ sur $V - k'$ qui opère sur la structure périphérique des nœuds k et k' en envoyant $d = \mu \cdot \lambda$ sur μ' et donc $(V(k;d), k_d)$ a pour modèle (V, k') ce qui signifie que $V(k;d)$ est un tore solide; l'âme de chirurgie a pour modèle k' dans V. Les nœuds k et k' sont ici les $(\pm 1, 2)$ câbles de l'âme de V. Toutefois les nœuds k et k' sont de même type dans ce cas, puisque les paires (V, k) et (V, k') sont homéomorphes aussi bien par une symétrie plane (de degré -1) que par le twist de Dehn le long d'un disque méridien de V (degré $+1$).

2.2. Construction de base.

Etant donné courbe simple γ sur le bord d'une variété V, on attache la 2-anse B du LEMME 1 à une copie de V, en identifiant A à un voisinage tubulaire de γ dans ∂V. Alors $M = V \cup B - \operatorname{int} N(\delta)$ est clairement une copie de V contenant k et k'. *Les nœuds k et k' seront appelés* dans ce qui suit *les associés (ou parfois les* $(\pm 1, 2)$*-câbles)* de γ dans l'intérieur de V. Ce sont des nœuds à un pont dans V. Il découle du LEMME 1 (ii) que $M - k$ est homéomorphe à $M - k'$, sans respect des structures périphériques. Plus précisément, en confondant M et V :

LEMME 1'. — *Soient dans une variété à bord V deux nœuds k et k' associés à une courbe $\gamma \subset \partial V$. Alors il existe un homéomorphisme $\theta : V - k \to V - k'$ de degré + 1, tel que $\theta(\mu) = \mu' \cdot \lambda'^{-1}$.*

2.3. Le cas du tore solide en théorie classique.

Lorsque $V = M = S^1 \times D^2$ est plongé dans S^3 de façon standard, la construction de base produit k et k' comme des cables de degré 2 de nœuds toriques. Nous prouvons par une démonstation dans le cadre de la théorie classique des nœuds :

PROPOSITION 2. — *Soient γ un (p, q) nœud de tore sur ∂V, tel que $|q| \geq 3$, et k et k' les nœuds associés à γ. Alors $V - k$ est homéomorphe à $V - k'$, mais $(V, k) \not\cong (V, k')$.*

Preuve. — Si les nœuds k et k' sont équivalents dans V, il existe un homéomorphisme $\varphi : (V, k) \to (V, k')$. Soit V considéré comme sous-espace de S^3 avec son plongement standard dans une décomposition de Heegaard $S^3 = V \cup V'$ et (m, ℓ) le repère standard. Restreint au bord ∂V et à isotopie près, $\varphi(m) = m$ et $\varphi(\ell) = m^a \ell$, pour un entier a. Soit $\Psi : \partial V \to \partial V$ défini à isotopie près par $\Psi(m) = m$ et $\Psi(\ell) = m^{-a} \cdot \ell$;

Ψ s'étend en un homéomorphisme de V sur lui-même, et $\Psi \circ \varphi$ est un homéomorphisme de V sur lui-même qui s'étend à S^3 tout entier en sorte que les nœuds k et $\Psi(k') = \Psi \circ \varphi(k)$ sont de même type dans S^3. Par rapport à la paire standard méridien parallèle et dans le langage de la théorie classique des nœuds, k est le $(2pq+1, 2)$ câble du (p, q) nœud de tore de S^3 alors que $\Psi(k')$ est le $(2(p+aq)q - 1, 2)$ câble du $(p+aq, q)$ nœud de tore. Un argument classique [S] montre que k et $\Psi(k')$ ne peuvent être équivalents dans S^3 que si $\pm p = p + aq$, c'est-à-dire $aq = -2p$ ou bien $a = 0$.

• L'équation $aq = -2p$ entraîne $|q| \leq 2$ qui contredit l'hypothèse $|q| \geq 3$.

• Pour $a = 0$, les nœuds k et $\Psi(k')$ sont respectivement les $(2pq+1, 2)$ et $(2pq-1, 2)$ câble du (p, q)-nœud de tore. Ils sont donc de type différent car $|q| \geq 3$ ([S] ou [BZ]).

3. Nœuds non déterminés par leur complément dans les variétés à bord

3.1. Courbes admissibles sur le bord d'une variété.

DÉFINITIONS. — Soit V une 3-variété orientée compacte avec bord, F une composante de ∂V et γ une courbe simple tracée sur F :

1) *La courbe γ est admissible pour V* si :

(i) tout disque de compression $(\Delta, \partial\Delta) \subset (V, F)$ est tel que le nombre minimal de points d'intersection de γ et $\partial\Delta$ est au moins deux;

(ii) pour tout anneau $(X, \partial X) \subset (V, \partial V)$, vérifiant $\partial X = \{\gamma, \gamma'\}$ la courbe γ' est isotope à γ sur le bord.

2) *Une inversion de V par rapport à γ* est un homéomorphisme de degré -1 de V sur elle-même qui respecte la courbe γ.

Remarques :

1) Si V est irréductible, on peut remplacer la condition (i) dans la définition précédente de courbe admissible par les conditions :

(i′) $(V, \gamma) \ncong (S^1 \times D^2, S^1 \times \{1\})$;

(i″) $\partial V - \gamma$ est incompressible dans V.

Il est clair que (i) entraîne (i′) et (i″). Réciproquement pour prouver (i), il suffit de montrer que si D est un disque de compression pour V tel que $\partial D \cap \gamma$ est réduit à un point, alors $(C, \gamma) \cong (S^1 \times D^2, S^1 \times \{1\})$. Le voisinage régulier N de $D \cup \gamma$ dans V est un tore solide et on a : $N \cap \partial V = \partial N \cap \partial V = S$; $\partial N - \mathrm{int}(S) = \Delta$; $\partial\Delta = \partial S$ et $\partial N = S \cup \Delta$, avec S une surface orientable compacte de genre 1, Δ disque proprement plongé dans V.

Puisque $\partial V - \gamma$ est incompressible, $\partial\Delta = \partial E$ pour un disque $E \subset \partial V$ vérifiant $E \cap S = \partial S = \partial\Delta$. La sphère $E \cup D$ dans V irréductible doit être le bord d'une 3-boule B^3 et $V = N \cup B^3 \cong S^1 \times \mathbb{D}^2$; de plus $\gamma \cap D$ réduit à un point entraîne $(V,\gamma) \cong (S^1 \times \mathbb{D}^2, S^1 \times \{1\})$.

2) Notons qu'une inversion peut être de degré $+1$ ou de degré -1 restreinte à γ.

PROPOSITION 2. — *Si V est une variété orientée irréductible, à bord de genre* 1, *il existe une infinité de courbes admissibles γ, telles qu'il n'existe pas d'inversion de V par rapport à γ.*

En particulier, si V est un tore solide, les courbes γ admissibles pour V sont celles dont le degré d vérifie $|d| \geq 2$; pour $|d| \geq 3$, il n'existe pas d'inversion de V par rapport à γ.

Preuve. — La suite exacte d'homologie de la paire $(V,\partial V)$ prouve l'existence d'une unique courbe simple a sur ∂V avec $n\cdot a$ homologue à zéro dans V et $n \neq 0$. On choisit une courbe simple b transverse en un point à la courbe a. Dans ces conditions, les courbes simples γ homologues à $p\cdot a+q\cdot b$ vérifient la condition (i) d'admissibilité pour $|q| \geq 2$ La condition (ii) est liée au résultat de HATCHER [H] sur la finitude du nombre de pentes frontières du bord d'une variété. Mais nous préférons une démonstration élémentaire qui prouve que :

Affirmation : il y a au plus 2 *pentes (à éviter pour γ) sur ∂V qui peuvent repésenter le bord d'un anneau non parallèle au bord.*

Supposons qu'il y ait deux pentes du bord où s'appuient deux anneaux P et Q non parallèles au bord. Analysons le graphe Γ représentant l'intersection des deux surfaces planes P et Q. On commence par éliminer les courbes d'intersection non parallèles au bord (inessentielles) en partant d'une courbe "innermost" dans P, par exemple : sans toucher aux bords, on diminue le nombre de courbes d'intersection des anneaux par une isotopie de Q dans une 3-boule loin du bord. S'il y a une courbe fermée essentielle dans Γ, c'est que les anneaux P et Q s'appuient sur deux pentes parallèles dans le bord de V. Ensuite, on élimine les arcs d'intersection inessentiels par la même méthode.

Enfin, si e est un arc essentiel, en suivant l'orientation locale le long de cet arc, on voit que les deux composantes de ∂P (par exemple) ont même orientation sur ∂V, tandis que celles de ∂Q ont des orientations opposées, ce qui interdit la présence de plus de deux anneaux.

Pour $|q| \geq 3$, si φ est un homéomorphisme de la paire (V,γ), on a nécessairement, à isotopie près, $\varphi(a) = \varepsilon \cdot a$, $\varphi(b) = r \cdot a + v \cdot b$ et $\varphi(\gamma) = \pm\gamma$ avec $\varepsilon = \pm 1, \nu = \pm 1$.

On en déduit que $(\varepsilon - \nu) \cdot p = -r \cdot q$, ce qui entraîne $\varepsilon = \nu$ puisque $|q| \geq 3$: ainsi φ est de degré $+1$. Pour le cas où V est un tore solide, a est le méridien du tore et $n = 1$, et il n'y a aucun anneau. Les courbes admissibles et sans réflexion sont, dans un plongement standard de V dans S^3, des (p, q)-nœuds de tore de degré q tel que $|q| \geq 3$.

3.2. Résultats principaux.

Rappelons la construction de base décrite § 2.2. Le bord (non nécessairement connexe) de la variété V est de genre ≥ 1. En partant d'une courbe γ sur le bord de V, on constuit comme dans le LEMME $1'$ une variété $M = V \cup B - \operatorname{int} N(\delta)$, homéomorphe à V et contenant deux nœuds k et k' associés à γ. Dans ce qui suit nous confondrons M et V. Le tore solide $B - \operatorname{int} N(\delta)$ de M correspond alors au voisinage régulier $U = N(\gamma; V)$ et les nœuds k et k' sont des $(\pm 1, 2)$-câbles de l'âme de U isotope à γ dans l'intérieur de V. Dans la terminologie de GABAI [Ga2], k et k' sont des nœuds à un pont dans V.

THÉORÈME 3. — *Etant données V une variété compacte, orientée à bord non vide et γ une courbe simple et essentielle dans le bord de V. Soient k et k' les deux nœuds dans V associés à γ par la construction ci-dessus :*

(i) *$V - k$ est toujours homéomorphe à $V - k'$, par une homéomorphie de degré $+1$.*

(ii) *Si la courbe γ coupe tout disque de compression de ∂V en au moins deux points, (V, k) n'est jamais degré $+1$ homéomorphe à (V, k').*

(iii) *Si la courbe γ est admissible, $(V, k) \cong (V, k')$ si et seulement si il y a une inversion de V par rapport à γ.*

La preuve de ce théorème utilise des méthodes analogues à celles utilisées par JOHANSSON [J] et sera donnée après l'énoncé du THÉORÈME 4 qui répond positivement à la question $\mathrm{Q1}'$.

Les variétés de dimension 3, compactes, orientées et à bord de genre 1 permettent de construire les premiers exemples de nœuds qui ne sont pas déterminés par leur complément :

THÉORÈME 4. — *Dans toute 3-variété compacte orientée V à bord de genre 1, pour une infinité de courbes γ, les deux nœuds k et k' associes à γ sont tels que $V - k \cong V - k'$, par un homéomorphisme de degré $+1$, mais $(V, k) \not\cong (V, k')$. En particulier si V est un tore solide, les courbes γ sont des nœuds de tore de degré d, où $|d| \geq 3$, et k et k' sont des câbles de degré 2 de nœuds de tore.*

Évident d'après la PROPOSITION 2 et le THÉORÈME 3.

Remarques :

1) Si V est la variété $F\times[0,1]$, avec F une surface fermée, la condition d'admissibilité n'est pas réalisée puisque il y a des anneaux essentiels entre les deux composantes du bord de V. De plus les nœuds k et k', construits plus haut, sont équivalents par une symétrie de V par rapport à $F\times\{\frac{1}{2}\}$.

2) Si un disque rencontre γ une seule fois, les nœuds associés k et k' sont équivalents en utilisant le twist de Dehn selon ce disque.

3.3. Anneaux proprement plongés et preuve du Théorème 3.

La démonstration du théorème principal (THÉORÈME 3) repose sur deux lemmes techniques.

LEMME 5. — *Soit (V,γ) une paire où V est une 3-variété irréductible orientable, à bord, et la courbe simple γ essentielle sur ∂V coupe tout disque de compression ∂V en au moins deux points, et soit U un voisinage régulier de γ dans V, contenant les nœuds k et k' associés de γ, dont le bord ∂U est la réunion de deux anneaux $A\cup N(\gamma;\partial V)$.*

Alors tout homéomorphisme $(V,k')\to(V,k)$ est ambient isotope à un homéomorphisme φ tel que les anneaux A et $\varphi(A)$ soient en position générale transverse et ne se coupent que selon des courbes simples fermées, essentielles à la fois sur A et $\varphi(A)$.

Preuve. — Rappelons que γ est un parallèle du tore solide $U=N(\gamma;V)$, dont le bord ∂U est la réunion de deux anneaux $A\cup N(\gamma;\partial V)$, $\partial A=\partial N(\gamma;\partial V)=A\cap N(\gamma;\partial V)$.

Soit $\varphi:(V,k')\to(V,k)$ un homéomorphisme. Nous pouvons supposer que les anneaux A et $\varphi(A)$ se coupent transversalement selon des arcs et des courbes simples fermées.

Nous notons d'abord que les anneaux A et $\varphi(A)$ sont ∂-irréductibles dans $(V-k,\partial V)$: ceci résulte du fait que la condition (i) d'admissibilité de γ entraîne $(S^1\times D^2,S^1\times\{1\})\ncong(V,\gamma)$ et $\partial V-\gamma$ incompressible dans V (cf. remarque 1, après la définition d'admissibilité).

L'intersection des 2 anneaux A et $\varphi(A)$ est un graphe noté Γ_φ (ou simplement Γ). Nous allons prouver qu'on peut, par isotopie, éliminer de Γ tout ce qui n'est pas courbe essentielle.

Affirmation 1 : élimination des courbes triviales.

S'il existe une courbe α bordant des disques Δ et D dans A et $\varphi(A)$ respectivement, avec $\alpha=\partial\Delta=\partial D=\Delta\cap D$. La courbe α est choisie minimale sur A en ce sens que $\varphi(A)\cap\Delta=\alpha$ exactement. Alors la sphère $S^2=\Delta\cup D$ borde dans V une boule B^3, qui ne peut contenir k : sinon k serait homotope à 0, donc aussi γ^2, ce qui contredirait l'incompressibilité de $\partial V - \gamma$. On peut donc isotoper φ en φ', par une isotopie qui échange Δ et D, et qui est l'identité en dehors du voisinage régulier de B^3. On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de telle courbe α.

Affirmation 2 : élimination des arcs inessentiels.

S'il y a un arc inessentiel $(\alpha, \partial\alpha) \subset (A, \partial A)$ et un arc inessentiel $(\beta, \partial\beta) \subset (\varphi(A), \partial\varphi(A))$. On peut trouver deux arcs $\alpha' \subset \partial A$ et $\beta' \subset \partial(\varphi(A))$ tels que $\alpha \cup \alpha'$ et $\beta \cup \beta'$ soient le bord de deux disques Δ et D respectivement dans A et $\varphi(A)$. On suppose Δ minimal, en ce sens que $\Delta \cap \varphi(A) = \alpha$. On obtient une 2-cellule $E = \Delta \cup D$ portée par $A \cup \varphi(A)$, dont le bord ∂E évite $\varphi(\gamma)$. Ce disque est donc parallèle à un disque R du bord de V. Comme dans l'affirmation 1, la sphère $E \cup R$ borde une boule B^3 de V qui ne contient pas k. Par isotopie locale on échange les disques D et Δ en éliminant α et β.

Affirmation 3 : élimination des arcs essentiels.

S'il y a des arcs essentiels dans Γ, puisque A sépare V en $V - \operatorname{int}(U)$ et U, il existe un rectangle $R \subset \varphi(A)$ avec $(R, \partial R)$ proprement plongé dans $(U - k, \partial U)$ dont deux côtés opposés sont des arcs de Γ essentiels à la fois dans $(A, \partial A)$ et $(\varphi(A), \partial\varphi(A))$. Mais $\partial U = A \cup N(\gamma; \partial V)$, et ∂R est une courbe triviale sur ∂U, les deux autres côtés de R sont donc nécessairement des arcs de $N(\gamma; \partial V) \cap \partial\varphi(A)$ inessentiels et proprement plongés dans $(N(\gamma; \partial V), \partial N(\gamma; \partial V))$. Il y a donc un disque $\Delta \subset N(\gamma; \partial V)$, avec $\partial\Delta = \alpha \cup \beta$, où α est un arc de $\partial N(\gamma; \partial V)$, β un arc de $\partial\varphi(N(\gamma; \partial V)), \partial\alpha = \partial\beta, \Delta \cap \partial N(\gamma; \partial V) = \alpha$ et $\Delta \cap \partial\varphi(A) = \beta$. On peut alors déformer φ par une isotopie, dans un voisinage de Δ, qui échange les arcs β et α. Cette opération crée un arc inessentiel que l'on élimine comme dans l'affirmation 2.

Le lemme est donc démontré puisqu'il ne peut y avoir dans Γ un arc à la fois essentiel sur A (resp. sur $\varphi(A)$) et inessentiel sur $\varphi(A)$ (resp. A) d'après la ∂-irréductibilité des anneaux.

LEMME 6. — *Soient U un tore solide et γ une longitude de U, k et k' les associés de γ dans U.*

(i) *Tout homéomorphisme de (U, k') sur (U, k) qui respecte γ renverse l'orientation de U.*

(ii) *Soit $(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X})$ une famille d'anneaux proprement plongés dans $(U - k, \partial U)$, tels que $\partial\mathcal{X}$ détermine la pente γ sur ∂U. Alors il existe une isotopie ambiante de (U, k), fixe sur ∂U, qui déforme $(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X})$ en une famille $(\mathcal{Y}, \partial\mathcal{Y})$ telle que $U - \mathcal{Y}$ contienne un petit tube U_0 concentrique à U. La composante de $U - \mathcal{Y}$ qui contient k est un tore solide concentrique à U contenant aussi k'.*

Preuve.

(i) La preuve est analogue à celle du (i) LEMME 1.

(ii) Il est bien connu qu'il n'y a dans $(U-k,\partial U)$ un seul anneau proprement plongé non parallèle au bord : l'âme de cet anneau est de degré deux dans U. Puisque $(\mathcal{X},\partial\mathcal{X})$ est une famille d'anneaux proprement plongés dans $(U-k,\partial U)$, le nœud k est dans une composante connexe de $U-\mathcal{X}$, notée U_k. Le bord de U_k est une union finie d'anneaux de $\mathcal{X}$ et de ∂U qui se coupent uniquement selon les courbes de leur bord parallèles à γ, en sorte que ∂U_k est un 2-tore bordant dans U un tore solide. Comme l'âme d'un anneau de $\mathcal{X}$ est de degré un dans U, tout anneau de $\mathcal{X}$ est parallèle au bord. On peut donc par une isotopie ambiante de U fixe sur ∂U déformer la famille $\mathcal{X}$ dans l'intérieur de U en une famille $\mathcal{Y}$ en sorte que U_k soit un tore solide ayant la même âme que U et homothétique à U de rapport $\frac{1}{2}$ (on dira que U_k est "concentrique à U"). Les anneaux de $\mathcal{Y}$ étant parallèles au bord, le nœud k' est donc aussi dans U_k.

Preuve du Théorème 3. (Les notations sont celles du LEMME 5.)

(i) Avec les hypothèses sur (V,γ), il est clair que $V-k$ est degré+1 homéomorphe à $V-k'$ d'après le (ii) du LEMME 1.

(ii) *Cas 1 : la variété V est irréductible.*

Supposons k et k' équivalents par homéomorphisme de V : le LEMME 5 assure de l'existence d'un homéomorphisme $\Psi : (V,k') \to (V,k)$ tel que l'intersection transverse $\Psi(A)\cap A$ ne contient que des courbes simples essentielles sur les anneaux A et $\Psi(A)$. L'intersection $\Psi(A)\cap U$ est une famille $(\mathcal{A},\partial\mathcal{A})$ d'anneaux proprement plongés dans $(U,\partial U)$.

Si la famille $\mathcal{A}$ est vide, les anneaux A et $\Psi(A)$ sont disjoints. Puisque le nœud k est dans $\Psi(U)\cap U$, on en déduit $A\subset\Psi(U)$ ou $\Psi(A)\subset U$; par suite A et $\Psi(A)$ sont parallèles dans U ou $\Psi(U)$. Par une isotopie fixe sur k on peut obtenir $\Psi(U)=U$ et $\Psi(k')=k$. Il est clair que Ψ respecte γ et, d'après (i) LEMME 6, Ψ renverse l'orientation sur U, et donc sur V.

Si la famille $\mathcal{A}$ est non vide, la composante connexe U_k de $\Psi(U)\cap U$ qui contient k est une 3-variété dont le bord est un 2-tore, réunion d'anneaux ne se coupant que selon une courbe de leurs bords : D'après le LEMME 6 (ii), U_k est donc un tore solide contenu dans U et cette composante contient aussi k'. La restriction de Ψ à U_k est un homéomorphisme de U_k sur lui-même qui envoie k' sur k et qui conserve une longitude de U_k ; le (i) du LEMME 6 entraîne que Ψ est de degré -1 dans U_k donc dans V tout entier.

(ii) *Cas 2 : la variété V n'est pas irréductible.*

Soit $\varphi : (V,k') \to (V,k)$ un homéomorphisme de la variété V non irréductible. Il existe une 2-sphère S essentielle dans V telle que $V = X \cup_S W$, où W est la composante irréductible de Vqui contient ∂V et $U = N(\gamma; V)$ (et donc k et k'). Soit $\widehat{W} = (V - \mathrm{int}(X)) \cup_S B^3$: cette variété est irréductible, et l'on peut étendre la restriction de φ à W en un homéomorphisme $\varphi : (\widehat{W}, k') \to (\widehat{W}, k)$. Cet homéomorphisme est de degré -1, d'après le cas1 précédent, et donc φ est lui-même de degré -1.

(iii) $\Rightarrow$ S'il existe un homéomorphisme $\Psi, (V, k) \cong (V, k')$, celui-ci est nécessairement de degré -1 d'après le (ii). La courbe $\Psi(\gamma)$ est donc isotope sur le bord de V à γ d'après la condition (ii) d'admissibilité. On peut donc, par une isotopie $(\omega_t)_t$ fixe en-dehors d'un petit voisinage régulier de l'anneau de parallélisme sur ∂V entre $\Psi(\gamma)$ et γ, modifier Ψ pour que $\Psi \circ \omega_1(\gamma) = \pm\gamma$, ce qui réalise l'inversion de (V, γ) recherchée.

(iii) $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe réciproquement un automorphisme Ψ de (V, γ) qui renverse l'orientation de V. Alors la restriction de Ψ à γ peut être de degré $+1$ ou -1.

Si Ψ préserve l'orientation de γ, $\Psi(\gamma) = \gamma$, nous pouvons définir une nouvelle variété $V' = V \cup (S^1 \times D^2)$, où l'anneau $N(\gamma; \partial V)$ de ∂V est identifié avec un anneau de $\partial(S^1 \times D^2$ d'âme $S^1 \times \{1\}$. Bien sûr les variétés V' et V sont homéomorphes. Mais l'on peut surtout définir à partir de Ψ un homéomorphisme $\Psi' : V' \to V'$ qui préserve les morceaux V et $S^1 \times D^2$ en prenant pour restriction $\Psi'|_{[}6pt, 2pt]S^1 \times D^2$ la symétrie du tore solide qui est l'identité sur γ. On peut isotoper les nœuds k et k' dans le tore $S^1 \times D^2$ contenu dans V', en sorte que k et k' apparaissent comme les associés du parallèle γ. Alors $\Psi(k') = k$ ce qui entraîne l'équivalence des deux nœuds dans V', donc dans V.

Si Ψ renverse l'orientation de γ, $\Psi(\gamma) = -\gamma$: la méthode est identique en prenant comme symétrie du tore solide celle qui invarie deux disques méridiens. Les nœuds k et k' sont alors équivalents dans V'.

4. Plongement dans une variété fermée

D'après le § 3, on sait trouver des paires (V, γ), où ∂V est non vide, avec des nœuds k et k', de méridiens μ et μ' non équivalents dans V mais possédant un homéomorphisme $\theta' : V - k \to V - k'$ qui ne s'étende pas à V tout entier puisque $\theta(\mu) \neq \mu'$.

Question. — Peut-on trouver une variété fermée $H = V \cup W$, contenant V telle que θ s'étende en un homéomorphisme $\Theta : H - k \to H - k'$? Les nœuds k et k' restent-ils non équivalents dans H ?

En d'autres termes peut-on boucher la variété à bord V en une variété fermée H pour que k et k' soient encore des contre-exemples à la conjecture du complément dans H ?

Cette variété ne saurait être S^3, après les résultats de GORDON et LUECKE. Supposons qu'il existe une 3-variété fermée $H = V \cup W$, où $\partial V = \partial W$. D'où $Q_{|[}6pt, 2pt]\partial W = q_{|[}6pt, 2pt]\partial V$ est un automorphisme qui opère comme la puissance 4 d'un twist de Dehn (cf. § 2.1, LEMME 1). Il résulte des travaux de JOHANNSON [J] sur la finitude du "Mapping class group" que θ s'étend à W tout entier à condition que γ soit le bord d'un disque, ou une composante du bord d'un anneau proprement plongé dans la variété $(W, \partial W)$.

Premier cas : $\Theta_{|[}6pt, 2pt]\partial W$ est un twist de disque. Mais γ borde un disque dans W, donc les nœuds k et k' sont triviaux dans H.

Deuxième cas : pour que la puissance 4 d'un twist de Dehn soit réalisée par un twist d'anneau de W, il faut qu'une orientation de l'anneau induise au bord de celui-ci le carré de γ. Ce qui entraîne que la variété H est non-orientable. Dans cette variété il y a bien un homéomorphisme de $H - k$ sur $H - k'$, qui ne respecte pas les méridiens. Mais il y a aussi dans un voisinage régulier de l'anneau une isotopie qui échange k sur k'. En particulier les nœuds k et k' sont équivalents dans H.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BERGE (J.). — *The knots in $D^2 \times S^1$ with non trivial Dehn surgeries yielding $D^2 \times S^1$*, to appear in Topology and its applications, 1989.

[BM] BING (R.H.) and MARTIN (J.). — *Cubes with knotted holes*, Trans. AMS, t. **155**, 1971, p. 217–231.

[BZ] BURDE (G.) and ZIESCHANG (H.). — *Knots*. — De Gruyter Studies in Mathematics 5, Berlin, 1985.

[CGLS] CULLER (M.), MC GORDON (C.), LUECKE (L.) and SHALEN (P.). — *Dehn surgery on knots*, Annals of Math., t. **125**, 1987, p. 237–300.

[DM] DOMERGUE (M.) et MATHIEU (Y.). — *Sur des nœuds qui ne sont pas déterminés par leurs compléments dans un tore solide*, Prépublication 20, URA 225, Marseille, 1989.

[Ga1] GABAI (D.). — *Foliations and the topology of 3-manifolds II*, J. Differential Geom., t. **26**, 1987, p. 461–478.

[Ga2] GABAI (D.). — *Surgery on knot in solid tori*, Topology, t. **28, 1**, 1989, p. 1–6.

[GoL] Mc Gordon (C.) and Luecke (J.). — *Knots are determined by their complements*, J. of AMS, t. **2, 2**, 1989, p. 374–415.

[H] Hatcher (A.E.). — *On the boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific J. Math., t. **99**, 1982, p. 373–377.

[J] Johannson (K.). — *Homotopy equivalence of 3–manifolds with boundary*, Lecture Notes in Mathematics 761, Springer Verlag, 1979.

[M] Mathieu (Y.). — *Sur des nœuds qui ne sont pas déterminés par leur complément et problèmes de chirurgie dans les variétés de dimension* 3, Thèse, Marseille, 1990.

[Mo] Moser (L.). — *Elementary surgery along a torus knot*, Pacific J. Math., t. **38**, 1971, p. 737–745.

[S] Schubert (H.). — *Knoten und Vollringe*, Acta Math., t. **90**, 1953, p. 131–286.

[Ti] Tietze (H.). — *Uber die Topologischen Invarianten...*, Monatsh. Math., t. **19**, 1908, p. 1–118.

[W] Whitten (W.). — *Knot complements and groups*, Topology, t. **26**, 1987, p. 41–44.