BULLETIN DE LA S. M. F.

EMMANUEL ANDRONIKOF

Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles

Bulletin de la S. M. F., tome 120, n° 1 (1992), p. 51-85
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_1_51_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 51–85.

INTÉGRALES DE NILSSON ET FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES

PAR

EMMANUEL ANDRONIKOF (*)

RÉSUMÉ. — On étudie les intégrales de formes holomorphes multiformes relatives à un morphisme lisse sur une famille continue de cycles relatifs dans le cadre de la théorie des faisceaux à l'aide de l'analyse microlocale des ensembles sous-analytiques de Kashiwara et Schapira et du foncteur de cohomologie à croissance de Kashiwara, et on retrouve et améliore des théorèmes de Nilsson et de Leray.

ABSTRACT. — One studies integrals of multivalued holomorphic forms relative to a smooth morphism on a continuous family of relative cycles in the framework of sheaf theory with the help of the microlocal analysis of subanalytic sets of Kashiwara and Schapira and Kashiwara's tempered cohomology functor, and one recovers and sharpens theorems by Nilsson and Leray.

Plan

Introduction

Soient X et Y deux variétés analytiques complexes et $f : Y \to X$ une application lisse (i.e. une submersion holomorphe), S une hypersurface complexe fermée de Y, $d = \dim_{\mathbb{C}} Y - \dim_{\mathbb{C}} X$, $x_0 \in X$, U un voisinage

(*) Texte reçu le 17 juillet 1990, révisé le 10 avril 1991.
E. ANDRONIKOF, Université de Paris-Nord, CSP, Département de Mathématiques, F 93430, Villetaneuse.

ouvert de S. On se donne un d-cycle γ_{x_0}, représenté par une d-chaîne dans $(U \setminus S) \cap f^{-1}(x_0)$ de cobord nul, et une forme holomorphe relative de degré maximal d définie sur $U \setminus S$, éventuellement multiforme. On regarde γ_{x_0} comme la fibre en x_0 d'une famille continue γ de d-cycles relatifs définie au voisinage de x_0, et on considère la fonction $h := \int_\gamma \omega$, qui est définie sur un voisinage de x_0. On montre, en particulier, le :

THÉORÈME 0. — *On fait les hypothèses suivantes :*

- *U est sous-analytique,*
- *f est propre sur $\overline{U}$,*
- *U n'a pas de contour apparent dans X,*
- *ω est uniforme au voisinage de γ_{x_0}.*

Alors :

(i) *h est holomorphe au voisinage de x_0 et il existe un sous-ensemble analytique complexe Z de codimension ≥ 1 dans X tel que h se prolonge en fonction holomorphe multiforme sur $X \setminus Z$.*

(ii) *Si ω est de détermination finie, il en est de même de h.*

(iii) *Si ω est de classe de Nilsson, il en est de même de h.*

L'ouvert U est dit *sans contour apparent* s'il existe une μ-stratification de ∂U telle que la projection sur le fibré cotangent de X de la réunion des conormaux aux strates est incluse dans la section nulle (cf. § 2).

Ce type d'intégrale a une longue histoire, voir par exemple la bibliographie de [A-V-G] et le livre de PHAM [P1]. Dans le cas algébrique, ce théorème est bien connu : il est démontré par NILSSON dans [N1] (cf. aussi [N2]), et (i) et (ii) sont complétés et précisés par LERAY dans [L1] (où (iii) est d'ailleurs énoncé sous forme de conjecture). On retrouve leurs énoncés en prenant $X = \mathbb{C}^n$, $Y = X \times \mathbb{P}^d\mathbb{C}$, $f : Y \to X$ la projection et $U = Y$.

Le propos est ici d'étudier ce type d'intégrale dans un cadre plus général par des techniques différentes de celles de ces auteurs : les résultats principaux sont les THÉORÈMES 3.6 et 3.12. L'organisation de l'article est la suivante. On s'inspire de DELIGNE en interprétant une fonction multiforme définie sur un ouvert U d'une variété complexe X comme une section globale de $\mathcal{H}om(F, \mathcal{O})$ où $F = j_! L$ est l'image directe à support propre par $j : U \hookrightarrow X$ d'un faisceau localement constant L sur U (§ 1) : alors le prolongement analytique le long des cycles relatifs se décrit comme un morphisme de faisceaux, par utilisation du morphisme-résidu de Leray-Grothendieck (Définition 3.3). L'idée naturelle, pour aborder les fonctions de classe de Nilsson est de remplacer $\mathcal{H}om(F, \mathcal{O})$ par $RH(F)$, où RH est le foncteur de cohomologie à croissance de Kashiwara, ce qui est possible dès que U est sous-analytique et que L est un système local, F étant dans ce cas un faisceau $\mathbb{R}$-constructible (§ 1).

Alors, sous des hypothèses de propreté ad hoc, on peut lever les obstructions topologiques en utilisant l'analyse microlocale des ensembles sous-analytiques de Kashiwara et Schapira (cf. § 2) pour produire le lieu de ramification de l'intégrale comme un contour apparent de F, qui sera en général un ensemble sous-analytique de codimension ≥ 1, et dont on montre, sous les hypothèses du THÉORÈME 0, qu'il est en fait analytique complexe (cf. 3.4). En 3.5 on étend la situation à des cycles qui sont eux-mêmes multiformes, l'exemple type étant le prolongement analytique des intégrales eulériennes généralisées. Le § 4 est un appendice où l'on rappelle quelques propriétés du foncteur RH et relie diverses notions de croissance au bord des fonctions holomorphes.

Nous avions entrepris cet article en collaboration avec E. LEICHTNAM, lequel n'a pas voulu la poursuivre ; nous tenons néanmoins à le remercier pour des éclaircissements sur les travaux de Nilsson et de Leray.

Enfin il nous est agréable de remercier ici M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA pour de très utiles conversations.

0. Notations

Les variétés que l'on considérera seront toujours supposées paracompactes, et une variété complexe sera supposée orientée par le choix de $\sqrt{-1}$.

Si M est une variété analytique réelle on désigne par $w - \mathbb{R} - c(M)$ (resp. $\mathbb{R} - c(M)$) la catégorie des faisceaux faiblement $\mathbb{R}$-constructibles (resp. des faisceaux $\mathbb{R}$-constructibles) et, si X est une variété complexe, on désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural, par Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, par $\overline{X}$ la variété complexe conjuguée, par $X_{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente et par $w - \mathbb{C} - c(X)$ (resp. $\mathbb{C} - c(X)$) la catégorie des faisceaux faiblement $\mathbb{C}$-constructibles (resp. des faisceaux $\mathbb{C}$-constructibles) sur X. On désigne par $D^b(M)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur M et par $D^b_{w-\mathbb{R}-c}(M)$ (resp. $D^b_{\mathbb{R}-c}(M)$) la sous-catégorie pleine de $D^b(M)$ des objets à cohomologie dans $w - \mathbb{R} - c(M)$ (resp. dans $\mathbb{R} - c(M)$). Définitions analogues de $D^b_{w-\mathbb{C}-c}(X)$, $D^b_{\mathbb{C}-c}(X)$.

Une absence d'indice dans un symbole $\otimes$ ou $\mathcal{H}om$ sous-entendra que l'anneau de base est $\mathbb{C}$.

Pour les propriétés qu'on utilise des ensembles sous-analytiques et des faisceaux $\mathbb{R}$-constructibles on pourra consulter [B-M] et le chapitre VIII de [K-S2].

1. Fonctions holomorphes multiformes et classe de Nilsson.

1.1. — Soit X une variété analytique complexe (paracompacte). Rappelons que si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est un germe holomorphe en $x \in X$ tel que f se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin dans X issu de x, alors f définit (de manière non unique) une section holomorphe globale d'un revêtement universel de X (le choix de la section dépend du choix d'un point du revêtement qui se projette sur x).

Inversement, si $p : X^* \to X$ est un revêtement (non ramifié quelconque) et $f \in \Gamma(X^*; \mathcal{O})$ est donnée, tout choix d'un point $x^* \in X^*$ définit de manière unique un germe de fonction holomorphe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, où $x = p(x^*)$, qui se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin dans X issu de x et on dira, comme c'est l'usage, que "f est une fonction holomorphe multiforme définie sur X". Remarquons qu'on a un isomorphisme canonique :

$$\Gamma(X^*; \mathcal{O}_X) \simeq \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(p_! \mathbb{C}_{X^*}, \mathcal{O}_X)\big).$$

En effet on a les identifications $p^! \mathcal{O}_X = p^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X^*}$, donc par Poincaré-Verdier on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(X^*; \mathcal{O}_{X^*}) &= \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_{X^*}, p^! \mathcal{O}_X)\\ &= \mathrm{Hom}(p_! \mathbb{C}_{X^*}, \mathcal{O}_X)\\ &= \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(p_! \mathbb{C}_{X^*}, \mathcal{O}_X)\big).\end{aligned}$$

On pose donc classiquement la :

DÉFINITION 1.1. — On appelle *fonction holomorphe multiforme sur X* une section globale $f \in \Gamma(X; \mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_X))$, où L est un faisceau localement constant sur X. Si de plus L est un système local (i.e. $\dim L_x < \infty$ $\forall\, x \in X$) on dit que f est une *fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur X.*

Les seuls faisceaux localement constants qui interviennent sont des quotients de $p_! \mathbb{C}_{X^*}$, mais la généralité de cette définition n'est pas ici un inconvénient.

Le théorème d'intégration du § 3 va utiliser la situation suivante. Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique de X et soit L un faisceau sur U. On a un isomorphisme canonique :

$$R\Gamma\big(U; R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_U)\big) \simeq R\Gamma\big(X; R\mathcal{H}om(j_!\, L, \mathcal{O}_X)\big),$$

par suite, une fonction holomorphe multiforme (resp. et de détermination finie) sur U s'identifie canoniquement à une section de

$$\Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(j_!\, L, \mathcal{O}_X)\big)$$

où L est un faisceau localement constant (resp. un système local) sur U.

Rappelons également que si L est un système local sur U on a $R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_U) = DL \otimes \mathcal{O}_U$ où $DL = R\mathcal{H}om(L, \mathbb{C}_U)$ est le dual de L (il est concentré en degré 0 et c'est un système local) et on a donc

$$R\Gamma\big(U; R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_U)\big) = R\Gamma\big(X; Rj_*(DL \otimes \mathcal{O}_U)\big),$$

i.e. une fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur U s'identifie à une section de $\Gamma(X; j_*(L' \otimes \mathcal{O}_U))$ où L' est un système local sur U (cf. [D], [K-K]).

1.2. — On va définir et interpréter de manière analogue les fonctions holomorphes multiformes de classe de Nilsson sur U en utilisant le foncteur RH de Kashiwara et la caractérisation de la croissance au bord des fonctions holomorphes rappelés en appendice (§ 4), en adaptant au cadre sous-analytique les définitions de DELIGNE (*loc. cit.*).

DÉFINITION 1.2. — Soient M une variété réelle de classe C^1, U un ouvert de M et $\varphi : U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue. On dit que φ est une *norme adaptée à ∂U* si pour tout $x_0 \in \partial U$ il existe une carte locale V et $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que :

$$c_1 d(x, \partial U)^{\alpha_1} \leq \big(1 + \varphi(x)\big)^{-1} \leq c_2 d(x, \partial U)^{\alpha_2}$$

sur $V \cap U$, où d désigne la distance euclidienne lue dans la carte V.

La terminologie est de DELIGNE (*loc. cit.*).

DÉFINITION 1.3. — Soient M et U comme dans la définition 1.2, et f une fonction continue sur U.

(i) Soit $x_0 \in \partial U$. On dit que f est à *croissance lente* (ou *modérée*) en $x_0 \in \partial U$ s'il existe une norme adaptée à ∂U définie sur un voisinage V de x_0 et $\nu > 0$ telle que $f(x) = O(\varphi(x)^\nu)$ sur $V \cap U$.

(ii) On dit que f est *localement à croissance lente* (ou *modérée*) si f est à croissance lente en tout point $x \in \partial U$.

On a la caractérisation suivante :

LEMME 1.4. — *Soit U un ouvert sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur U. Alors f est localement à croissance lente si et seulement si pour tout compact sous-analytique K de $\mathbb{R}^n$ il existe $\nu > 0$ tel que $d(x, K\cap\partial U)^\nu f(x)$ reste borné sur $K\cap U$ (d est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$).*

En effet, si f est localement à croissance lente et si K est un compact sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver $\nu > 0$ tel que $d(x, \partial U)^\nu f(x)$ reste borné sur $K \cap U$. Appliquant les inégalités de Lojasiewicz (cf. [Lo], [H1]) aux ensembles sous-analytiques K et ∂U, on peut trouver $c, \alpha > 0$ tels que $d(x, K \cap \partial U) \leq cd(x, \partial U)^\alpha$ pour tout $x \in K$, d'où $d(x, K \cap \partial U)^{\nu/\alpha} f(x)$ reste borné sur $K \cap U$. La réciproque est triviale.

L'hypothèse de sous-analyticité de U est essentielle : par exemple sur l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |\operatorname{Im} z| < \exp(-1/\operatorname{Re} z),\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ de $\mathbb{C}$, la fonction $f(z) = \exp(1/z)$ vérifie $d(z, \partial U)\ |f(z)| \leq 1$ mais ne vérifie pas la propriété du lemme pour $K = [0, 1]$.

Remarque 1.5. — Soit M une variété analytique réelle, soient f_j, $1 \leq j \leq \ell$ des fonctions analytiques sur M, Z le sous-ensemble analytique $Z := \{f_1 = \cdots = f_\ell = 0\}$ et $U = M \setminus Z$. Posons $\varphi = \sum |f_j|^2$. Alors une fonction continue f sur U est localement à croissance lente si et seulement si :

$$(*)\qquad \begin{cases} \text{Pour tout compact } K \subset M \text{ il existe } \nu > 0 \\ \text{tel que } \varphi(x)^\nu f(x) \text{ est bornée sur } K \cap U. \end{cases}$$

En effet, on peut supposer $M \subset \mathbb{R}^n$, et si d est la distance euclidienne et K un compact de M on peut trouver $c, c', \alpha > 0$ tels que

$$cd(x, Z)^\alpha \leq \varphi(x) \leq c'd(x, Z)^2,$$

la première inégalité résultant des inégalités de Lojasiewicz, et la deuxième de la formule des accroissements finis.

C'est cette caractérisation (*) que DELIGNE (*loc. cit.*) donne comme définition de la croissance modérée de f le long de Z.

1.3. — Notons comme plus haut X une variété analytique complexe et $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique, U connexe. Soit $p : U^* \to U$ un revêtement universel de U. Paraphrasant DELIGNE (*loc. cit.*) on donne les définitions suivantes. Disons qu'un sous-ensemble $P \subset U^*$ est une *partie d'argument borné* s'il existe des ensembles compacts sous-analytiques $K_1, ..., K_\ell$ dans X tels que pour tout i, $K_i \cap U$ est simplement connexe et il existe un relèvement K_i^* de $K_i \cap U \hookrightarrow U$ tel que $P \subset \bigcup_{1\leq i\leq \ell} K_i^*$.

DÉFINITION 1.6. — Soit $f \in \Gamma(U^*; \mathcal{O})$. On dit que la fonction (holomorphe multiforme) f est de *classe de Nilsson* si :

(i) f est de détermination finie et

(ii) il existe une norme adaptée à ∂U, $\varphi : U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, telle que pour toute partie d'argument borné $P \subset U^*$ il existe $\nu > 0$ telle que :

$$f(x) = \mathrm{O}\big[\varphi\big(p(x)\big)^{\nu}\big] \quad \text{sur } P.$$

Cette définition ne dépend pas du choix d'une norme adaptée à U.

LEMME 1.7. — *Soit U un ouvert sous-analytique de $X = \mathbb{R}^N$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de U tel que :*

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \bullet \ \textit{tout } V \in \mathcal{V} \textit{ est contractile, relativement} \\ \quad \textit{compact et sous-analytique dans } X, \\ \bullet \ \mathcal{V} \textit{ est localement fini sur } X. \end{cases}$$

Démonstration. — Comme U est réunion localement finie d'ouverts contractiles, sous-analytiques dans X et relativement compacts dans U, il suffit de montrer la propriété au voisinage de $x \in \partial U$. Utilisons le théorème de rectilinéarisation de Hironaka [H1]. On peut trouver des applications analytiques $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $1 \leq i \leq \ell$, telles que :

(i) $\bigcap_{1 \leq i \leq \ell} f_i(B)$ est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^N$, où B désigne la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$;

(ii) $f_i^{-1}(\partial U)$ est une réunion finie de quadrants;

(iii) $f_{i| \mathbb{R}^N \setminus f_i^{-1}(\partial U)}$ est un plongement ouvert dans $\mathbb{R}^N$.

Comme $f_i^{-1}(\partial U)$ est une réunion finie de quadrants fermés, on peut recouvrir l'ouvert $\Omega_i = \mathbb{R}^N \setminus f_i^{-1}(\partial U)$ par une réunion finie de quadrants ouverts, soit $\Omega_i = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \Omega_{i,j}$, où $\Omega_{i,j}$ est un quadrant ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'ouvert $V_{i,j} = f_i(\Omega_{i,j})$ est contractile, sous-analytique dans $\mathbb{R}^N$ et on a, pour chaque i, j tel que $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq i \leq k$, ou bien $V_{i,j} \subset U$ ou bien $V_{i,j} \subset \mathbb{R}^N \setminus \overline{U}$, et d'autre part $\mathbb{R}^N \setminus \partial U = \cup\, V_{i,j}$. Alors les ouverts $V'_{i,j} = U \cap f_i(\Omega_{i,j} \cap B)$, $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq i \leq k$, satisfont aux hypothèses. $\square$

Revenons à la situation du début du § 1.3 et remarquons alors que si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert localement fini de U satisfaisant à la condition (1.1), une partie $P \subset U^*$ est d'argument borné si et seulement si l'on peut écrire $P \subset \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} V_i^*$ avec $V_i \in \mathcal{V}$ et V_i^* un relèvement de V_i (pour chaque $V \in \mathcal{V}$ considérer une triangulation sous-analytique de $\overline{V}$ qui induise une triangulation de ∂V).

En particulier, si U est simplement connexe, la définition 1.3 coïncide avec la définition 1.6 en vertu du LEMME 1.4.

THÉORÈME 1.8. — *Soient L un système local sur U et*

$$f \in \Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(j_!\, L, \mathcal{O}_X)\big)$$

une fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur U. Alors f est de classe de Nilsson si et seulement si $f \in \Gamma(X; H^0 RH_X(j_!\, L))$.

(Comme L est un système local, le faisceau $j_!\, L$ est $\mathbb{R}$-constructible et $RH_X(j_!\, L)$ a un sens.)

Démonstration. — Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert localement fini de U satisfaisant à (1.1). Montrons d'abord le :

LEMME 1.9. — *Soit f une fonction holomorphe multiforme de détermination finie sur U, i.e. $f \in \Gamma(X; \mathcal{H}om(j_!\, L, \mathcal{O}_X))$ où L est un système local sur U. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est de classe de Nilsson.*

(ii) *Pour tout $V \in \mathcal{V}$, toute détermination holomorphe f_V de f sur V est à croissance lente sur V.*

(iii) *Pour tout $V \in \mathcal{V}$, toute détermination holomorphe f_V de f sur V est prolongeable comme distribution à X.*

(iv) *Pour tout $V \in \mathcal{V}$ et toute détermination holomorphe f_V de f sur V on a $f_V \in \Gamma(X; H^0 RH_X(L_V))$.*

Démonstration du Lemme. — L'implication (i) $\Rightarrow$(ii) résulte de ce que tout relèvement de $V \in \mathcal{V}$ est une partie d'argument borné, et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) de la remarque qui suit la démonstration du LEMME 1.7. Les équivalences (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) résultent de la PROPOSITION 4.3 de l'appendice, parce que L_V est un faisceau constant de rang fini (V est contractile). $\square$

Fin de la démonstration du Théorème 1.8. — Représentons L par le complexe borné F associé par définition au nerf du recouvrement $\mathcal{V}$ (= le complexe de Čech associé), i.e.

$$L \simeq H^0(F^0 \leftarrow F^1 \leftarrow \cdots)$$

où $F^0 = \bigoplus_{V \in \mathcal{V}} L_V$, $F^1 = \bigoplus_{V,V' \in \mathcal{V}} L_{V \cap V'}, \ldots$

Le foncteur $j_!$ étant exact, on a $j_!\, L \simeq H^0(j_!\, F^0 \leftarrow j_!\, F^1 \leftarrow \cdots)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\Gamma\big(X; \mathcal{H}om(j_!\, L, \mathcal{O}_X)\big)\\
&\qquad \simeq \ker\big\{\Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(j_!\, F^0, \mathcal{O}_X)\big) \longrightarrow \Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(j_!\, F^1, \mathcal{O}_X)\big)\big\}\\
&\qquad = \ker\Big\{\bigoplus_{V \in \mathcal{V}} \Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(L_V, \mathcal{O}_X)\big)\\
&\qquad\qquad\qquad \longrightarrow \bigoplus_{V,V' \in \mathcal{V}} \Gamma\big(X;\, \mathcal{H}om(L_{V \cap V'}, \mathcal{O}_X)\big)\Big\},
\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{V}$ est localement fini sur X. Soit $\mathrm{Nils}(L)$ le sous-espace des fonctions de classe de Nilsson de $\Gamma(X;\mathcal{H}om(j_!\,L,\mathcal{O}_X))$. Vu le lemme précédent et le fait que $\mathcal{V}$ est localement fini sur X, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Nils}(L) = \ker\Big\{ &\bigoplus_{V\in\mathcal{V}} \Gamma\big(X; H^0RH_X(L_V)\big) \\ &\qquad\longrightarrow \bigoplus_{V,V'\in\mathcal{V}} \Gamma\big(X; H^0RH_X(L_{V\cap V'})\big)\Big\} \\ &= \ker\big\{\Gamma\big(X;H^0RH_X(j_!\,F^0)\big)\longrightarrow \Gamma\big(X;H^0RH_X(j_!\,F^1)\big)\big\} \\ &= \Gamma\big(X;H^0RH_X\big(H^0(j_!\,F^0\leftarrow j_!\,F^1\leftarrow\cdots)\big)\big) \\ &= \Gamma\big(X;H^0RH_X(j_!\,L)\big),\end{aligned}$$

$H^0RH_X(\,\cdot\,)$ étant exact à gauche sur $\mathbb{R}-c(X_{\mathbb{R}})$. $\square$

Remarque 1.10. — Si $\partial U = Y$ est un sous-ensemble analytique complexe de X, on sait que la condition de Nilsson est générique, i.e. une fonction holomorphe multiforme de détermination finie f sur U est de classe de Nilsson si et seulement si :

Pour tout V ouvert sous-analytique dans X, simplement connexe, tel que $V\subset U$, $V\subset\subset X$ et $\forall\, x\in \overline{V}\cap Y_{\mathrm{reg}}$, toute détermination holomorphe f_V de f sur V est à croissance lente en x, où Y_{reg} désigne la partie lisse de Y (cf. [D], [K-K] et [Mal] où la question est traitée de manière limpide en montrant que $H^0_{Y\setminus Y_{reg}}(j_*(DL\otimes\mathcal{O}_U)/H^0RH_X(j_!\,L)) = 0$ grâce au fait que $H^0RH_X(j_!\,L)$ est localement un Module projectif de rang fini sur l'Anneau des fonctions méromorphes à pôles sur Y).

On n'utilisera pas ici cette caractérisation (le THÉORÈME 1.8 en ramènerait du reste la démonstration au cas à croisement normal).

Remarquons aussi que $RH_X(j_!\,L)$ est concentré en degré 0 dans le cas complexe et que dans ce cas le THÉORÈME 1.8 est bien connu ; en effet, vu [K-K] et [K1], $H^0RH_X(j_!\,L)\simeq RH_X(j_!\,L)$ est le $\mathcal{D}$-module de Deligne des sections de classe de Nilsson de $j_*(DL\otimes\mathcal{O}_U)$.

Pour traduire nos résultats en termes de fonctions le lemme suivant sera utile, qui précise la définition 1.1.

LEMME 1.11. — *Soient L un faisceau localement constant sur U et $f\in\Gamma(X;\mathcal{H}om(j_!\,L,\mathcal{O}_X))$. Supposons f de détermination finie (resp. f uniforme) sur U.*

Alors il existe un système local (resp. un faisceau constant de rang 1) L' et un morphisme surjectif $L\to L'$ tel que :

(i) $f\in\Gamma(X;\mathcal{H}om(j_!\,L',\mathcal{O}_X))\hookrightarrow\Gamma(X;\mathcal{H}om(j_!\,L,\mathcal{O}_X))$.

(ii) *$f \in \Gamma(X; H^0 RH_X(j_! L'))$ si et seulement si f est de classe de Nilsson.*

(iii) *Si de plus $U = X \setminus Y$ où Y est une hypersurface complexe, alors f est de monodromie locale quasi-unipotente, si et seulement si $j_! L'$ est un faisceau constructible quasi-unipotent.*

Démonstration

(i) Posons $\mathcal{M} = \mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_U)$ et soit $\mathcal{M}' = \mathcal{D}_U^\infty f$ le sous-$\mathcal{D}_U^\infty$-module de $\mathcal{M}$ engendré par f, où $\mathcal{D}_U^\infty$ désigne le faisceau des opérateurs d'ordre infini sur U (cf. [S-K-K]). Comme $f \in \Gamma(U; \mathcal{M})$ est de détermination finie (resp. est uniforme) on a $\mathcal{M}' = \mathcal{H}om(L', \mathcal{O}_U)$ où L' est un système local (resp. un faisceau constant de rang 1). On a les morphismes canoniques :

$$L \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U^\infty}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U^\infty}(\mathcal{M}', \mathcal{O}_U) \simeq L'$$

(le premier n'étant un isomorphisme que si L est un système local).

Soit K le conoyau de $L \to L'$. Comme la suite

$$0 \to \mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathcal{M}' \hookrightarrow \mathcal{M}$$

est exacte, on a $\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_U) = 0$ donc $K = 0$ puisque K est un système local.

(ii) résulte immédiatement du THÉORÈME 1.8.

(iii) Rappelons (cf. [K2]) qu'un faisceau constructible

$$F \in \mathrm{Ob}\big(\mathbb{R} - c(X)\big)$$

est dit *quasi-unipotent* si, pour tout $x \in X$ et toute application holomorphe $\varphi : D \to X$ du disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$ dans X tels que $\varphi(0) = x$, la monodromie de $\varphi^{-1}F$ autour de l'origine est quasi-unipotente (i.e. ses valeurs propres sont des racines de l'unité). Comme $\mathcal{D}_U^\infty f = DL' \otimes \mathcal{O}_U$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est de monodromie locale quasi-unipotente,
- $j_! DL'$ est quasi-unipotent,
- $j_! L'$ est quasi-unipotent. $\square$

2. Utilisation de la géométrie microlocale.

On va particulariser des propriétés de micro-support de Kashiwara et Schapira qui vont être essentielles pour la suite (cf. [K-S1], [K-S2]).

2.1. — Soient X une variété complexe, $\pi : T^*X \to X$ le fibré cotangent et $\overset{\circ}{\pi}$ la restriction de π à $T^*X \setminus T_X^*X$. On identifie comme d'habitude

$(T^*X)_{\mathbb{R}}$ à $T^*(X_{\mathbb{R}})$ en identifiant la 1-forme canonique de $T^*(X_{\mathbb{R}})$ à la partie réelle de la 1-forme canonique de T^*X.

Soit Y une autre variété complexe et $f : Y \to X$ un morphisme complexe lisse.

On désigne par ρ et ϖ les applications canoniques associées

$$T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \underset{X}{\times} T^*X \xrightarrow{\varpi} T^*X$$

(ici ρ est une immersion fermée).

Soient $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert sous-analytique connexe de Y, $S = \partial U$ et $\tilde{f} = f \circ j$, la situation se résumant dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

On fait l'hypothèse que f est propre sur $\overline{U}$ dans tout le paragraphe.

DÉFINITION 2.1. — Soit L un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-vectoriels sur U. On pose :

$$Z_L = \mathring{\pi}\big((SS(R\tilde{f}_!L) \cup SS(R\tilde{f}_*L)) \setminus T^*_X X\big),$$

et on appelle Z_L le *contour apparent de* L (quand $L = \mathbb{C}_U$ on dira simplement le *contour apparent de* U).

PROPOSITION 2.2. — *Soit L un faisceau localement constant* (*resp. un système local*) *sur U. Alors* :

(i) $j_!\, L \in \mathrm{Ob}\big(w - \mathbb{R} - c(Y_{\mathbb{R}})\big)$ $\big($resp. $j_!\, L \in \mathrm{Ob}(\mathbb{R} - c(Y_{\mathbb{R}}))\big)$,

$Rj_*L \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{w-\mathbb{R}-c}(Y_{\mathbb{R}})\big)$ $\big($resp. $Rj_*L \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{\mathbb{R}-c}(Y_{\mathbb{R}})\big)\big)$.

(ii) $R\tilde{f}_!\, L, R\tilde{f}_*L \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{w-\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}})\big)$

$\big($resp. $R\tilde{f}_!\, L, R\tilde{f}_*L \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}})\big)\big)$.

(iii) *Si $S := \partial U$ est un ensemble analytique complexe, on peut remplacer $w - \mathbb{R} - c$ par $w - \mathbb{C} - c$* (*resp.* $\mathbb{R} - c$ *par* $\mathbb{C} - c$) *dans* (i) *et* (ii).

(iv) *Si S est un ensemble analytique complexe et L un système local tel que $j_!\, L$ est constructible quasi-unipotent alors $R^k\tilde{f}_!\, L$ et $R^k\tilde{f}_*L$ sont $\mathbb{C}$-constructibles quasi-unipotents pour tout k.*

(v) *Z_L est un sous-ensemble fermé sous-analytique de codimension* (*réelle*) ≥ 1 *dans* $X_{\mathbb{R}}$.

(vi) *Si S est analytique complexe, Z_L est un sous-ensemble analytique complexe de codimension (complexe) ≥ 1 dans X.*

(vii) *$R^k \tilde{f}_! L_{|X\setminus Z_L}$ et $R^k \tilde{f}_* L_{|X\setminus Z_L}$ sont des faisceaux localement constants (resp. des systèmes locaux).*

La démonstration (cf. 1.3) va consister en des majorations de micro-support et utilise de manière essentielle l'opération $\widehat{+}$ de Kashiwara et Schapira que l'on rappelle ci-dessous en 2.2 pour la commodité du lecteur, ainsi que le résultat suivant (cf. [K-S2] proposition 8.3.11) :

(2.1) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } \Lambda \subset T^*Y \text{ tel que } \varpi \text{ est propre sur } \rho^{-1}(\Lambda).\\ \text{Si } \Lambda \text{ est conique fermé sous-analytique et } \mathbb{R}\text{-isotrope}\\ \text{(resp. } \mathbb{C}^\times\text{-conique fermé analytique complexe et}\\ \mathbb{C}\text{-isotrope), il en est de même de } \varpi\rho^{-1}(\Lambda) \ (\mathbb{C}^\times \text{ dési-}\\ \text{gnant } \mathbb{C}\setminus\{0\}).\end{array}\right.$

2.2. — Soit M une variété analytique réelle, $\pi : T^*M \to M$ son fibré cotangent. Rappelons les points suivants (cf. ([K-S1], [K-S2]) :

1) L'opération $\widehat{+}$ est définie, pour A, B sous-ensembles coniques de T^*M par

$$A \widehat{+} B = T^*M \cap C(A, B^a),$$

où B^a désigne l'antipodal de B et $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ le cône normal.

2) Soient $Z \subset M$ un sous-ensemble sous-analytique et $\mathcal{S} = (Z_\alpha)_\alpha$ une stratification sous-analytique de Z. On dit que $\mathcal{S}$ est une *μ-stratification* si $Z_\alpha \cap \overline{Z}_\beta \neq \emptyset$ implique $Z_\alpha \subset \overline{Z}_\beta$ et

$$(T^*_{Z_\alpha}M \widehat{+} T^*_{Z_\beta}M) \cap \pi^{-1}(Z_\alpha) \subset T^*_{Z_\alpha}M, \quad \forall\, \alpha, \beta.$$

On sait alors que $\bigcup_\alpha T^*_{Z_\alpha}M$ est un sous-ensemble conique fermé sous-analytique isotrope de T^*M et si de plus $M = X_{\mathbb{R}}$, X variété complexe, Z ensemble complexe et $\mathcal{S}$ stratification analytique complexe, alors $\bigcup_\alpha T^*_{Z_\alpha}X$ est $\mathbb{C}^\times$-conique fermé analytique $\mathbb{C}$-isotrope dans T^*X.

3) Soit $F \in \mathrm{Ob}(D^b(M))$. Le micro-support $SS(F)$ de F est un sous-ensemble conique fermé involutif (au sens de [K-S1]) de T^*M, et les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $F \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{w-\mathbb{R}-c}(M)\big)$,
- $SS(F)$ est inclus dans un ensemble conique fermé sous-analytique isotrope de T^*M,
- $SS(F)$ est conique fermé sous-analytique lagrangien dans T^*M.

Si de plus $M = X_{\mathbb{R}}$, X variété complexe, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $F \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{w-\mathbb{C}-c}(X)\big)$,
- $F \in \mathrm{Ob}\big(D^b_{w-\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}})\big)$ et $SS(F)$ est $\mathbb{C}^\times$-invariant,
- $SS(F)$ est conique fermé analytique $\mathbb{C}$-lagrangien.

Remarque 2.3. — On sait qu'une stratification de Whitney est une μ-stratification si et seulement si elle vérifie la condition (w) de Verdier (cf. TROTMAN [Tr]). De plus si $M = X_{\mathbb{R}}$, X variété complexe, toute stratification de Whitney complexe vérifie la condition (w) (cf. TEISSIER [T]), donc est une μ-stratification.

2.3. — Ce numéro va démontrer la PROPOSITION 2.2. Si $\mathcal{S} = (Y_\alpha)_\alpha$ est une μ-stratification de $\overline{U}$ on notera $\Lambda(\mathcal{S}) = \bigcup_\alpha T^*_{Y_\alpha} Y$, et on dira que $\mathcal{S}$ est *subordonnée à* ∂U si $\mathcal{S}$ induit une (μ-) stratification de ∂U (on sait qu'il en existe).

LEMME 2.4. — *Soit $\mathcal{S}$ une μ-stratification de $\overline{U}$ subordonnée à ∂U. Alors :*

(i) $SS(j_!\, L) \cup SS(Rj_* L) \subset \Lambda(\mathcal{S})$.

(ii) $SS(R\tilde{f}_! L) \cup SS(R\tilde{f}_* L) \subset \varpi\rho^{-1}(\Lambda(\mathcal{S}))$.

Démonstration du Lemme. — Comme $j_!\, L_{|\,\partial U} = 0$, $j_!\, L$ est localement constant sur les strates de $\mathcal{S}$ et on déduit de la proposition 8.4.1 de [K-S2] l'inclusion

$$SS(j_!\, L) \subset \Lambda(\mathcal{S})$$

(c'est déjà vérifié si $\mathcal{S}$ est seulement Whitney, cf. [K-S1]).

D'autre part, pour tout $F \in \mathrm{Ob}(D^b(Y))$ on a :

$$SS(R\Gamma_U F) \subset SS(\mathbb{C}_U)^a \mathbin{\widehat{+}} SS(F)$$

(théorème 5.2.2 de [K-S1]).

Comme $Rj_* L = Rj_* j^{-1} j_!\, L = R\Gamma_U j_!\, L$ on tire des formules précédentes

$$SS(Rj_* L) \subset SS(\mathbb{C}_U)^a \mathbin{\widehat{+}} SS(j_!\, L) \subset \Lambda(\mathcal{S})^a \mathbin{\widehat{+}} \Lambda(\mathcal{S}) = \Lambda(\mathcal{S})$$

puisque $\Lambda(\mathcal{S}) = \Lambda(\mathcal{S})^a$ et que $\Lambda(\mathcal{S})$ est stable par $\widehat{+}$ ($\mathcal{S}$ étant une μ-stratification). D'où (i).

Soit $F = j_!\, L$ ou bien $F = Rj_* L$. Comme $f : Y \to X$ est propre sur $\mathrm{supp}(F) \subset \overline{U}$ on a

$$SS(Rf_* F) \subset \varpi\rho^{-1}\big(SS(F)\big)$$

(cf. [K-S1], [K-S2]) et comme $R\tilde{f}_!L = Rf_*j_!\,L$ et $R\tilde{f}_*L = Rf_*Rj_*L$, (ii) résulte de (i) et de la formule ci-dessus. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.2.

(i), (ii), (iii) Fixons une μ-stratification sous-analytique $\mathcal{S}$ de $\overline{U}$ subordonnée à ∂U que l'on choisit analytique complexe si ∂U est analytique complexe. Comme ϖ est propre sur $\rho^{-1}\Lambda(\mathcal{S}) \subset \overline{U} \times_X T^*X$, $\Lambda(\mathcal{S})$ vérifie les hypothèses de (2.1), ou de (2.1) resp dans le cas où ∂U est analytique complexe. Alors (i), (ii) et (iii) résultent des caractérisations rappelées en 2.2 grâce au LEMME 2.4 (la propreté de f sur $\overline{U}$ assurant les conditions de finitude ad hoc quand L est un système local).

(iv) Si L est un système local et $j_!\,L$ quasi-unipotent, alors

$$Rj_*L = Dj_!\,DL$$

est à cohomologies quasi-unipotentes et, f étant propre,

$$R\tilde{f}_*L = Rf_*Rj_*L$$

est à cohomologies quasi-unipotentes d'après KASHIWARA [K2]. De même

$$R\tilde{f}_!L = Rf_!j_!\,L$$

est à cohomologies quasi-unipotentes.

(v) et (vi) Le point (ii) assure que $SS(\tilde{f}_*L)$ (resp. $SS(\tilde{f}_!L)$) est conique fermé sous-analytique $\mathbb{R}$-isotrope (donc de dimension réelle $\leq$ à la dimension réelle de X) et $\mathbb{R}^\times$-homogène, d'où (v).

Si S est un ensemble complexe, on déduit de manière analogue (vi) de (iii).

(vii) On a $(SS(R\tilde{f}_!L) \cup SS(R\tilde{f}_*L)) \cap \pi^{-1}(X \setminus Z_L) \subset T^*_X X$ par définition de Z_L, d'où, vu [K-S1], pour tout k, $R^k\tilde{f}_!L_{|\,X\setminus Z_L}$ et $R^k\tilde{f}_*L_{|\,X\setminus Z_L}$ sont des faisceaux localement constants qui sont des systèmes locaux si L en est un. $\square$

Remarque 2.5

(i) Soit $\mathcal{S}_1$ une μ-stratification de ∂U. Alors $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \{U\}$ est une μ-stratification de $\overline{U}$ subordonnée à ∂U (pour toute strate Y_α de $\mathcal{S}_1$ on a $T^*_{Y_\alpha}Y \mathbin{\widehat{+}} U \subset \overline{T^*_{Y_\alpha}Y}$ et $\overline{T^*_{Y_\alpha}Y} \cap \pi^1(Y_\alpha) = T^*_{Y_\alpha}Y$ puisque Y_α est une sous-variété). Donc si L est un faisceau localement constant sur U on a :

$$Z_L \subset \mathring{\pi}\big(\varpi\rho^{-1}\big(\Lambda(\mathcal{S}_1)\big)\big).$$

(ii) Si $S := \partial U$ est une sous-variété réelle on peut prendre $\mathcal{S}_1 = \{S\}$ et alors $\mathring{\pi}(\varpi\rho^{-1}(T^*_S X))$ est la projection sur X des codirections horizontales de $T^*_S X$, i.e. c'est le contour apparent usuel de S.

(iii) En général, on n'aura pas coïncidence entre $SS(j_! L)$ et $SS(\mathbb{C}_U)$. Par exemple, soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \Big\{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \sqrt{x^2+y^2} < t < 2\sqrt{x^2+y^2}\Big\}.$$

On a $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$ et si L est le système local de rang 1 sur U dont l'exposant de monodromie est $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, on vérifie alors $(0; -\mathrm{d}t) \notin SS(j_! L)$ mais $(0; -\mathrm{d}t) \in SS(\mathbb{C}_U)$ (cf. [K2] et [K-S2]). (On obtient un contre-exemple dans un ouvert sous-analytique de $(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$ en rajoutant un paramètre dans le précédent.)

3. Intégration et prolongement analytique.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés complexes, X et Y étant de dimensions (complexes) respectives d_X et d_Y. On note Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum sur X et

$$\Omega_{Y/X} = \Omega_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X$$

le faisceau sur Y des formes relatives de degré maximum; $\Omega_{Y/X}$ est localement libre donc plat sur $\mathcal{O}_Y$. On pose $d = d_Y - d_X$.

3.1. Familles de cycles relatifs.

Un cycle relatif de dimension maximum au-dessus de $x \in X$ est par définition une classe d'homologie $\gamma_x \in H_d(f^{-1}(x); \mathbb{C}_{f^{-1}(x)})$. Rappelons que si M est une variété réelle de dimension n, on a pour tout j un isomorphisme $H_j(M; \mathbb{C}_M) \simeq H_c^{n-j}(M; \mathbb{C}_M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{or}_M)$, dans lequel or_M est le faisceau d'orientation de M (dualité de Poincaré). Donc ici, pour $M = X_{\mathbb{R}}$ et $j = d$ on a

$$\gamma_x \in H_d\big(f^{-1}(x); \mathbb{C}_{f^{-1}(x)}\big) \simeq H_c^d\big(f^{-1}(x); \mathbb{C}_{f^{-1}(x)}\big) = H^d(Rf_! \, \mathbb{C}_X)_x$$

(rappelons qu'on considère une variété complexe comme orientée).

Une famille continue de cycles relatifs (de dimension maximum) au-dessus de X est, par définition, une section globale $\gamma \in \Gamma(X; H^d(Rf_! \, \mathbb{C}_X))$. Si $U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert on dira, par abus de langage, que γ est *tracé dans* U si γ est dans l'image de

$$\Gamma(X; H^d(Rf_! \, \mathbb{C}_U)) \longrightarrow \Gamma\big(X; H^d(Rf_! \, \mathbb{C}_X)\big),$$

et on dira alors qu'un ensemble contenant U est un *voisinage* de γ.

Plus généralement, on appellera *famille continue de cycles relatifs de dimension maximum, multiformes*, une section globale

$$\gamma \in \Gamma(X; H^d(Rf_! L)),$$

où L est un faisceau localement constant sur Y.

3.2. Intégration sur une famille continue de cycles relatifs.
Soit $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert de Y. On note $\tilde{f} = f \circ j$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit L un faisceau localement constant sur U.*
(i) *On a un morphisme canonique*

$$\Gamma\big(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X})\big) \otimes \Gamma\big(X; H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)\big) \\ \longrightarrow \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)\big),$$

noté $\omega \otimes \gamma \mapsto \operatorname{Int}_\gamma(\omega)$.
(ii) $\operatorname{Int}_\gamma(\omega)$ *ne dépend pas du choix d'un ouvert U dans lequel γ est tracé.*
(iii) $\operatorname{Int}_\gamma(\omega)$ *se calcule fibre à fibre au sens suivant. Si $x \in X$, on a un morphisme canonique*

$$\Gamma\big(\tilde{f}^{-1}(x); \mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X})\big) \otimes H^d_c\big(\tilde{f}^{-1}(x); \mathbb{C}_U\big) \\ \longrightarrow \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)_x$$

et ce morphisme est compatible à (i) *vis à vis de la restriction.*
(iv) *Si $L = \mathbb{C}_U$ (i.e. ω est uniforme sur U) alors* $\iota(\operatorname{Int}_\gamma(\omega)) = \int_\gamma \omega$.

On a désigné par $\iota : \Gamma(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* \mathbb{C}_U, \mathcal{O}_X)) \to \Gamma(X; \mathcal{O}_X)$ le morphisme induit par $\mathbb{C}_X \to \tilde{f}_* \mathbb{C}_U$, et par $\int_\gamma \omega$ l'intégrale de chaîne usuelle.

Démonstration.
(i) Établissons d'abord le morphisme

$$Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}) \otimes Rf_! \mathbb{C}_U[d] \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X). \tag{3.1}$$

On peut écrire la chaîne de morphismes

$$R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}) \otimes R\tilde{f}_! \mathbb{C}_U[d] \longrightarrow R\tilde{f}_! R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X})[d] \\ \longrightarrow R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}_* L, R\tilde{f}_! \Omega_{U/X}[d]\big) \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X),$$

où la dernière flèche provient du morphisme résidu $R\tilde{f}_! \Omega_{U/X}[d] \to \mathcal{O}_X$, d'où le morphisme

$$(3.2) \qquad R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}) \otimes R\tilde{f}_! \mathbb{C}_U[d] \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)$$

qui est équivalent à (3.1) puisque

$$R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}) = Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}).$$

Posons $\mathcal{F} = Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X})$ et $\mathcal{G} = Rf_! \mathbb{C}_U[d]$. On obtient le morphisme

$$(3.3) \qquad H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{G}) \to \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)$$

par la composition des suivants :

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{G}) &\longrightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \\ &\longrightarrow H^0\big(R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)\big) \longrightarrow \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

où le deuxième est la cohomologie en degré 0 de (3.1). Alors (i) résulte de la composition des morphismes

$$\begin{aligned} &\Gamma\big(X; f_* \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X})\big) \otimes \Gamma\big(X; H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)\big) \\ &\quad \xleftarrow{\sim} \Gamma\big(X; H^0(\mathcal{F})\big) \otimes \Gamma\big(X; H^0(\mathcal{G})\big) \\ &\quad \longrightarrow \Gamma\big(X; H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{G})\big) \\ &\quad \xrightarrow{\Gamma(X;(3.3))} \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)\big). \end{aligned}$$

(ii) Notons $j' : U' \hookrightarrow Y$ l'injection d'un ouvert $U' \subset U$ et $\tilde{f}' = f \circ j'$. On peut écrire les morphismes :

$$\begin{aligned} &R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}) \otimes R\tilde{f}_! \mathbb{C}_{U'}[d] \\ &\quad \longrightarrow R\tilde{f}_! \big(j'_! j'^{-1} R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}[d])\big) \\ &= R\tilde{f}'_! R\mathcal{H}om\big(L_{|U'}, \Omega_{U'/X}[d]\big) \\ &\quad \longrightarrow R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}'_*(L_{|U'}), \mathcal{O}_X\big) \\ &\quad \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

où le dernier morphisme est induit par $\mathrm{Id} \to j'_* j'^{-1}$.

D'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
R\tilde{f}'_* R\mathcal{H}om(L_{|_{U'}}, \Omega_{U'/X}) \otimes R\tilde{f}'_! \mathbb{C}_{U'}[d] & \longrightarrow & R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}'_*(L_{|_{U'}}), \mathcal{O}_X\big) \\
\uparrow & & \| \\
R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X}) \otimes R\tilde{f}_! \mathbb{C}_{U'}[d] & \longrightarrow & R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}'_*(L_{|_{U'}}), \mathcal{O}_X\big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\tilde{f}_* R\mathcal{H}om\big(L, \Omega_{U/X}\big) \otimes R\tilde{f}_! \mathbb{C}_U[d] & \longrightarrow & R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X\big)
\end{array}$$

où les lignes supérieures et inférieures sont données par (i). Si γ est tracé dans U', γ définit une section de $H^d(R\tilde{f}_! \mathbb{C}_{U'})$ et (ii) résulte du diagramme précédent.

(iii) Si $\mathcal{V}$ est une base de voisinages de $x \in X$, en posant

$$\Upsilon_V = \Gamma\big(\tilde{f}^{-1}(V);\ \mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X})\big) \otimes H^d_c(\tilde{f}^{-1}(x); \mathbb{C}_U)$$

$$\Upsilon_x = \Gamma\big(\tilde{f}^{-1}(x);\ \mathcal{H}om(L, \Omega_{U/X})\big) \otimes H^d_c(\tilde{f}^{-1}(x); \mathbb{C}_U)$$

on a un diagramme commutatif

$$(3.4)\qquad \begin{array}{ccc}
\varinjlim_{V \in \mathcal{V}} \Upsilon_V & \longrightarrow & \mathcal{H}om\big(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X\big)_x \\
\downarrow & & \| \\
\Upsilon_x & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)_x
\end{array}$$

où la première ligne provient de la flèche du (i) et la deuxième est établie directement en raisonnant comme dans la démonstration de (i). La flèche verticale est la restriction.

(iv) Le morphisme d'intégration sur un cycle relatif (cf. Leray [L2]) est donné par l'accouplement

$$\omega \otimes \gamma_x \in \Gamma(\tilde{f}^{-1}(x); \Omega_{U/X}) \otimes H_d(\tilde{f}^{-1}(x); \mathbb{C}_U) \longmapsto \int_{\gamma_x} \omega \in \mathcal{O}_{X,x},$$

qui n'est autre que le composé de ι avec la deuxième ligne de (3.4) où l'on fait $L = \mathbb{C}_U$. $\square$

Remarque 3.2. — On prendra garde que, si l'hypothèse d'uniformité du (iv) de la PROPOSITION 3.1 n'est pas satisfaite, $\mathrm{Int}_\gamma(\omega)$ ne calcule pas en général l'intégrale de chaîne usuelle $\int_\gamma \omega$.

Exemple. — Supposons U sous-analytique, f propre sur $\overline{U}$ et soit L un système local sur U. Soient $x_0 \in X \setminus Z_L$, où Z_L est le contour apparent de L défini au § 2, et V un voisinage ouvert de x_0 qui ne rencontre pas Z_L. Alors $\tilde{f}_* L_{|V}$ est un système local (PROPOSITION 2.2); par conséquent $\mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)_{|V} = D(\tilde{f}_* L) \otimes \mathcal{O}_V$. D'autre part, vu l'hypothèse de propreté on a $(R\tilde{f}_* L)_x = R\Gamma(\tilde{f}^{-1}(x); L)$ pour tout x. Prenons alors, par exemple,

$$X = \mathbb{C}_x, \quad Y = X \times \mathbb{P}^1\mathbb{C}, \quad U = X \times \big(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}\big),$$

$f : Y \to X$ la projection et $L = \mathbb{C}_X \boxtimes \mathbb{C}(\alpha)$, où $\boxtimes$ désigne le produit tensoriel externe et $\mathbb{C}(\alpha)$ le système local de rang 1 sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ dont l'exposant de monodromie autour de 0 est $\alpha \in \mathbb{C}$. Ici $Z_L = \emptyset$ et si l'on a choisi $\alpha \notin \mathbb{Z}$ on trouve $(R\tilde{f}_* L)_x = R\Gamma(\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}; \mathbb{C}(\alpha)) = 0$, d'où $\mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X) = 0$.

Soit z la coordonnée de $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$,

$$\omega(x, z) = z^\alpha \mathrm{d}z \in \Gamma\big(Y; \mathcal{H}om(j_!\, L, \Omega_{Y/X})\big)$$

et considérons le cycle relatif $\gamma_x(t) = r(x)\mathrm{e}^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, où $r(x)$ une fonction continue de $x \in X$ telle que $r(x) > 0$. Alors $\mathrm{Int}_\gamma(\omega) = 0$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$), mais l'intégrale de chaîne $\int_\gamma \omega$ ne sera pas holomorphe de la variable x en général (par exemple pour la constante de Ben Johnson $\alpha = 9,79$, suggérée par E. LEICHTNAM).

3.3. Prolongement analytique le long des cycles relatifs.

Soit comme précédemment $f : Y \to X$ un morphisme complexe lisse de codimension d, $j : U \hookrightarrow Y$ une immersion ouverte et $\tilde{f} = f \circ j$.

DÉFINITION 3.3. — Soit L un faisceau localement constant sur U et soit une forme multiforme $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_!\, L, \Omega_{Y/X}))$ fixée sur U. On note

$$\mathrm{Int}(\omega) : H^d(Rf_!\, \mathbb{C}_U) \longrightarrow \mathcal{H}om(\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X) \tag{3.5}$$

le morphisme de faisceaux sur X, $\gamma \mapsto \mathrm{Int}_\gamma(\omega)$, induit par (3.3); c'est donc canoniquement une section globale

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(H^d(Rf_!\, \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X)\big).$$

Plus précisément, (3.3) définit un élément de

$$\begin{aligned}\mathcal{H}om\big(H^0(\mathcal{F})\otimes H^0(\mathcal{G}),\,\mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)\big)\\ =\mathcal{H}om\big(H^0(\mathcal{F}),\,\mathcal{H}om\big(H^0(\mathcal{G})\otimes\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)\big),\end{aligned}$$

et en prenant les sections globales on obtient un élément de :

$$\mathrm{Hom}\big(H^0(\mathcal{F}),\,\mathcal{H}om(H^0(\mathcal{G})\otimes\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)\big).$$

Le choix d'une forme $\omega\in\Gamma(X;H^0(\mathcal{F}))$ définit donc la section globale :

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}(\omega)\in\Gamma\big(X;\,\mathcal{H}om\big(H^0(\mathcal{G})\otimes\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)\big)\\ =\mathrm{Hom}\big(H^0(\mathcal{G}),\,\mathcal{H}om(\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X)\big).\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathrm{Int}(\omega)$ est défini indépendamment de toute hypothèse de propreté et que de ce qui précède on tire le :

COROLLAIRE 3.4. — *Soient L et ω comme dans la définition* 3.3. *Soient $x_0\in X$, $\gamma\in(H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U))_{x_0}$ un germe de d-cycle relatif en x_0 et V un ouvert de X contenant x_0. Supposons que l'on ait :*

(i) *ω est uniforme au voisinage de γ_{x_0},*

(ii) *$H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L$ est un faisceau localement constant sur V.*

Alors $h:=\int_\gamma\omega$ se prolonge en une fonction holomorphe multiforme sur V définie par une détermination de $\mathrm{Int}(\omega)_{|V}$.

En effet il résulte de la PROPOSITION 3.1 et de la définition 3.3 qu'il existe un voisinage W de x_0 tel que $\mathrm{Int}(\omega)_{|W}$ est une fonction holomorphe uniforme et que $\iota(\mathrm{Int}_\gamma(\omega))=\int_\gamma\omega$ sur W.

Remarquons que la condition (ii) est évidemment satisfaite si $\tilde{f}$ est une fibration localement triviale au-dessus de V (cf. le cas particulier intéressant que traite KOBAYASHI dans [Ko] en utilisant une variante du théorème d'isotopie de Thom-Mather, cf. aussi [P2], [V]).

C'est la géométrie microlocale qui assurera dans le § 3.5 l'existence d'ouverts V assez grands, dans le cas propre sur $\overline{U}$ (cf. cependant la variante 3.9).

Pour traiter les intégrales de Nilsson on aura besoin de la version tempérée du morphisme de prolongement analytique que voici :

PROPOSITION 3.5. — *Les notations étant celles de la définition* 3.3, *on fait les hypothèses suivantes :*

- *U est sous-analytique,*

- *f est propre sur $\overline{U}$,*
- *L est un système local,*
- *ω est de classe de Nilsson.*

Alors $\mathrm{Int}(\omega)$ *s'identifie canoniquement à un élément*

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; H^0 RH_X(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L)\big).$$

Démonstration.

1) Remarquons d'abord que sous la seule hypothèse que f est propre sur $\overline{U}$, on peut définir $\mathrm{Int}(\omega)$ de manière plus directe en utilisant le morphisme

$$(3.6) \qquad Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}) \longrightarrow R\mathcal{H}om(Rf_! \mathbb{C}_U[d] \otimes R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X),$$

obtenu en composant les morphismes

$$\begin{aligned} &Rf_! R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}) \longrightarrow R\mathcal{H}om(Rf_* j_! L, Rf_! \Omega_{Y/X}) \\ &\quad \longrightarrow R\mathcal{H}om(R\tilde{f}_! L[d], \mathcal{O}_X) \longrightarrow R\mathcal{H}om(Rf_! \mathbb{C}_U[d] \otimes R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

où l'avant-dernière flèche provient du morphisme résidu et la dernière de la contraction

$$Rf_! \mathbb{C}_U[d] \otimes R\tilde{f}_* L \longrightarrow R\tilde{f}_! L[d]$$

("choix d'un cycle relatif").

Avec les notations figurant dans (3.3), le morphisme (3.6) s'écrit

$$\mathcal{F} \to R\mathcal{H}om(\mathcal{G} \otimes R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X).$$

Alors, par composition des morphismes canoniques

$$\begin{aligned} &H^0(\mathcal{F}) \to H^0 R\mathcal{H}om(\mathcal{G} \otimes R\tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X) \\ &\quad \to \mathcal{H}om\big(H^0(\mathcal{G} \otimes R\tilde{f}_* L), \mathcal{O}_X\big) \to \mathcal{H}om(H^0(\mathcal{G}) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

et en prenant les sections globales, on retrouve $\mathrm{Int}(\omega)$ comme image de $\omega \in \Gamma(X; H^0(\mathcal{F}))$.

2) Sous les hypothèses de la proposition, le faisceau $j_! L$ est $\mathbb{R}$-constructible et (3.6) admet la version tempérée

$$(3.7) \qquad Rf_*\big(RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}\big) \longrightarrow RH_X\big(Rf_! \mathbb{C}_U[d] \otimes R\tilde{f}_* L\big)$$

obtenue par la composition

$$\begin{aligned} Rf_!\big(RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}\big) &\longrightarrow RH_X\big(Rf_* j_! L[d]\big) \\ &\longrightarrow RH_X\big(Rf_! \mathbb{C}_U[d] \otimes R\tilde{f}_* L\big), \end{aligned}$$

où le premier morphisme est l'intégration de Kashiwara (4.1).

On en déduit le morphisme :

$$(3.8)\quad f_*\big(H^0RH_Y(j_!\,L)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/X}\big)\longrightarrow H^0\big(RH_X\big(H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L\big)\big).$$

On a en effet la chaîne de morphismes

$$\begin{aligned} f_!\big(H^0RH_Y(j_!\,L)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/X}\big) & \\ \simeq H^0\big(Rf_!\big(RH_Y(j_!\,L)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/X}\big)\big) & \\ \xrightarrow{H^0((3.7))} H^0\big(RH_X(Rf_!\,\mathbb{C}_U[d]\otimes R\tilde{f}_*L)\big) & \\ \longrightarrow H^0\big(RH_X\big(H^0(Rf_!\,\mathbb{C}_U[d])\otimes\tilde{f}_*L\big)\big), & \end{aligned}$$

d'où (3.8).

Alors le choix d'une forme $\omega\in\Gamma(Y;H^0RH_Y(j_!\,L)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\Omega_{Y/X})$ définit via $\Gamma(X;(3.8))$ une section globale de $\Gamma(X;H^0RH_X(H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L))$, qu'on va provisoirement noter $\mathrm{Int}'(\omega)$.

Comme le diagramme naturel construit sur (3.6) et (3.7) est commutatif et que

$$\begin{aligned} \Gamma\big(X;H^0RH_X(H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L)\big) & \\ \longrightarrow \Gamma\big(X;\mathcal{H}om\big(H^d(Rf_!\,\mathbb{C}_U)\otimes\tilde{f}_*L,\mathcal{O}_X\big)\big) & \end{aligned}$$

est injectif, on identifie $\mathrm{Int}'(\omega)$ à $\mathrm{Int}(\omega)$. ∎

3.4. Théorème principal et variations sur des thèmes de Nilsson.

Les notations étant celles du § 3.3, on est maintenant en mesure de donner un théorème général sous des hypothèses géométrique simples.

THÉORÈME 3.6. — *Supposons l'ouvert U sous-analytique et $f:Y\to X$ propre sur $\overline{U}$. Soit ω une forme relative (de degré maximum d) holomorphe multiforme, i.e. $\omega\in\Gamma(Y;\mathcal{H}om(j_!\,L,\Omega_{Y/X}))$, où L est un faisceau localement constant sur U et soit γ_{x_0} un germe de d-cycle relatif défini au voisinage de $x_0\in X$ et tracé dans U. On suppose réalisée la condition suivante :*

$$(3.9)\qquad \omega \text{ est uniforme sur un voisinage de } \gamma_{x_0}$$

Alors :

(i) *L'application définie au voisinage de x_0 par $x\mapsto h(x):=\int_{\gamma_x}\omega$ est holomorphe et se prolonge en fonction holomorphe multiforme sur $X\setminus Z$,* *où* $Z = Z_L \cup Z_{\mathbb{C}_U}$, *la réunion des contours apparents de* U *et* L (*cf. définition* 2.1), *est un ensemble fermé sous-analytique de codimension* ≥ 1.

(ii) *Si* ω *est de détermination finie* (*resp. de classe de Nilsson*) *il en est respectivement de même de* h.

(iii) *Si* $U = Y \setminus S$, *où* S *est une hypersurface complexe de* Y, *alors* Z *est un ensemble complexe de codimension* (*complexe*) ≥ 1. *Si de plus* ω *est de monodromie locale quasi-unipotente, il en est de même de* h.

Démonstration.

(i) Les assertions sur Z de (i) et (iii) résultent de la PROPOSITION 2.2, dont on déduit également que $H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L$ appartient à $w-\mathbb{R}-c(X)$ et que $\tilde{L} := \big(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L\big)_{| X \setminus Z}$ est un faisceau localement constant.

La restriction de $\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma(X; \mathcal{H}om(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X))$ à $X \setminus Z$ est donc une fonction holomorphe multiforme.

D'autre part on a $h = \int_\gamma \omega = \mathrm{Int}_\gamma(\omega)$ au voisinage de x_0 (PROPOSITION 3.1 (iv)), et, comme Z est de codimension ≥ 1, on peut supposer que $x_0 \notin Z$. On en déduit que h est holomorphe (uniforme) au voisinage de x_0 et coïncide avec une détermination de $\mathrm{Int}(\omega)_{| X \setminus Z}$ (COROLLAIRE 3.4).

Plus précisément, notant $i : X \setminus Z \hookrightarrow X$, définissons $\int \omega$ comme l'image de $\mathrm{Int}(\omega)$ par le morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}\big(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L, \mathcal{O}_X\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}(i_! \tilde{L}, \mathcal{O}_X) \tag{3.10}$$

induit par $i_! i^{-1} \to \mathrm{Id}$. Ce qui précède identifie h à une détermination de $\int \omega$.

(ii) Si L est un système local, $\tilde{L}$ en est un, donc h est de détermination finie, et si de plus $\omega \in \Gamma(Y; H^0 RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X})$, on a

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; H^0 RH_X\big(H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L\big)\big)$$

par la PROPOSITION 3.5, d'où $\int \omega \in \Gamma(X; H^0 RH_X(i_! \tilde{L}))$.

(iii) Comme indiqué dans la PROPOSITION 2.2, il résulte de [K2] que $H^d(Rf_! \mathbb{C}_U)$ et $\tilde{f}_* L = f_* j_* L$ sont $\mathbb{C}$-constructibles quasi-unipotents; il en est donc de même de $H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L$ et de $i_! \tilde{L}$. $\square$

Remarque 3.7. — Dans le cas algébrique le point (iii) est dû à NILSSON [N2], lequel donne aussi une borne pour les exposants de quasi-unipotence. On aurait pu les préciser également ici en raisonnant comme dans [Lê].

Démonstration du Théorème 0 de l'introduction. — Par hypothèse, il existe une μ-stratification $\mathcal{S}_\infty$ de ∂U telle que :

$$\varpi\rho^{-1}\big(\Lambda(\mathcal{S}_\infty)\big) \subset T^*_X X.$$

Choisissons une μ-stratification à strates complexes $\mathcal{S}_0$ de S (e.g. une stratification de Whitney complexe) et posons

$$Z = \overset{\circ}{\pi}\, \varpi\rho^{-1}\big(\Lambda(\mathcal{S}_0)\big).$$

C'est un sous-ensemble analytique complexe de codimension ≥ 1 de X.

Posons $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{U \setminus S\} \cup \mathcal{S}_\infty$. Alors $\mathcal{S}$ est une μ-stratification de $\overline{U \setminus S}$ subordonnée à $\partial(U \setminus S) = (\partial U) \cup S$ et, comme

$$\varpi\rho^{-1}\big(\Lambda(\mathcal{S})\big) \subset T^*_X X \cup \varpi\rho^{-1}\big(\Lambda(\mathcal{S}_0)\big),$$

on a $Z_L \cup Z_{\mathbb{C}_{U\setminus S}} \subset Z$, et le THÉORÈME 0 résulte du THÉORÈME 3.6. □

Remarque 3.8. — Sous les hypothèses du THÉORÈME 0, supposons de plus que L est un système local sur $U \setminus S$, notons $i : X \setminus Z \hookrightarrow X$, où Z est défini dans la démonstration ci-dessus, et posons :

$$\tilde{L} = \big(H^d(Rf_!\, \mathbb{C}_{U\setminus S}) \otimes \tilde{f}_* L\big)_{|X\setminus Z},$$

$$\mathcal{M} = H^0 RH_X(i_!\, \tilde{L}).$$

Alors, de la démonstration ci-dessus et de [K-K] et [K1], on tire aussitôt :

(i) $\mathcal{M}$ est un module holonôme régulier,

(ii) $\displaystyle\int \omega \in \Gamma(X; \mathcal{D}^\infty_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(i_!\, \tilde{L}, \mathcal{O}_X)$

($\int \omega$ est défini en (3.10)), et

(iii) si ω est de classe de Nilsson on a $\int \omega \in \Gamma(X; \mathcal{M})$.

Ceci répond en particulier à une question de PHAM (cf. [P2]).

Certaines assertions du THÉORÈME 3.6 se généralisent à des situations où f n'est plus supposée propre sur $\overline{U}$, comme il résulte de l'application du COROLLAIRE 3.4 : voir les lignes qui le suivent et aussi le cas suivant.

VARIANTE 3.9. — *Avec les notations du Théorème* 3.6, *supposons* $S := \partial U$ *analytique complexe,* ω *de détermination finie et* (3.9) *vérifié. On fait l'hypothèse suivante*

(*) $\qquad H^d(Rf_!\, \mathbb{C}_U)$ *et* $\tilde{f}_* L$ *sont* $\mathbb{C}$-*constructibles*

(*on ne suppose plus* f *propre sur* $\overline{U}$).

Alors on a encore la propriété (i) *du Théorème* 3.6 *en prenant pour* Z *l'ensemble* $\mathbb{C}$*-analytique* $Z = X \setminus V$ *où* V *est la strate de dimension maximum associée à* $H^d(Rf_! \mathbb{C}_U) \otimes \tilde{f}_* L$; *de plus* h *est de détermination finie* (*plus précisément* h *est solution du système* $\mathcal{D}_X^\infty \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$, *où* $\mathcal{M}$ *est le module holonôme régulier défini dans la remarque précédente*).

On peut assurer la condition (*) en utilisant le lemme 8.5.9 de [K-S2] si X est de dimension 1, ou, plus généralement, en ajoutant l'hypothèse que f est un morphisme sans éclatement (cf. [H-M-S]).

Mais, dans une situation non propre, on ne peut s'attendre à conserver la propriété de Nilsson (e.g. $X = \mathbb{C}_x$, $U = Y = X \times \mathbb{C}_t$, $f(x,t) = x$, $\omega(x,t) = x\,\mathrm{e}^t(xt-1)^{-1}\,\mathrm{d}t$, $x_0 \neq 0$, γ_{x_0} un petit cercle dans $\mathbb{C}_t$ autour de $t = 1/x_0$ parcouru une fois dans le sens direct : alors $\mathrm{Int}_\gamma(\omega) = \int_\gamma \omega = 2\pi i\,\mathrm{e}^{1/x}$).

3.5. Intégration sur des cycles multiformes. — Dans les applications on est amené à intégrer des formes qui ne satisfont pas à l'hypothèse d'uniformité (3.9) (e.g. les intégrales eulériennes), et on généralise les constructions précédentes à des intégrales sur des cycles relatifs qui sont eux-mêmes multiformes. On reprend les notations de 3.2, où $f : Y \to X$ est lisse, $j : U \hookrightarrow Y$ l'immersion d'un ouvert de Y, $\tilde{f} = f \circ j$.

PROPOSITION 3.10. — *Soient* L *et* L' *des faisceaux localement constants sur* U, *les notations étant celles de la Proposition* 3.1.

(i) *On a un morphisme canonique*

$$\Gamma\big(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X})\big) \otimes H^d(X; R\tilde{f}_! L') \longrightarrow \Gamma\big(X; \mathcal{H}om(\tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X)\big).$$

qu'on notera encore $\omega \otimes \gamma \mapsto \mathrm{Int}_\gamma(\omega)$.

(ii) $\mathrm{Int}_\gamma(\omega)$ *ne dépend pas de l'ouvert* U *dans lequel* γ *est tracé et se calcule fibre à fibre.*

(iii) *Si* $DL' \otimes L$ *est un faisceau constant de rang fini, on a*

$$\iota(\mathrm{Int}_\gamma(\omega)) \simeq \int_\gamma \omega.$$

On retrouve la PROPOSITION 3.1 en faisant $L' = \mathbb{C}_U$ mais on a préféré donner des énoncés distincts pour des questions de lisibilité.

Précisons les notations du (iii). Soit $\nu \in \mathbb{N}$ le rang de $DL' \otimes L$. Moyennant le choix d'un isomorphisme $DL' \otimes L \simeq \mathbb{C}_U^\nu$, on a un morphisme

$$\mathbb{C}_X^\nu \longrightarrow \tilde{f}_* \mathbb{C}_U^\nu \simeq \tilde{f}_*(DL' \otimes L)$$

d'où le morphisme

$$\iota : \mathcal{H}om\big(\tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X\big) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathbb{C}_X^\nu, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X^\nu,$$

(qui ne sera défini canoniquement que si $L' = L$ et $\nu = 1$). L'intégrale $\int_{\gamma_x} \omega$ est définie de la manière usuelle comme intégrale de chaîne singulière en écrivant γ_x comme somme finie de chaînes γ_x^i et en choisissant une détermination uniforme ω^i de ω le long de γ_x^i et en posant $\int_{\gamma_x} \omega = \sum \int_{\gamma_x^i} \omega^i$.

Démonstration. — On a un morphisme canonique

$$j_! L' \otimes R\mathcal{H}om(j_! L, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow R\mathcal{H}om\big(Rj_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_Y\big).$$

En effet, on a les morphisme canoniques

$$\begin{aligned} &L' \otimes R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}) \\ &\quad \longrightarrow DDL' \otimes R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}) \\ &\qquad \longrightarrow R\mathcal{H}om\big(DL', R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O})\big) = R\mathcal{H}om(DL' \otimes L, \mathcal{O}), \end{aligned}$$

d'où les morphismes

$$\begin{aligned} j_! L' \otimes R\mathcal{H}om(j_! L, \mathcal{O}) &= j_! \big(L' \otimes R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O})\big) \\ &\longrightarrow j_! R\mathcal{H}om(DL' \otimes L, \mathcal{O}) \\ &\qquad \longrightarrow R\mathcal{H}om(Rj_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Il suffit alors de recopier, mutadis mutandis, la démonstration de la PROPOSITION 3.1 en établissant le morphisme :

$$Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}) \otimes Rf_! j_! L'[d] \to R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X\big). \quad \square$$

On a un morphisme de prolongement analytique le long des cycles multiformes :

DÉFINITION et PROPOSITION 3.11. — *Avec les notations précédentes, on se fixe une forme* $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}))$.

(i) (*cf. Définition* 3.3.) *On note*

$$\text{(3.11)} \qquad \mathrm{Int}(\omega) : H^d(R\tilde{f}_! L') \longrightarrow \mathcal{H}om\big(\tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X\big)$$

le morphisme de faisceaux $\gamma \mapsto \mathrm{Int}_\gamma(\omega)$, *et on l'identifie à une section globale* :

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; \mathcal{H}om\big(H^d(R\tilde{f}_! L') \otimes \tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X\big)\big).$$

(ii) (*cf. Proposition* 3.5.) *Supposons de plus que :*

- U *est sous-analytique,*
- f *est propre sur* $\overline{U}$,
- L *et* L' *sont des systèmes locaux,*
- ω *est de classe de Nilsson.*

Alors $\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; H^0 RH_X\big(H^d(R\tilde{f}_! L') \otimes \tilde{f}_*(DL' \otimes L)\big)\big)$.

Démonstration. — On procède comme pour la PROPOSITION 3.5. On remarque d'abord que sous la seule hypothèse que f est propre sur $\overline{U}$ on a un morphisme canonique

$$(3.12)\quad Rf_* R\mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}) \longrightarrow R\mathcal{H}om\big(R\tilde{f}_! L'[d] \otimes \tilde{f}_*(DL' \otimes L), \mathcal{O}_X\big)$$

qui s'établit comme (3.6) en utilisant le morphisme résidu et la composition des morphismes

$$R\tilde{f}_! L'[d] \otimes \tilde{f}_*(DL' \otimes L) \longrightarrow R\tilde{f}_! (L' \otimes DL' \otimes L)[d] \longrightarrow R\tilde{f}_! L[d],$$

où le premier est la contraction et le deuxième résulte de la trace $L' \otimes DL' \to \mathbb{C}_U$. Si de plus U est sous-analytique et L et L' sont des systèmes locaux, le morphisme d'intégration de Kashiwara (4.1) produit la version tempérée de (3.12) qui est l'analogue de (3.8)

$$(3.13)\quad Rf_*\big(RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}\big) \longrightarrow RH_X\big(R\tilde{f}_! L'[d] \otimes \tilde{f}_*(DL' \otimes L)\big).$$

Le diagramme naturel construit sur (3.12) et (3.13) est commutatif, et on conclut comme dans la démonstration de la PROPOSITION 3.5. □

Les énoncés et les démonstrations du numéro 3.4 se laissent facilement recopier dans le cas des cycles multiformes, l'analogue du THÉORÈME 3.6 étant le :

THÉORÈME 3.12. — *Supposons l'ouvert* U *sous-analytique et l'application* $f : Y \to X$ *propre sur* $\overline{U}$. *Soient* L *et* L' *deux faisceaux localement constants sur* U, $\omega \in \Gamma(Y; \mathcal{H}om(j_! L, \Omega_{Y/X}))$, *une forme holomorphe multiforme relative sur* U *et soit* $\gamma_{x_0} \in (H^d Rf_! L')_{x_0}$ *un germe de d-cycle multiforme relatif défini au voisinage de* $x_0 \in X$ *et tracé dans* U.

On suppose réalisée la condition suivante :

$$(3.14)\qquad \begin{cases} DL' \otimes L \text{ est un faisceau constant de} \\ \text{rang fini sur un voisinage de } \gamma_{x_0}. \end{cases}$$

Alors :

(i) *L'application définie au voisinage de* x_0 *par* $x \mapsto h(x) := \int_{\gamma_x} \omega$ *est holomorphe et se prolonge en fonction holomorphe multiforme sur* $X \setminus Z$, *où* $Z := Z_L \cup Z_{DL'\otimes L}$ *est un ensemble fermé sous-analytique de codimension* ≥ 1.

(ii) *Si* L *et* L' *sont des systèmes locaux,* h *est de détermination finie, et si de plus* ω *est de classe de Nilsson il en est de même de* h.

(iii) *Si* $U = Y \setminus S$, *où* S *est une hypersurface complexe de* Y, Z *est un ensemble complexe de codimension (complexe)* ≥ 1. *Si de plus* $j_! L$ *et* $j_! L'$ *sont* $\mathbb{C}$*-constructibles quasi-unipotents,* h *est de monodromie locale quasi-unipotente.*

Il suffit en effet de recopier la démonstration du THÉORÈME 3.6 en utilisant la PROPOSITION 3.11 au lieu de la PROPOSITION 3.1.

On laisse au lecteur le soin d'écrire les énoncés analogues des THÉORÈME 0, remarque 3.8 et variante 3.9.

Dans les applications L est souvent un système local de rang 1, et on choisit $L' = L$ pour satisfaire à (3.14).

Exemple 3.13. — (Fonction hypergéométrique.) Soient :

$X = \mathbb{C}_x, \quad T = \mathbb{P}^1\mathbb{C}, \quad Y = X \times T,$

t la coordonnée de $T \setminus \{\infty\}$, $\quad f : Y \to X$ la projection,

$S := X \times \{\infty\} \cup \{(x,t)\,;\ t(1-t)(1-xt) = 0\}, \quad U = Y \setminus S.$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ et soit le système local de rang 1 sur U défini par

$$L = L_{a,b,c} = t^*\mathbb{C}(a) \otimes (1-t)^*\mathbb{C}(b) \otimes (1-xt)^*\mathbb{C}(c),$$

où la notation u^* désigne ici l'image inverse au sens des faisceaux par la fonction $u(x,t) : U \to \mathbb{C}$, et $\mathbb{C}(\alpha)$ est défini dans l'exemple 3.2. Soit :

$$\omega = t^a(1-t)^b(1-xt)^c dt \in \Gamma\big(Y; H^0RH_Y(j_! L) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/X}\big).$$

On prend $L' = L$, et on a $\tilde{f}_*(DL' \otimes L) = \tilde{f}_*\mathbb{C}_U = \mathbb{C}_X$. Ici :

$$\mathrm{Int}(\omega) \in \Gamma\big(X; H^0RH_X(H^1R\tilde{f}_! L)\big).$$

Classiquement on fixe $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |x_0| \ll 1$ et on prend pour germe $\gamma_{x_0} \in H^1(R\tilde{f}_! L)$ le cycle multiforme de Pochammer (cf. [Sl], fig. 1.1, p. 23). L'intégrale hypergéométrique

$$h(x) = \int_{\gamma_{x_0}} t^a(1-t)^b(1-xt)^c\,\mathrm{d}t$$

est une détermination de $\mathrm{Int}(\omega)$ donc se prolonge en dehors du contour apparent $Z = \{0,1\} \subset \mathbb{C}_x$ et est associée au système local $(H^1 R\tilde{f}_! L)_{|\mathbb{C}\setminus Z}$.

On peut aussi décrire dans ce cadre le prolongement analytique des intégrales eulériennes généralisées à la AOMOTO ([Ao], cf. aussi [G-K-Z]) et nous espérons y revenir dans un prochain travail.

4. Appendice : cohomologie à croissance, selon Kashiwara.

On rappelle ci-dessous la définition et les propriétés utilisées dans le texte des foncteurs TH et RH de KASHIWARA (cf. [K1], voir aussi l'exposé de BJÖRK [B] et ANDRONIKOF [An] pour quelques propriétés complémentaires).

4.1. — Soit M une variété analytique réelle, (paracompacte). On note $\mathcal{D}b_M$ le faisceau des distributions sur M et $\mathcal{D}_M$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients analytiques sur M.

Soit U un ouvert de M et $u \in \Gamma(U;\mathcal{D}b_M)$. On rappelle que la distribution u est dite *prolongeable* (ou *tempérée*) en un point $x_0 \in \partial U$ s'il existe un voisinage ouvert V de x_0 et $v \in \Gamma(V;\mathcal{D}b_M)$ tel que $v_{|\,V\cap U} = u_{|\,V\cap U}$ ou encore, de manière équivalente, s'il existe un voisinage ouvert V de x_0 et $v \in \Gamma(M;\mathcal{D}b_M)$ tel que $v_{|\,V\cap U} = u_{|\,V\cap U}$. On dit que u est une *distribution prolongeable* si elle est prolongeable en tout point de ∂U, ou de manière équivalente, s'il existe $v \in \Gamma(M;\mathcal{D}b_M)$ tel que $v_{|\,U} = u$. On note avec MARTINEAU $\mathcal{S}'_M(U)$ le sous-espace de $\Gamma(U;\mathcal{D}b_M)$ des distributions prolongeables (cf. [Mar]).

Rappelons le :

LEMME 4.1 (MARTINEAU, *loc. cit.*). — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \Gamma(U;\mathcal{D}b_{\mathbb{R}^n})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in \mathcal{S}'_{\mathbb{R}^n}(U)$.

(ii) *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe, $c, m > 0$ tels que*

$$\big|\langle u,\varphi\rangle\big| \leq c|\varphi|_m \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U),\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset K$$

où, par définition, $|\varphi|_m = \sup\limits_{\substack{|\alpha|\leq m\\ x\in\mathbb{R}^n}} \big|D^\alpha\varphi(x)\big|$.

(iii) *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe, $c, m, \nu > 0$ tels que*

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq c \sup_{\substack{|\alpha|\leq m\\ x\in\mathbb{R}^n}} \big(d(x,\partial U)^\nu \big|D^\alpha\varphi(x)\big|\big)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$.

Supposons maintenant que U est un ouvert sous-analytique de la variété réelle M. Il résulte des inégalités de Lojasiewicz que le sous-préfaisceau de $\Gamma_U \mathcal{D}b_M$ défini par (Ω ouvert de M) $\mapsto \mathcal{S}'_\Omega(\Omega \cap U)$ est un faisceau. On le note $\mathcal{D}b_M^{t-U}$. Si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{D}b_M$, on note plus généralement

$$\mathcal{F}^{t-U} \overset{\text{déf}}{=} \Gamma_U \mathcal{F} \cap \mathcal{D}b_M^{t-U},$$

i.e. $\mathcal{F}^{t-U}$ est le sous-faisceau de $\Gamma_U \mathcal{F}$ défini par

$$\Gamma(\Omega; \mathcal{F}^{t-U}) = \big\{ f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{F}) \,;\ f \text{ est une distribution prolongeable en tout point de } \Omega \cap \partial U \big\},$$

pour tout ouvert Ω de M.

Le foncteur TH est défini par KASHIWARA dans *loc. cit.* de la manière suivante. Si F est un faisceau sur M, on pose

$$TH_M(F)(\Omega) = \Big\{ \varphi \in \Gamma\big(\Omega;\ \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)\big) \,;\ \forall\, V \text{ouvert sous-analytique},\ V \subset\subset \Omega,\ \forall\, s \in \Gamma(V; F),\ \varphi(s) \in \mathcal{S}'_\Omega(V) \Big\}$$

pour tout ouvert Ω de M. Alors $\Omega \mapsto TH_M(F)(\Omega)$ est un faisceau de $\mathcal{D}_M$-modules et de $\mathcal{C}_M^\infty$-modules, noté également $T - \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$. Il est caractérisé par les propriétés suivantes (cf. [K1]) :

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall Z \text{ fermé sous-analytique } TH_M(\mathbb{C}_Z) = \Gamma_Z \mathcal{D}b_M, \\ TH_M(\cdot) : \big(\mathbb{R} - c(M)\big)^o \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_M) \\ \text{est un foncteur exact,} \end{cases}$$

où $(\ \cdot\ )^o$ désigne la catégorie opposée et $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}b_M)$ la catégorie des $\mathcal{D}_M$-modules. On note de la même manière le foncteur dérivé

$$TH_M(\cdot) : D^b_{\mathbb{R}-c}(M)^o \longrightarrow D^b\big(\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_M)\big).$$

(On rappelle que $D^b(\mathbb{R} - c(M)) \to D^b_{\mathbb{R}-c}(M)$ est une équivalence de catégories (Kashiwara, *loc. cit.*, cf. aussi [K-S2]).)

On note que $(*)$ implique que pour tout ouvert sous-analytique U de M et tout ouvert $\Omega \subset M$ on a $\Gamma(\Omega; TH_M(\mathbb{C}_U)) = \mathcal{S}'_\Omega(\Omega \cap U)$.

4.2. — Soient maintenant X une variété analytique complexe de dimension $d_X = \dim_{\mathbb{C}} X$ (paracompacte) et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes.

On pose pour $F \in \mathrm{Ob}(D^b_{\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}}))$:

$$RH_X(F) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\overline{X}}}\big(\mathcal{O}_{\overline{X}}, TH_{X_{\mathbb{R}}}(F)\big).$$

D'où un foncteur de catégories triangulées

$$RH_X(\,\cdot\,) : D^b_{\mathbb{R}-c}(X_{\mathbb{R}})^o \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_X)$$

où $D^b(\mathcal{D}_X)$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules.

On a les propriétés suivantes :

Si Y est un sous-ensemble analytique complexe fermé de X, on a

$$RH_X(\mathbb{C}_Y) = R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X$$

où $R\Gamma_{[Y]}\mathcal{O}_X = R \varinjlim\limits_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{I}_Y$ étant un idéal de définition de Y dans X. En particulier si Y est une hypersurface de complémentaire $U = X \setminus Y$ on a

$$RH_X(\mathbb{C}_U) \simeq \mathcal{O}_X[*Y],$$

le faisceau des fonctions méromorphes à pôles sur Y (identifié au complexe $R \varinjlim\limits_k \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Y^k, \mathcal{O}_X)[1]$ qui est concentré en degré 0).

Le résultat fondamental est alors le théorème d'image directe ci-dessous.

Soit Y une autre variété complexe, d_Y sa dimension complexe et $f : Y \to X$ un morphisme complexe.

THÉORÈME 4.2 (KASHIWARA, *loc. cit.*). — *Soit* $F \in \mathrm{Ob}(D^b_{\mathbb{R}-c}(Y_{\mathbb{R}}))$ *telle que* f *soit propre sur* $\mathrm{supp}(F)$. *On a un isomorphisme canonique* :

$$Rf_*\big(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} RH_Y(F)\big)[d_Y] \xrightarrow{\ \sim\ } RH_X(Rf_*F)[d_X].$$

Rappelons que $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \Omega_{Y/X}$ où $\Omega_{Y/X}$ désigne le faisceau sur Y des formes relatives de degré maximum, et que

$$\mathcal{D}_{Y\to X} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$$

contient la section canonique $1_{Y\to X}$ (cf. [S-K-K]).

Du THÉORÈME 4.2 on déduit en particulier un morphisme canonique d'intégration

$$(4.1) \qquad Rf_*\big(RH_Y(F) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \Omega_{Y/X}\big)[d_Y] \longrightarrow RH_X(Rf_*F)[d_X]$$

(f est supposée propre sur le support de F).

C'est ce dernier morphisme que l'article utilise. Remarquons que si l'on suppose $f : Y \to X$ propre, le morphisme (4.1) redonne le morphisme résidu de Leray-Grothendieck (cf. HARTSHORNE [Ha]) :

$$(4.2) \qquad Rf_! \, \Omega_{Y/X}[d_Y] \longrightarrow \mathcal{O}_X[d_X].$$

Il suffit en effet de faire $F = \mathbb{C}_Y$ dans (4.1) et de composer (4.1) avec le morphisme $RH_X(Rf_*\mathbb{C}_Y) \to RH_X(\mathbb{C}_X)$ induit par le morphisme canonique $\mathbb{C}_X \to Rf_*\mathbb{C}_Y$.

La proposition suivante relie les différentes notions de croissance d'une fonction holomorphe.

PROPOSITION 4.3. — *Soit U un ouvert sous-analytique de X. On a :*

(i) $H^0 RH_X(\mathbb{C}_U) = \mathcal{O}_X^{t-U}$.

(ii) *Pour tout ouvert Ω de X,*

$$\Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X^{t-U}) = \big\{ f \in \Gamma(\Omega \cap U; \mathcal{O}_X)\,;\ f \textit{ est à croissance lente en tout point de } \Omega \cap \partial U \big\}.$$

La notion de croissance lente (fonction) est rappelée au § 1.2.

Démonstration. — En se plaçant dans une carte locale, on peut supposer que $X = \mathbb{C}^n_z$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ la coordonnée holomorphe de X.

Notons $\bar\partial_j = \partial/\partial \bar z_j$ et, pour une distribution u sur $X_{\mathbb{R}}$,

$$\bar\partial u := (\bar\partial_j u)_{1 \le i \le n}.$$

(i) On a :

$$\begin{aligned} H^0 RH_X(\mathbb{C}_U) &= \ker\big(\bar\partial : TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U) \to TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U)^n\big) \\ &= TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U) \cap \big(\ker(\bar\partial : \Gamma_U \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}} \to \big(\Gamma_U \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}})^n\big)\big) \\ &= TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U) \cap \Gamma_U\big(\ker(\bar\partial : \mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}} \to (\mathcal{D}b_{X_{\mathbb{R}}})^n)\big) \\ &= TH_{X_{\mathbb{R}}}(\mathbb{C}_U) \cap \Gamma_U \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{t-U}. \end{aligned}$$

(ii) La propriété étant locale au bord de U on peut supposer $\Omega = \mathbb{C}^n$ et on est ramené à démontrer pour $f \in \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ l'équivalence (f est prolongeable en distribution sur $\mathbb{C}^n$) $\Leftrightarrow$ (f est localement à croissance lente sur U), laquelle est essentiellement due à MARTINEAU dans un cas plus particulier (proposition 2, chapitre III de *loc. cit.*).

Montrons plus généralement le :

LEMME 4.4. — *Soient P un opérateur elliptique à coefficients constants sur $\mathbb{R}^\ell$, U un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$, f une fonction analytique sur U telle que $Pf = 0$. Alors f est prolongeable en distribution sur $\mathbb{R}^\ell$ si et seulement si f est localement à croissance lente sur U.*

Démonstration. — On peut supposer U relativement compact. Si f est à croissance lente, le LEMME 4.1 montre que f est prolongeable en distribution sur $\mathbb{R}^\ell$. Réciproquement, soit u une distribution sur $\mathbb{R}^\ell$, u à support compact qui prolonge f. Il faut montrer que $d(x, \partial U)^N f(x)$ reste borné sur U pour $N \gg 1$. Supposons le contraire, on peut trouver une suite $x_n \in U$, $x_n \to y \in \partial U$ telle que si l'on pose $r_n = d(x_n, \partial U)$ on a :

$$(r_n)^n \left|f(x_n)\right| \longrightarrow \infty \quad \text{quand } n \to \infty. \tag{4.3}$$

Posons $v = Pu$, $K = \operatorname{supp}(v)$ et soient $c, m > 0$ tels que $|\langle v, \varphi\rangle| \leq c|\varphi|_m$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^\ell)$. Fixons une fonction $\beta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ telle que $\beta = 1$ au voisinage de K et une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$ telle que $\varphi(x) = 0$ pour $|x| > 1$ et $\varphi(x) = 1$ pour $|x| < \frac{1}{2}$. Posons $\varphi_n(x) = \beta(x)(1-\varphi(r_n^{-1}(x-x_n)))$.

Alors $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^\ell)$, $\varphi_n = 1$ au voisinage de K et $\varphi_n = 0$ au voisinage de x_n. Si E est une solution élémentaire de P on a $u = E * v$ donc

$$f(x_n) = E * v(x_n) = (E * \varphi_n v)(x_n) = \langle v_y, \varphi_n(y) E_{x_n - y}\rangle,$$

$\varphi_n(y) E_{x_n-y}$ étant une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de y, d'où l'on tire

$$\left|f(x_n)\right| \leq c\left|\varphi_n(y) E_{x_n-y}\right|_m. \tag{4.4}$$

Pour tout multi-indice α on a :

$$\left|D_x^\alpha \varphi\big(r_n^{-1}(x - x_n)\big)\right| \leq r^{-|\alpha|}|\varphi|_{|\alpha|}$$

et, d'autre part, $D_x^\alpha E$ est une fonction analytique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à croissance lente en 0. Alors vu (4.4) on peut trouver $c_1, \nu > 0$ tels que

$$\left|f(x_n)\right| \leq c_1 |x_n - y|^{-\nu} r_n^{-\nu}$$

d'où $r_n^{2\nu} \left|f(x_n)\right| \leq c_1$, ce qui contredit (4.3) vu $r_n \to 0$. □

Remarquons que l'on a plus généralement la propriété suivante : si P est un opérateur elliptique à coefficients analytiques défini au voisinage de $\overline{U}$, g une fonction analytique sur U qui est localement à croissance lente et f une distribution prolongeable définie sur U telle que $Pf = g$, alors f est (analytique et) localement à croissance lente.

BIBLIOGRAPHIE

[An] ANDRONIKOF (E.). — *Microlocalisation tempérée*, Thèse d'État, 1987.

[Ao] AOMOTO (K.). — *On the structure of integrals of power products of linear functions*, Sci. Papers. Coll. Gen. Edu. Univ. Tokyo, t. **27**, 1977, p. 49–61.

[A-V-G] ARNOLD (V.), VARCHENKO (A.), GOUSSEIN-ZADE (S.). — *Singularités des applications différentiables. Tome 2 : Monodromie et comportement asymptotique des intégrales.* — Éd. Mir. Moscou, 1984.

[B] BJÖRK (J.E.). — *à paraître.* — Kluwer.

[B-M] BIERSTONE (E.) and MILMAN (P.). — *Semi-analytic and subanalytic sets*, Pub. Math. I.H.E.S., t. **67**, 1988, p. 5–42.

[D] DELIGNE (P.). — *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes in Math. **163**, Springer, 1970.

[G-K-Z] GELFAND (I.M.), KAPRANOV (M.M.) and ZELEVINSKY (A.V.). — *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. in Math., t. **84**, 1990, p. 225–271.

[H1] HIRONAKA (H.). — *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Istituto Matematico L. Tonelli. Univ. di Pisa, 1973.

[H2] HIRONAKA (H.). — *Stratification and flatness.* — Nordic Summer School in Math. Oslo, 1976.

[Ha] HARTSHORNE (R.). — *Residues and Duality*, Lect. Notes in Math. **20**, Springer, 1966.

[K1] KASHIWARA (M.). — *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Publ. R.I.M.S., t. **20**, 1984, p. 319–365.

[K2] KASHIWARA (M.). — *Quasi-unipotent constructible sheaves*, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, t. **28**, 1982, p. 757–773.

[K-K] KASHIWARA (M.) and KAWAI (T.). — *On holonomic systems of micro-differential equations III. Systems with regular singularities*, Publ. R.I.M.S., t. **17**, 1981, p. 813–979.

[K-S1] KASHIWARA (M.) and SCHAPIRA (P.). — *Microlocal Study of Sheaves*, Astérisque **128**, 1985.

[K-S2] KASHIWARA (M.) and SCHAPIRA (P.). — *Sheaves on Manifolds*, Grund. der Math. Wiss., **292**, Springer, 1990.

[Ko] KOBAYASHI (T.). — *On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain*, Math. Ann., t. **269**, 1984, p. 217–234.

[L1] LERAY (J.). — *Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique*, Bull. Soc. Math. France, t. **95**, 1967, p. 313–374.

[L2] LERAY (J.). — *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France, t. **87**, 1959, p. 81–180.

[Lê] LÊ (D. T.). — *Faisceaux constructibles quasi–unipotents*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 581, 1981/82.

[Lo] LOJASIEWICZ (S.). — *Sur le problème de la division*, Studia Math., t. **8**, 1959, p. 87–136.

[Mal] MALGRANGE (B.). — *Regular connections, after Deligne*, in *Algebraic D–modules*, Borel Ed., Academic Press, 1987.

[Mar] MARTINEAU (A.). — *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*. — Proc. Int. Summer Inst. Lisbon, 1964.

[N1] NILSSON (N.). — *Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds*, Ark. for Math., t. **5**, 1965, p. 463–476.

[N2] NILSSON (N.). — *Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals*, Ark. for Math., t. **18**, 1980, p. 181–198.

[P1] PHAM (F.). — *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*. — Birkhäuser, 1981.

[P2] PHAM (F.). — *Intégrales de type singulier fini et calcul microdifférentiel*. — Pub. Univ. de Nancy, 1982.

[Sl] SLATER (L.). — *Generalized Hypergeometric Functions*. — Cambridge University Press, 1966.

[S-K-K] SATO (M.), KAWAI (T.) and KASHIWARA (M.). — *Hyperfunctions and pseudo differential equations*, Lecture Notes in Math., t. **287**, 1973, p. 265–529.

[T] TEISSIER (B.). — *Variétés polaires II*, Lecture Notes in Math., t. **961**, 1982, p. 314–491.

[Tr] TROTMAN (D.). — *Une version microlocale de la condition (w) de Verdier*, Ann. Inst. Fourier, t. **39,3**, 1989, p. 825–829.

[V] VAILLANT (J.). — *Ramifications d'intégrales holomorphes*, J. Math. pures et appl., t. **65**, 1986, p. 343–402.