BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEX MERIL
ALAIN YGER

Problèmes de Cauchy globaux

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 1 (1992), p. 87-111
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_1_87_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 87–111.

PROBLÈMES DE CAUCHY GLOBAUX

BY

ALEX MERIL ET ALAIN YGER (*)

RÉSUMÉ. — Nous envisageons le problème suivant : étant donné un polynôme P en n variables à coefficients complexes, existe-t-il, pour toute fonction entière F de n variables, une et une seule manière de diviser F par P dans l'espace des fonctions entières de manière à ce que le reste soit dans le noyau de l'opérateur $P^*(D_1, \dots, D_n)$, où P^* est le polynôme déduit de P par conjugaison des coefficients ? Un tel procédé de division existe, comme l'a montré E. Fischer, lorsque P est homogène ; il existe également, pour tout polynôme P, une décomposition orthogonale de l'espace des fonctions entières appartenant à $L^2(\mathbb{C}^n, \exp(-\|\zeta\|^2))$ (Newman–Shapiro). Nous prouvons ici l'injectivité de l'opérateur $P^*(D)[P]$ de l'espace des fonctions entières dans lui même lorsque $\deg(P) \leq 2$, puis nous donnons une preuve de la surjectivité sous les mêmes hypothèses, mais en dimension 2, en ayant recours à une décomposition de la donnée suivant les fonctions de Mathieu.

ABSTRACT. — Given a polynomial P in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ and the polynomial P^* defined by $P^*(\overline{X}) = \overline{P}(\overline{X})$, we study the operator $P^*(D)[P.]$ acting from the space of entire functions into itself. It has been proved by E. Fischer that if P is homogeneous, then one can divide any entire function F as $F = PG + R$ where R is an entire function in the kernel of $P^*(D)$. Such a decomposition is also valid, for orthogonality reasons, when F is in $L^2(\mathbb{C}^n, \exp(-\|\zeta\|^2))$, as proved by Newman–Shapiro. We prove here the injectivity of $P^*(D)[P.]$ on the space of entire functions when $\deg(P) \leq 2$; then, we give a proof of the surjectivity of this operator from the space of entire functions into itself when $n = 2$, $\deg(P) \leq 2$, using an expansion of the initial data in terms of Mathieu functions.

1. Introduction

Soit P un polynôme de n variables à coefficients complexes ; on notera P^* le polynôme défini par $P^*(\bar{z}) = \overline{P}(\bar{z})$; dans sa thèse, dès 1917, E. FISCHER démontre le résultat suivant :

(*) Texte reçu le 28 Novembre 1990.
A. MERIL, Université Antilles Guyane, Sciences Exactes et Naturelles, 97167 Pointe-à-Pitre Cedex, Guadeloupe, Antilles Françaises.
A. YGER, Université Bordeaux I, UA CNRS 226, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1992/87/$ 5.00

THÉORÈME [7]. — *Soit P un polynôme homogène de n variables à coefficients complexes ; tout élément Q de $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ s'écrit de manière unique $Q = PQ_1 + R_1$, où Q_1 et R_1 sont deux polynômes avec de plus $P^*(D)(R_1) \equiv 0$.*

Il s'agit ici d'un processus de division avec reste ; du point de vue de l'analyse, on peut aussi envisager ce problème commme un problème de Cauchy global avec donnée initiale sur une variété avec multiplicité [11].

La preuve du théorème de FISCHER repose sur un argument d'orthogonalité ; la multiplication par P définit une application linéaire de l'espace $\mathcal{H}_k$ des polynômes homogènes de degré k dans l'espace $\mathcal{H}_{k+\deg(P)}$; si l'on équipe chaque $\mathcal{H}_p$ du produit scalaire

$$\langle X^\alpha, X^\beta\rangle = \alpha_1!\dots\alpha_n!\,\delta_{\alpha,\beta}, \qquad \alpha\in\mathbb{N}^n,\ \beta\in\mathbb{N}^n$$

(où $\delta_{\alpha,\beta}$ désigne le symbole de Kronecker), l'adjoint de cet opérateur est précisément l'action de l'opérateur $P^*(D)$. Le processus de division par un polynôme homogène s'étend au cadre des fonctions entières ; si toutefois on désire respecter l'idée d'orthogonalité sur laquelle est basée la preuve du théorème, le problème doit être naturellement posé dans un espace hilbertien de fonctions entières, le plus naturel étant l'espace de Fock des physiciens

$$\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n) = \Big\{F \in H(\mathbb{C}^n),\ \int \big|F(\zeta)\big|^2 \mathrm{e}^{-\|\zeta\|^2}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) < \infty\Big\}$$

équipé du produit scalaire

$$\langle F, G\rangle = \frac{1}{\pi^n}\int F(\zeta)\bar{G}(\bar{\zeta})\,\mathrm{e}^{-\|\zeta\|^2}\,\mathrm{d}\lambda(\zeta).$$

Dans ce contexte, D.J. NEWMAN et H.S.SHAPIRO [16] prouvent, pour tout polynôme P dans $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, l'existence de la décomposition orthogonale suivante :

$$\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n) = P.\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n) \oplus M^*(D) \tag{1}$$

où $P.\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n)$ (resp. $M^*(D)$) désignent respectivement l'image de l'opérateur $P.$ (resp. le noyau de $P^*(D)$) lorsque ces deux opérateurs correspondent aux opérateurs non bornés de $\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n)$ que sont la multiplication par P d'une part, l'action de $P^*(D)$ d'autre part.

Se pose naturellement la question de savoir si, hors de ce contexte d'orthogonalité, une décomposition du type (1) est valable dans l'espace des fonctions entières, comme c'est le cas lorsque P est homogène.

Laissant de côté cette idée d'orthogonalité pour lui préférer un argument de dualité, A. MERIL et D. STRUPPA montrent dans [15] qu'étant donné un polynôme P, le problème de l'existence d'une décomposition du type

$$H(\mathbb{C}^n) = P.H(\mathbb{C}^n) \oplus \ker\bigl(P^*(D)\bigr) \tag{2}$$

équivaut à celui de l'existence d'une décomposition en somme directe

$$\mathrm{EXP}(\mathbb{C}^n) = P^*.\,\mathrm{EXP}(\mathbb{C}^n) \oplus \bigl\{\ker(P(D) \cap \mathrm{EXP}(\mathbb{C}^n)\bigr\}$$

où

$$\mathrm{EXP}(\mathbb{C}^n) = \Bigl\{F \in H(\mathbb{C}^n),\ \exists C > 0,\ |F(z)| \leq C\mathrm{e}^{C|z|}\Bigr\}.$$

Une telle décomposition existe toujours dans le cas $n = 1$; nous le montrerons dans la section 2. En revanche, il n'existe pas à notre connaissance de démonstration dans le cas $n > 1$; deux difficultés semblent surgir : d'une part l'injectivité d'un opérateur du type $P^*(D)[P.]$ s'avère en défaut dans l'anneau des séries formelles (sauf dans certains cas, par exemple ceux où P est homogène ou même quasi-homogène, ce qui éclaire le résultat de FISCHER) ; d'autre part, l'existence d'une décomposition du type (2) ne semble pas résulter du théorème de Newman–Shapiro. Pour s'en convaincre, on notera que ce dernier résultat subsiste lorsque P est une exponentielle polynôme, soit

$$P(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{\beta\in\mathbb{C}^n} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha_1}\cdots z^{\alpha_n}\exp\bigl(\langle\beta, z\rangle\bigr),$$

$$P^*(D)(F) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{\beta\in\mathbb{C}^n} \bar{c}_{\alpha,\beta} D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n} F(.+\beta),$$

tandis que nous montrerons dans cette même section que la décomposition (2) est en défaut pour $P(z) = \exp(z) - 1$.

Le problème de l'existence de la décomposition (2) nous ramène à l'étude de l'injectivité et de la surjectivité, dans l'espace des fonctions entières, d'un certain opérateur à coefficients polynômiaux. Les méthodes que nous introduirons dans la section 3 pour étudier l'injectivité ou la surjectivité de $P^*(D)[P.]$, lorsque P est un polynôme de degré au plus 2, seront avant tout des méthodes de variable réelle. Nous prouverons dans cette même section le résultat suivant :

THÉORÈME . — *Soit P un polynôme en n variables à coefficients complexes, de degré au plus égal à 2; l'opérateur $P^*(D)[P.]$ est injectif sur $H(\mathbb{C}^n)$; lorsque $n = 2$, c'est une bijection de $H(\mathbb{C}^n)$ dans lui même.*

Les méthodes développées dans la preuve de ce théorème peuvent vraisemblablement être généralisées pour prouver qu'il existe une décomposition du type (2) pour tout polynôme de degré au plus 2; cependant, si l'on examine quelques exemples, tels que ceux où $P(z) = (z_1 - z_2^p)^2$, ou $P(z) = z_1 - Q(z_2)$ (lorsque $n = 2$), on voit que notre méthode ne permet de couvrir que le cas des polynômes du second degré.

Malgré tout, une notion d'orthogonalité soutend les questions relatives à l'injectivité de $P^*(D)[P.]$; elle peut s'interpréter, et cela s'impose lorsque P définit un ensemble à singularités, en termes du courant résidu $\bar{\partial}(1/P)$ de la manière suivante : toute solution de l'équation différentielle $P^*(D)(F) \equiv 0$ se représente sous la forme

$$F(z) = \left\langle \bar{\partial}\big(1/P^*(\zeta)\big), \mathrm{e}^{\langle \zeta, z\rangle} \omega(\zeta) \right\rangle$$

où ω est une $(n, n-1)$ forme différentielle à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ et de décroissance plus rapide (au sens des fonctions et de toutes leurs dérivées) que toute fonction de la forme $\exp(-A\|\zeta\|)$. D'autre part, le fait qu'une fonction entière soit divisible par P se lit $F.\bar{\partial}(1/P) \equiv 0$ (en temps que courant). Nous préciserons ce double rôle des deux courants résidus $\bar{\partial}(1/P)$ et $\bar{\partial}(1/P^*)$ dans la section 4 de cet article.

Il est enfin un dernier point méritant d'être évoqué ici : peut on, dans les cas simples où une décomposition du type (2) est valide, envisager un algorithme de calcul explicite pour les candidats PQ_1 et Q_2 intervenant dans la décomposition de Fischer d'un polynôme (ou d'une fonction entière) Q donné ? Tel est par exemple le cas lorsque $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ en dimension 3, où tout polynôme homogène de degré k s'écrit $Q = PQ_1 + Q_2$, la fonction harmonique Q_2 étant

$$Q_2 = Q - \frac{P}{2(2k-1)} \Delta Q + \frac{P^2}{2 \cdot 4 \cdot (2k-1)(2k-3)} \Delta^2 Q + \cdots$$

d'après la formule de Clebsch [10]. Nous montrerons, également dans la section 4, comment les formules de représentation intégrale de B. BERNDTSSON, M. ANDERSSON, et M. PASSARE [1], [2] permettent d'envisager la reproduction des solutions de type exponentiel de l'équation $P^*(D)(F) \equiv 0$ à partir de leurs valeurs sur la variété (à multiplicité) $P = 0$.

Nous tenons à remercier C. BERENSTEIN, R. GAY, M. PASSARE, A. SEBBAR pour toutes les discussions que nous avons eues avec eux à propos de ce problème.

2. Injectivité et surjectivité de $Q(D)[P.]$ dans le cas $n = 1$.

Nous démontrons tout d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$; une condition nécessaire et suffisante pour que $Q(D)[P.]$ soit bijectif de $H(\mathbb{C})$ dans lui même est* : $\deg(P) = \deg(Q)$ *et $Q(D)[P.]$ injectif.*

Preuve. — Supposons $Q(D)[P.]$ bijectif; le fait que l'on ait la décomposition en somme directe $H(\mathbb{C}) = P.H(\mathbb{C}) + \ker(Q(D))$ implique qu'il existe un isomorphisme entre $\ker(Q(D))$ et $H(\mathbb{C})/P.H(\mathbb{C})$; comme $\dim_{\mathbb{C}}(H(\mathbb{C})/PH(\mathbb{C})) = \deg(P)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \ker(Q(D)) = \deg(Q)$, il vient nécessairement $\deg(P) = \deg(Q)$.

La réciproque est immédiate si l'on pense au problème comme problème de Cauchy. $\square$

Remarque. — Nous avons ici un cas particulier très simple du théorème d'indice de Malgrange [13].

Dans le cas où $Q = P^*$, on peut démontrer immédiatement l'injectivité de $Q(D)[P.]$; en effet, si $P^*(D)(P.F) \equiv 0$, $P.F$ est une exponentielle polynôme; d'après le théorème de Lindelöf, F est de type exponentiel et l'on a $F \in \mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n)$. Mais alors, en utilisant le produit scalaire dans $\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^n)$, on a :

$$\langle P^*(D)(P.F), F\rangle = \langle P.F, P.F\rangle = \|P.F\|^2 = 0$$

ce qui implique $P.F = 0$ et donc $F = 0$.

Le fait que le problème ait été posé avec des polynômes nous permet d'utiliser très fortement que l'on ne travaille qu'avec des espaces de dimension finie. Il en va tout autrement lorsque P est une exponentielle polynôme, comme le prouve l'exemple suivant :

PROPOSITION 2. — *L'opérateur* $(\mathrm{e}^D - 1)[(\mathrm{e}^z - 1).]$ *est surjectif non injectif de $H(\mathbb{C})$ dans lui même; on a d'autre part la décomposition orthogonale* $\mathbb{A}_2(\mathbb{C}) = (\mathrm{e}^z - 1)\mathbb{A}_2(\mathbb{C}) \oplus \{\ker(\mathrm{e}^D - 1) \cap \mathbb{A}_2(\mathbb{C})\}$.

Preuve. — Le second point est une conséquence du résultat de Newman–Shapiro.

L'ensemble des réels $\mathcal{F} = \{\exp(-4k\pi^2),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est sans point d'accumulation dans $\mathbb{C}^*$; par conséquent, il suit du théorème de Mittag–Leffler l'existence d'une fonction G, holomorphe dans $\mathbb{C}^*$, non identiquement nulle, s'annulant en tous les points de $\mathcal{F}$. La fonction 1-périodique F avec $F(z) = G(\exp(2i\pi z))$ est dans le noyau de $(\mathrm{e}^D - 1)[(\mathrm{e}^z - 1).]$.

La preuve de la surjectivité de cet opérateur est analogue : étant donnée une fonction entière f, il existe une fonction h, holomorphe dans $\mathbb{C}^*$, telle que $h(\exp(-4k\pi^2)) = f(2ik\pi)$; alors la fonction g définie par $g(z) = h(\exp(2i\pi z))$ coïncide avec f sur les zéros (tous simples) de $\mathrm{e}^z - 1$. L'opérateur $\mathrm{e}^D - 1$ étant surjectif, on peut écrire toute fonction entière F comme $(\mathrm{e}^D - 1)(f)$, soit $(\mathrm{e}^D - 1)(g + (\mathrm{e}^z - 1)g_1) = (\mathrm{e}^D - 1)((\mathrm{e}^z - 1)g_1)$, ce qui achève de prouver la surjectivité. $\square$

3. Problème de Fischer et polynômes du second degré

Nous nous proposons dans cette section d'étudier l'injectivité et la surjectivité de l'opérateur $P^*(D)[P.]$ lorsque P est un polynôme en n variables de degré au plus 2. Il est clair que cet opérateur est une bijection de $H(\mathbb{C}^n)$ dans lui même si $\deg(P) = 1$.

A) Injectivité de $P^*(D)[P.]$. — Nous prouvons ici le :

THÉORÈME 3. — *Soit P un élément de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ de degré au plus 2 ; l'opérateur $P^*(D)[P.]$ est injectif sur $H(\mathbb{C}^n)$.*

Preuve. — Écrivons le polynôme P^* sous la forme

$$P^*(z) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} a_{i,j} z_i z_j + \sum_{i=1}^{i=n} b_i z_i + c$$

avec $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$. La matrice

$$\mathbb{A} = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq n,;1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}}$$

étant symétrique, il existe une matrice unitaire $\mathbb{B}$ telle que $\mathbb{B}\mathbb{A}{}^t\mathbb{B}$ soit une matrice diagonale à coefficients réels positifs ou nuls (ce résultat est probablement classique, cependant, faute d'en avoir pu trouver une preuve dans la littérature, nous donnerons en appendice la preuve que nous a suggéré J. FRESNEL) ; nous noterons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les termes diagonaux de cette matrice.

Supposons que F soit une solution de $P^*(D)(F) \equiv 0$ divisible par le polynôme P ; afin de prouver que $F \equiv 0$, nous allons poser différemment le problème en jouant sur le fait que F est une fonction entière et en utilisant un certain nombre de transformations simples. Tout d'abord, la fonction G définie par $G(z) = F({}^t\mathbb{B} \cdot z)$ est solution de $Q^*(D)(G) \equiv 0$ et est divisible par le polynôme Q où

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=1}^{i=n} d_i z_i + \bar{c}$$

les coefficients d_i se déduisant aisément des coefficients de P et des coefficients de la matrice $\mathbb{B}$.

Admettons que $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ soient strictement positifs et que $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$; on écrit :

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=1}^{i=m} d_i z_i + \sum_{i=m+1}^{i=n} d_i z_i + \bar{c}.$$

Considérons la fonction entière H définie par

$$H(z) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{i=m} \frac{d_i}{2\lambda_i} z_i\Big)\, G(z)\,;$$

cette fonction est toujours divisible par Q et est solution de l'opérateur différentiel

$$R^*(D) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i D_i^2 + \sum_{i=m+1}^{i=n} \bar{d}_i D_i + c - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\bar{d}_i^2}{4\lambda_i}.$$

Enfin la fonction K définie par

$$K(z) = H\Big(z_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1}, \dots, z_m + \frac{d_m}{2\lambda_m}, z_{m+1}, \dots, z_n\Big)$$

est toujours solution de $R^*(D)(K) \equiv 0$ et est cette fois divisible par R.

Nous allons alors distinguer trois cas :

Cas (a) : $m < n$ et l'un des d_i, $i = m+1, \dots, n$ est non nul.

Supposons $d_{m+1} \neq 0$ et considérons la fonction K_1 définie par

$$K_1(z) = \exp\Big[\frac{z_{m+1}}{\bar{d}_{m+1}}\Big(c - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\bar{d}_i^2}{4\lambda_i}\Big)\Big]\, K(z)\,;$$

cette fonction est toujours divisible par R mais est solution de l'opérateur

$$S^*(D) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i D_i^2 + \sum_{i=m+1}^{i=n} \bar{d}_i D_i$$

ce qui fait que la fonction K_2 définie par

$$K_2(z) = K_1\Big(z_1, \dots, z_m, z_{m+1} - \frac{1}{d_{m+1}}\Big[\bar{c} - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{d_i^2}{4\lambda_i}\Big], z_{m+2}, \dots, z_n\Big)$$

est toujours solution de $S^*(D)$ tout en étant divisible par S. Mais il est connu ([17], théorème 13; nous en donnerons pour être complets une preuve dans la section 4) que l'opérateur $S^*(D)[S.]$ est injectif sur $H(\mathbb{C}^n)$ lorsque le polynôme S est quasi homogène; rappelons que ceci signifie qu'il existe un n-uplet de réels strictement positifs $(t_1, \dots, t_n)$ tel que pour tous les monômes X^m figurant dans l'expression de S, on ait $\sum m_i t_i =$ constante. Comme c'est le cas ici, on a $K_2 \equiv 0$, et en remontant les calculs $F \equiv 0$.

Cas (b) : $m = n$.

Reprenons la fonction K et posons

$$e = c - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\bar{d}_i^2}{4\lambda_i}\,;$$

K est alors solution de $S^*(D)(K) \equiv 0$ tout en étant nulle sur la variété des zéros du polynôme

$$S(z) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i z_i^2 + \bar{e}.$$

Si $e = 0$, $K \equiv 0$ comme conséquence du théorème de Fischer. Si $e = r^2 \mathrm{e}^{i\theta}$, $r \neq 0$, on considère la fonction K_1 définie cette fois par $K_1(z) = K(i\mathrm{e}^{i\theta/2} z)$; cette fonction est solution de $(\sum \lambda_i D_i^2 - r^2)(K_1) \equiv 0$ et est divisible par $\sum \lambda_i z_i^2 - r^2$; enfin, la fonction K_2 définie par

$$K_2(z) = K_1(\sqrt{\lambda_1}\, z_1, \dots, \sqrt{\lambda_n}\, z_n)$$

est solution de $\Delta F \equiv r^2 F$ tout en étant divisible par $\sum \lambda_i z_i^2 - r^2$. Si E désigne l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ défini comme $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \sum \lambda_i z_i^2 \leq r^2\}$, la fonction K_2, restreinte à E, est soit identiquement nulle, soit fonction propre du problème de Dirichlet relatif à E et au laplacien; la valeur propre correspondante est r^2; ceci est contradictoire avec le fait que les valeurs propres de ce problème dans E consistent en une suite

$$0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_n > \cdots$$

avec $\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n = -\infty$ [5]. La fonction K_2 est par conséquent identiquement nulle dans E ; cet ensemble étant un sous ensemble inclus dans un sous espace totalement réel de $\mathbb{C}^n$, il suit du principe du prolongement analytique que la fonction entière K_2 est la fonction nulle ; comme précédemment, on en déduit $F \equiv 0$.

Cas (c) : $m < n$ et $d_{m+1} = \cdots = d_n = 0$..

La situation se ramène immédiatement à celle décrite dans le cas précédent ; on démontre que pour toutes les valeurs de $z_{m+1}, \ldots, z_n$, la fonction

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \longmapsto K(\zeta_1, .., \zeta_m, z_{m+1}, .., z_n)$$

est identiquement nulle ; la nullité de F en résulte. $\square$

B) La surjectivité de $P^*(D)[P.]$. — La surjectivité de l'opérateur $P^*(D)[P.]$ équivaut, puisque tout opérateur différentiel est surjectif de $H(\mathbb{C}^n)$ dans $H(\mathbb{C}^n)$, au fait qu'il existe une décomposition de $H(\mathbb{C}^n)$ du type (2). Nous pouvons prouver ici le :

THÉORÈME 3′. — *Soit P un polynôme de deux variables de degré au plus 2 ; l'opérateur $P^*(D)[P.]$ est surjectif de $H(\mathbb{C}^2)$ dans lui même.*

La surjectivité de l'opérateur $P^*(D)[P.]$ sera donc, dans le cas où $n = 2$ et où $\deg(P) = 2$, une conséquence des trois lemmes suivants.

LEMME 4. — *Soient α_1, α_2, r, trois nombres réels non nuls, avec $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$; toute fonction entière f de deux variables se décompose sous la forme*

$$f = (\alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - r^2)g + h \tag{3}$$

où g et h sont deux fonctions entières avec de plus

$$(\alpha_1^2 D_1^2 + \alpha_2^2 D_2^2 - r^2)(h) \equiv 0.$$

Preuve. — Remarquons tout d'abord que f se décompose sous la forme (3) si et seulement si la fonction F définie par $F(z) = f(\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ se décompose sous la forme

$$F(z) = (\alpha_1^4 z_1^2 + \alpha_2^4 z_2^2 - r^2)G(z) + H(z)$$

où G et H sont deux fonctions entières avec de plus $(\Delta - r^2)H \equiv 0$.

Pour prouver le lemme, nous allons par conséquent démontrer qu'il existe deux suites de fonctions entières $(G_{k,\ell})_{k \geq 0, \ell \geq 0}$, $(H_{k,\ell})_{k \geq 0, \ell \geq 0}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad z_1^k z_2^\ell = (\alpha_1^4 z_1^2 + \alpha_2^4 z_2^2 - r^2)G_{k,\ell}(z_1, z_2) + H_{k,\ell}(z_1, z_2), \\ \text{(ii)} \quad (\Delta - r^2)(H_{k,\ell}) \equiv 0, \\ \text{(iii)} \quad \forall R > 0,\ \exists C = C(R) > 0,\ \max\limits_{\|\zeta\| \leq R} |H_{k,\ell}(\zeta)| \leq C^{k+\ell}. \end{cases} \tag{4}$$

Il suffira alors de poser

$$H(z_1,z_2)=\sum_{k\geq 0,l\geq 0}\frac{1}{k!\,\ell!}\Big(\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial z_1^k\partial z_2^\ell}F\Big)_{(0,0)}H_{k,\ell}$$

et la fonction $F-H$, limite dans $H(\mathbb{C}^n)$ d'une suite d'éléments de l'idéal fermé engendré par $\alpha_1^4z_1^2+\alpha_2^4z_2^2-r^2$ sera elle même dans cet idéal et s'écrira par conséquent $(\alpha_1^4z_1^2+\alpha_2^4z_2^2-r^2)G(z_1,z_2)$.

D'après le théorème de Newman–Shapiro [16], il existe deux suites de fonctions entières (en fait d'éléments de $\mathbb{A}_2(\mathbb{C}^2)$), $(g_{k,\ell})$ et $(h_{k,\ell})$ telles que

$$\begin{gathered}z_1^kz_2^\ell=(\alpha_1^2z_1^2+\alpha_2^2z_2^2-r^2)g_{k,\ell}(z_1,z_2)+h_{k,\ell}(z_1,z_2),\\(\alpha_1^2D_1^2+\alpha_2^2D_2^2-r^2)(h_{k,\ell})\equiv 0.\end{gathered}$$

On peut poser

$$\begin{aligned}G_{k,\ell}(z_1,z_2)&=\alpha_1^{-k}\alpha_2^{-\ell}g_{k,\ell}(\alpha_1z_1,\alpha_2z_2),\\H_{k,\ell}(z_1,z_2)&=\alpha_1^{-k}\alpha_2^{-\ell}h_{k,\ell}(\alpha_1z_1,\alpha_2z_2),\end{aligned}$$

et les propriétés (i) et (ii) de (4) sont alors satisfaites.

Pour fixer les idées, nous supposerons dorénavant $|\alpha_1|<|\alpha_2|$; on pose

$$\rho=\frac{|r|}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\sqrt{\alpha_2^4-\alpha_1^4},\quad \eta_0=\operatorname{Argch}\Big(\frac{|r|}{\alpha_1^2\rho}\Big)\cdot$$

Si nous utilisons dans $\mathbb{R}^2$ le changement de coordonnées

$$x_1=\rho\,\mathrm{ch}(\eta)\cos(\xi),\quad x_2=\rho\,\mathrm{sh}(\eta)\sin(\xi),$$

l'ellipse $\alpha_1^4x_1^2+\alpha_2^4x_2^2-r^2=0$ a pour équation $\eta=\eta_0$. Notre objectif est d'estimer la croissance de $H_{k,\ell}$ dans $\mathbb{R}^2$ en fonction de $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$. On considère pour cela la fonction $\Gamma_{k,\ell}$ définie dans le plan des (ξ,η) par

$$\Gamma_{k,\ell}(\xi,\eta)=H_{k,\ell}\big(\rho\,\mathrm{ch}(\eta)\cos(\xi),\rho\,\mathrm{sh}(\eta)\sin(\xi)\big)$$

et par conséquent solution de l'équation du second ordre

$$\Big(\Delta-r^2\rho^2\big(\mathrm{ch}^2(\eta)-\cos^2(\xi)\big)\Big)(\Gamma_{k,\ell})\equiv 0 \tag{5}$$

assujetie aux conditions “au bord”

$$\Gamma_{k,\ell}(\xi,\eta_0)=\rho^{k+\ell}\big(\mathrm{ch}(\eta_0)\big)^k\big(\mathrm{sh}(\eta_0)\big)^\ell\cos^k(\xi)\sin^\ell(\xi) \tag{6}$$

ce qui fait de cette fonction la solution d'un problème de Dirichlet dans $\mathbb{T} \times [-\eta_0, \eta_0]$, où $\mathbb{T}$ désigne $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; toute la difficulté provient ici du fait que pour atteindre une estimation de $\|\Gamma_{k,\ell}(.,\eta)\|_\infty$, pour $\eta \gg \eta_0$, on doive regarder cette fonction comme la solution d'un problème de Dirichlet extérieur sans que la condition habituelle de radiation dite de Sommerfeld [20] soit *a priori* remplie.

Lorsque l'on veut résoudre l'équation différentielle (5), on est amené à considérer les solutions particulières de la forme $\varphi(\xi)\psi(\eta)$ où φ est une solution 2π périodique d'une équation de la forme

$$\varphi'' - \left(-\tfrac{1}{2}r^2\rho^2\cos(2\xi) + p\right)\varphi \equiv 0 \tag{7}$$

et ψ une solution de l'équation différentielle qui lui est couplée

$$\psi" + \left(-\tfrac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta) + p\right)\psi \equiv 0. \tag{8}$$

L'équation (7) est l'équation de Mathieu de paramètres $q = -\frac{1}{4}r^2\rho^2$ et p (voir [4], [12], [14]) ; l'équation (8) est l'équation de Mathieu modifiée de mêmes paramètres (notons qu'ici $q < 0$).

Introduisons les quatre suites de fonctions ($N = 0, 1, 2...$)

$$\mathrm{ce}_{2N}(\cdot,q), \quad \mathrm{ce}_{2N+1}(\cdot,q), \quad \mathrm{se}_{2N+1}(\cdot,q), \quad \mathrm{se}_{2N+2}(\cdot,q)$$

désignées habituellement comme les fonctions de Mathieu ([4], chap. 1) ; ce sont des fonctions 2π périodiques solutions d'équations du type (7) correspondant à des choix particuliers des constantes p en fonction de N (p_N^1 pour $\mathrm{ce}_{2N}(\cdot,q), \ldots, p_N^4$ pour $\mathrm{se}_{2N+2}(\cdot,q)$) ; lorsque q est fixé, comme c'est le cas ici, les quatre suites $p_N^1, \ldots, p_N^4$ tendent vers $+\infty$ avec N. Nous utiliserons de manière essentielle le fait que la collection de ces quatre suites de fonctions (dites de première, seconde, troisième et quatrième espèce), à q fixé, constitue une base orthonormée de $L^2([0, 2\pi])$ (voir par exemple [4], chap. 1, § 6 pour les relations d'orthogonalité et [14], p. 183, § 2.67, pour la totalité de ce système).

Nous pouvons par conséquent écrire, en notant $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $L^2([0, 2\pi])$, soit $(1/\pi)\int f(t)\bar{g}(t)\,\mathrm{d}t$ si l'on s'en tient aux conditions de normalisation habituelles

$$\cos^k(\xi)\sin^\ell(\xi) = \sum_{N=0}^{+\infty} a_1(k,\ell,N;q)\,\mathrm{ce}_{2N}(\xi,q) + \cdots + \sum_{N=0}^{+\infty} a_4(k,\ell,N;q)\,\mathrm{se}_{2N+2}(\xi,q)$$

où
$$a_1(k,\ell,N;q) = \big\langle \cos^k(\cdot)\sin^\ell(\cdot) \mid \mathrm{ce}_{2N}(\cdot,q)\big\rangle,$$
$$\dots$$
$$a_4(k,\ell,N;q) = \big\langle \cos^k(\cdot)\sin^\ell(\cdot) \mid \mathrm{se}_{2N+2}(\cdot,q)\big\rangle$$
la convergence de la série ayant lieu dans $L^2([0,2\pi])$. Si nous examinons de plus près la décroissance à l'infini des "coefficients de Fourier" de $\cos^k(\cdot)\sin^\ell(\cdot)$ dans cette base orthonormée, nous voyons par exemple

$$\begin{aligned} &p_N^1 a_1(k,\ell,N;q)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^k(\xi)\sin^\ell(\xi)\Big[\mathrm{ce}''_{2N}(\xi,q) - \tfrac12 r^2\rho^2\cos(2\xi)\,\mathrm{ce}_{2N}(\xi,q)\Big]\,\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\big(\cos^2(\xi)\sin^2(\xi)\big) - \tfrac12 r^2\rho^2\cos^2(\xi)\sin^2(\xi)\cos(2\xi)\Big]\\ &\qquad\qquad \mathrm{ce}_{2N}(\xi,q)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

ce qui implique, si l'on répète le raisonnement pour $\mathrm{ce}_{2N+1}(\cdot,q),\dots,$ $\mathrm{se}_{2N+2}(\cdot,q)$ et si l'on utilise la formule de Plancherel

$$\sum_{j=1}^{j=4}\sum_{N=0}^{+\infty} \big|p_N^j\big|^2\big|a_j(k,\ell,N;q)\big|^2 \le C(\rho,r)(k+\ell+1)^4 \tag{9}$$

pour une certaine constante positive $C(\rho,r)$.

Lorsque η décrit $\mathbb{R}^{+*}$ et lorsque φ est une fonction de Mathieu prise dans la liste ci-dessus, la fonction $\eta \mapsto \langle \Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta) \mid \varphi\rangle$ a la même parité que φ et est solution de l'équation de Mathieu modifiée de mêmes paramètres (q,p) que l'équation dont φ est solution ; ainsi, la fonction $\Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta)$ pour $\eta>0$, se développe dans $L^2([0,2\pi])$ sous la forme

$$\begin{aligned}\Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta) &= \rho^{k+\ell}\big(\mathrm{ch}(\eta_0)\big)^k\big(\mathrm{sh}(\eta_0)\big)^\ell\\ &\qquad\times\sum_{j=1}^{j=4}\sum_{N=0}^{+\infty} a_j(k,\ell,N;q)\frac{\theta_{j,N}(i\eta,q)}{\theta_{j,N}(i\eta_0,q)}\theta_{j,N}(\cdot,q)\end{aligned}$$

$\theta_{j,N}$ désignant la fonction de Mathieu de j-ème espèce et d'indice N.

Si φ est une fonction de Mathieu de premier paramètre $q=-\frac14 r^2\rho^2$, la fonction de deux variables $(u,v)\mapsto \Phi(u,v)=\varphi(u)\varphi(iv)$ est solution dans un rectangle du type $[u_0,u_0+2\pi]\times[-v_0,v_0]$ de l'équation différentielle

$$\Delta\Phi - r^2\rho^2\big(\mathrm{ch}^2(v)-\cos^2(u)\big)\Phi \equiv 0\,;$$

il suffit de choisir pour u_0 un zéro réel de φ (il en existe toujours d'après le théorème de Sturm [5]) et d'utiliser le fait que le problème de Dirichlet est bien posé pour un tel opérateur différentiel (puisque $\mathrm{ch}^2(v)-\cos^2(u)\geq 0$) pour voir que $v\mapsto\varphi(iv)$ ne peut s'annuler qu'en $v=0$. Pour estimer $\langle\Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta)\mid\Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta)\rangle$, il suffit d'estimer

$$\sum_{j=1}^{j=4}\sum_{N=0}^{+\infty}\left|a_j(k,\ell,N;q)\right|^2\left|\frac{\theta_{j,N}(i\eta,q)}{\theta_{j,N}(i\eta_0,q)}\right|^2.$$

Fixons la valeur de $\eta>0$ et supposons que N soit assez grand ($N>N(\eta)$) pour que

$$(11)\qquad \begin{cases} (*) & -\frac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta)+\inf\limits_{1\leq j\leq 4}(p_N^j)>0,\\ (**) & \eta_0\geq\left[\frac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta)+\min\limits_{1\leq j\leq 4}|p_N^j|\right]^{-1}.\end{cases}$$

Nous sommes amenés à distinguer deux cas :

(α) Envisageons tout d'abord la majoration de $\varphi(i\eta)/\varphi(i\eta_0)$ lorsque φ est une fonction de Mathieu (nécessairement impaire, donc de troisième ou quatrième espèce d'après [14], p. 187–189) telle que $\varphi'(0)\neq 0$; on pose $\psi(v)=\varphi(iv)/i\varphi'(0)$ et l'on a par conséquent

$$\frac{\varphi(iv)}{\varphi(iv_0)}=\frac{\psi(v)}{\psi(v_0)},\quad \psi'(0)=1\,;$$

puisque ψ est solution réelle d'une équation du type (8) (avec $p=p_N$ satisfaisant (11)), ψ est positive et concave sur l'intervalle $[0,\eta]$ et l'on a

$$(12)\qquad \begin{cases} 0<\psi(\eta)\leq\psi(0)+\eta,\\ \max\limits_{[0,\eta]}|\psi''(v)|\leq\left(\frac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta)+|p_N|\right)\left(\psi(0)+\eta\right)\end{cases}$$

et par conséquent

$$\min_{[0,\epsilon]}\left(\psi'(v)\right)\geq\tfrac{1}{2}$$

pour $\epsilon=\frac{1}{2}(\psi(0)+\eta)(\frac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta)+|p_N|)$, ce qui conduit grâce au théorème des accroissements finis à

$$(13)\qquad \psi(\epsilon)\geq\frac{1}{4(\frac{1}{2}r^2\rho^2+|p_N|)}\left(\psi(0)+\frac{1}{\psi(0)+\eta}\right).$$

Mais la fonction $(u,v) \mapsto \varphi(u)\psi(v)$ est solution de

$$\Delta\Phi - r^2\rho^2\big(\mathrm{ch}^2(v) - \cos^2(u)\big)\Phi \equiv 0$$

dans le rectangle $[0,2\pi] \times [-\eta_0,\eta_0]$; d'après les inégalités de Shauder [5], il existe une constante $K = K(\eta_0)$ telle que

$$\max_{[0,2\pi]\times[-\eta_0,\eta_0]} \big|\varphi(u)\psi(v)\big| \leq K \max_{\partial([0,2\pi]\times[-\eta_0,\eta_0])} \big|\varphi(u)\psi(v)\big| \,;$$

si l'on fixe u_1 tel que $|\varphi(u_1)| = \|\varphi\|_\infty$, on obtient

$$\big|\varphi(u_1)\big|\psi(\epsilon) \leq K\|\varphi\|_\infty \psi(\eta_0) = K\big|\varphi(u_1)\big|\psi(\eta_0)$$

et par conséquent $\psi(\epsilon) \leq K\psi(\eta_0)$; combinant cette dernière inégalité avec (12) et (13), il vient :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\psi(\eta)}{\psi(\eta_0)}\right| &\leq 4K\big(\tfrac{1}{2}r^2\rho^2\mathrm{ch}(2\eta) + |p_N|\big)\,\frac{\psi(0)+\eta}{\psi(0) + (\psi(0)+\eta)^{-1}} \\
&\leq K_1(\eta_0,\eta)|p_N|
\end{aligned} \tag{14}$$

(β) Lorsque φ est une fonction de Mathieu de l'une des quatre espèces telle que $\varphi'(0) = 0$, avec $N > N(\eta)$, on a nécessairement $\varphi(0) \neq 0$; de plus, la première inflexion présentée par le graphe de $v \mapsto \psi(v) = \varphi(iv)$, pour $v \geq 0$, se situe au delà de η (la fonction satisfait (8) et l'on a les inégalités (11)) ; la fonction $\psi\psi''$ reste strictement négative sur $]0,\eta]$. La fonction $|\psi|$ est donc décroissante sur $[0,\eta]$ et l'on a dans ce cas

$$\left|\frac{\psi(\eta)}{\psi(\eta_0)}\right| \leq 1. \tag{15}$$

Nous déduisons de cette discussion

$$\begin{aligned}
\big\langle \Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta) \mid \Gamma_{k,\ell}(\cdot,\eta)\big\rangle &\leq \sum_{1\leq j\leq 4}\ \sum_{N=0}^{N=N(\eta)} \big|a_j(k,\ell,N;q)\big|^2 \left|\frac{\theta_{j,N}(i\eta,q)}{\theta_{j,N}(i\eta_0,q)}\right|^2 \\
&\qquad + K_1^2(\eta_0,\eta) \sum_{1\leq j\leq 4}\ \sum_{N=0}^{N=+\infty} \big|a_j(k,\ell,N;q)\big|^2 \big|p_N^j\big|^2 \\
&\leq K_2(\eta_0,\eta)\, C(\rho,\eta_0)^{k+\ell}
\end{aligned}$$

si l'on utilise (6), (9), (14), (15).

Or la fonction de Green $(X,Y) \mapsto G_\eta(X,Y)$ relative au problème de Dirichlet pour l'opérateur $\Delta - r^2\mathrm{I}$ dans l'ellipse

$$E_\eta = \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{x_1^2}{\rho^2\mathrm{ch}^2(\eta)} + \frac{x_2^2}{\rho^2\mathrm{sh}^2(\eta)} \le 1\Big\}$$

a des dérivées du premier ordre continues dans $\overline{E}_{\eta/2} \times E_\eta$ ([20], p. 286, th. 3) ; d'autre part, dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon $\rho\,\mathrm{sh}\big(\frac12\eta\big)$, on a, d'après la formule de Green

$$H_{k,\ell}(X) = -\int_{\partial E_\eta} \frac{\partial G_\eta}{\partial \vec{n}}(X,Y)\, H_{k,\ell}(Y)\,\mathrm{d}\sigma \tag{16}$$

ce qui nous conduit, après différentiation sous le signe somme à des inégalités de la forme

$$\max_{\substack{X\in\mathbb{R}^2\\ \|X\|=\rho\,\mathrm{sh}(\eta/2)}} \Big(|H_{k,\ell}| + \Big|\frac{\partial H_{k,\ell}}{\partial x_1}\Big| + \Big|\frac{\partial H_{k,\ell}}{\partial x_2}\Big|\Big) \le K_3(\eta_0,\eta)\, C(\rho,\eta_0)^{k+\ell}$$

Mais la fonction $X \mapsto u(\zeta) = H_{k,\ell}(\rho\,\mathrm{sh}\big(\frac12\eta\big)X)$ est solution dans la sphère unité de l'opérateur différentiel

$$P(D) = \rho^2\alpha_1^2\,\mathrm{sh}^2\big(\tfrac12\eta\big)D_1^2 + \rho^2\alpha_2^2\,\mathrm{sh}^2\big(\tfrac12\eta\big)D_2^2 - \mathrm{I}$$

et se représente ([3], th. 2) sous la forme

$$u(X) = \int_{\{P(-i\zeta)=0\}} \frac{\Psi(\zeta)}{\big\|\nabla\vec{P}(\zeta)\big\|^2} \exp\Big(-i\Big\langle\zeta,\ X - \frac{\mathrm{Im}(\zeta)}{\|\mathrm{Im}(\zeta)\|}\Big\rangle\Big)\,\mathrm{d}V,$$

avec $X \in \mathbb{R}^2$, $\|X\| < 1$ et où $\mathrm{d}V$ désigne la mesure associée au courant d'intégration sur la variété des zéros complexes du polynôme $P(-iX)$ et Ψ la fonction

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta) = {} & \frac{1}{\|\mathrm{Im}(\zeta)\|^3}\big|A_1^2y_1\bar{\zeta}_1 + A_2^2y_2\bar{\zeta}_2\big|^2 u\Big(\frac{\mathrm{Im}(\zeta)}{\|\mathrm{Im}(\zeta)\|}\Big)\\ & + \frac{1}{\big\|\mathrm{Im}(\zeta)\big\|^3}\big(A_1^2y_1\bar{\zeta}_1 + A_2^2y_2\bar{\zeta}_2\big)\\ & \qquad \times\big[A_1^2y_1D_1 + A_2^2y_2D_2\big]u\Big(\frac{\mathrm{Im}(\zeta)}{\|\mathrm{Im}(\zeta)\|}\Big)\end{aligned}$$

où $\mathrm{Im}(\zeta) = (y_1,y_2)$ et $A_j^2 = \alpha_j^2\rho^2 sh^2(\frac12\eta)$, $j = 1,2$.

La formule de représentation ci-dessus reste valide dans la sphère unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ et l'on en déduit

$$\max_{\substack{\zeta\in\mathbb{C}^2\\ \|\zeta\|\le\rho\,\mathrm{sh}(\eta/4)\}}} \big(|H_{k,\ell}(\zeta)|\big) \le K_4(\eta_0,\eta)\, C(\rho,\eta_0)^{k+\ell}$$

ce qui achève la preuve de ((4), iii) et par conséquent fournit la conclusion du lemme. ▯

LEMME 5. — *Soit P le polynôme $X_1^2 + \cdots + X_n^2 - r^2$ où r désigne un nombre réel; l'opérateur $P(D)[P.]$ est une bijection de $H(\mathbb{C}^n)$ dans lui même.*

Preuve. — Ce lemme découle immédiatement du théorème 1 de [22] et du fait que les zéros des "petites" fonctions de Bessel j_ν, $\nu > -1$ sont réels [23]. □

LEMME 6. — *Soit λ un nombre complexe non nul et P_λ le polynôme de deux variables défini par $P_\lambda(X) = X_2 - \lambda X_1^2$; l'opérateur différentiel $P_\lambda(D)[P_\lambda^*.]$ est surjectif de $H(\mathbb{C}^2)$ dans $H(\mathbb{C}^2)$.*

Preuve. — Remarquons tout d'abord que parmi les éléments du noyau de l'opérateur $P_\lambda(D)$ (sur $H(\mathbb{C}^n)$) figurent les polynômes $S_k (k \in \mathbb{N})$

$$S_k(z_1, z_2) = \sum_{p+2q=k} \frac{z_1^p (\lambda z_2)^q}{p!\,q!}$$

reliés de manière immédiate aux polynômes de Hermite $\mathbf{H}_k$ par

$$S_k(z, \bar{\lambda} z) = |\lambda|^k z^k \sum_{p+2q=k} \Big(\frac{1}{|\lambda|}\Big)^p \frac{1}{p!\,q!} = |\lambda|^k z^k \frac{i^k}{k!} \mathbf{H}_k\Big(\frac{1}{2i|\lambda|}\Big)$$

Considérons un élément G de $H(\mathbb{C}^2)$; puisque l'opérateur $P_\lambda(D)$ est surjectif, il existe un élément F_1 de $H(\mathbb{C}^2)$ tel que $P_\lambda(D)(F_1) = G$; il existe une fonction entière d'une variable f telle que

$$F_1(z_1, z_2) = f(z_1) + P_\lambda^*(z_1, z_2) F_2(z_1, z_2)$$

où F_2 désigne une fonction entière de deux variables.

Notons $\sum a_k z^k$ le développement en série de f ; on définit une fonction entière S en posant :

$$S(z_1, z_2) = \sum a_k \frac{k!\, S_k(z_1, z_2)}{(i|\lambda|)^k\, \mathbf{H}_k\big[1/(2i|\lambda|)\big]}.$$

Cette série est convergente dans $H(\mathbb{C}^2)$ puisque pour (z_1, z_2) tels que

$$|z_1| \le M, \quad |z_2| \le |\lambda| M, \qquad M > 0,$$

on a

$$\big|S_k(z_1, z_2)\big| \le M^k \frac{(i|\lambda|)^k}{k!}\, \mathbf{H}_k\Big(\frac{1}{2i|\lambda|}\Big).$$

On construit ainsi une solution entière F de l'opérateur $P_\lambda(D)$ telle que $f(z_1) = F(z_1, z_2) + P_\lambda^*(z_1, z_2)F_3(z_1, z_2)$ et l'on peut par conséquent écrire $G = P_\lambda(D)[P_\lambda^* F]$, ce qui conclut la preuve du lemme 5. $\square$

Preuve du théorème 3'. — L'étude faite lors de la preuve de l'injectivité et conduisant aux différentes réductions successives peut être répétée en ce qui concerne le problème de la surjectivité de $P^*(D)[P.]$; dans le cas $n = 2$, nous pouvons nous ramener au cas où P est de la forme $\alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - r^2$, $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ou du type P_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$; ces cas relèvent tous des trois lemmes précédents (sauf dans le cas ou $P = P_0$ pour lequel la surjectivité de l'opérateur $P_0^*(D)[P_0.]$ est immédiate). $\square$

4. Problème de Fischer et principe fondamental

Le principe fondamental de L. EHRENPREIS ([6], [9]), énoncé dans le cadre des fonctions entières, nous autorise à représenter toute solution (dans $H(\mathbb{C}^n)$) d'un système d'équations différentielles

$$P_1(D)F \equiv \cdots \equiv P_m(D)F \equiv 0$$

comme une superposition de solutions élémentaires de ce système. Lorsque de plus $P_1, \ldots, P_m$ définissent un système en "position normale" (ce qui signifie que la suite $P_1, \ldots, P_m$, considérée dans n'importe quel ordre est une suite régulière dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$), on peut donner ([3], [24]) une autre formulation de ce principe en faisant intervenir le courant résidu

$$\bar\partial(1/P) = \bar\partial(1/P_1) \wedge \cdots \wedge \bar\partial(1/P_m)$$

attaché à l'idéal $(P_1, \ldots, P_m)$.

Avant de formuler cette version du principe fondamental, précisons quelques notations : par analogie avec les notations habituellement utilisées pour désigner l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, nous noterons $\mathcal{S}^{k,\ell}(\mathbb{R}^{2n})$, $1 \leq k,\ \ell \leq n$, l'espace des (k,ℓ) formes differentielles sur $\mathbb{R}^{2n}$ dont les coefficients sont $\mathcal{C}^\infty$ et décroissent à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées, plus rapidement que toute fonction du type $\exp(-A\|\zeta\|)$, $A > 0$; nous avons alors la :

PROPOSITION 7. — *Soient $P_1, \ldots, P_m$ m polynômes en position normale dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$; pour toute fonction entière de n variables F, les deux assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $P_1(D)F \equiv \cdots \equiv P_m(D)F \equiv 0$;

(ii) *il existe ω dans $\mathcal{S}^{n,n-m}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que*

$$F(z) = \left\langle \bar\partial(1/P)(\zeta), \mathrm{e}^{\langle\zeta,z\rangle}\omega(\zeta) \right\rangle, \qquad z \in \mathbb{C}^n.$$

Preuve. — Nous pourrions donner une preuve complète de ce résultat en nous inspirant des méthodes développées dans ([3], [24]) ; nous nous contenterons ici de déduire cette proposition de la formulation classique du principe fondamental.

Rappelons qu'une L.A.U. structure pour l'espace $H(\mathbb{C}^n)$ est constituée des fonctions k continues sur $\mathbb{R}^{2n}$ et telles qu'il existe une suite $(\delta_\ell)_{\ell=1,\dots,\infty}$ de nombres positifs avec $k(z) = \sup_\ell\{\delta_\ell \exp(\ell||z||)\}$ (voir par exemple les travaux de S. HANSEN [9], th. 1).

Notons $W_1, \dots, W_N$ les composantes irréductibles de la variété des zéros communs des P_j et introduisons une collection d'opérateurs nœthériens $\partial_{j,t}$, où $j = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, m(j)$, liée à l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$.

(i) *implique* (ii). — Soit F une solution entière du système

$$P_1(D)F \equiv \cdots \equiv P_m(D)F \equiv 0\,;$$

d'après le principe fondamental, il existe $m(1) + \cdots + m(N)$ mesures $\mu_{j,t}$ (avec $\mu_{j,t}$ portée par W_j pour $t = 1, ..., m(j)$) et un élément k de la L.A.U. structure tels que

$$\int_{W_j} k(\zeta)\,\mathrm{d}|\mu_{j,t}|(\zeta) \leq +\infty, \tag{17}$$

où $j = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, m(j)$ et que

$$F(z) = \sum_{1\leq j\leq N} \sum_{t=1}^{t=m(j)} \int_{W_j} \partial_{j,t}(\xi)\big[\mathrm{e}^{\langle \xi, z\rangle}\big]\,\mathrm{d}\mu_{j,t}(\xi) \tag{18}$$

Si (δ_ℓ) désigne la suite associée à k, régularisons en la convolant par une fonction "cloche" positive, de support la boule de rayon 1 et de moyenne 1, la fonction convexe ψ définie par

$$\psi(z) = \sup_\ell \Big(\ell\|z\| + \ln(\delta_\ell) - \ell\Big)$$

et convenons de noter encore ψ cette régularisée. Nous divisons, à z fixé, la fonction $\xi \mapsto \exp\langle \xi, z\rangle$ par $(P_1, \dots, P_m)$ suivant le procédé décrit par B. BERNDTSSON dans [2], les formes différentielles de type (1,0) et les fonctions holomorphes correspondant aux deux poids utilisés étant respectivement

$$Q_1(\zeta) = \partial\psi(\zeta), \qquad G_1(t) = \mathrm{e}^{t-1},$$

$$Q_2(\zeta;\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{j=m} \big|P_j(\zeta)\big|^{2\lambda} \frac{g_j(\xi,\zeta)}{P_j(\zeta)}, \quad G_2(t) = \frac{1}{m!}\prod_{j=0}^{j=m}(mt-j),$$

où $g_1, \dots, g_m$ sont les $(1,0)$ formes différentielles $\sum g_{j,\ell}(\xi,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta_\ell$ construites à partir de diviseurs de Hefer pour $P_1, \dots, P_m$ (soit $P_j(\xi) - P_j(\zeta) = \sum g_{j,\ell}(\xi,\zeta)(\xi_\ell - \zeta_\ell)$) et où λ désigne un paramètre complexe, choisi initialement de partie réelle arbitrairement grande et appelé ensuite à tendre vers 0 suivant le principe du prolongement analytique. Il vient alors la formule de représentation suivante

$$F(z) = \gamma_{n,m}\Big\langle \bar\partial(1/P)(\zeta),\, \mathrm{e}^{\langle \zeta,z\rangle}\, \mathrm{e}^{-\langle \nabla\psi(\zeta),\zeta\rangle}\big(\partial\bar\partial\psi(\zeta)\big)^{n-m}\wedge\theta(\zeta)\Big\rangle \tag{19}$$

avec

$$\theta(\zeta) = \sum_{1\le j\le N}\ \sum_{t=1}^{t=m(j)} \int_{W_j} \partial_{j,t}(\xi)\Big[g_1(\xi,\zeta)\wedge\cdots\wedge g_m(\xi,\zeta)\,\mathrm{e}^{\langle\nabla\psi(\zeta),\xi\rangle}\Big]\,\mathrm{d}\mu_{j,t}(\xi),$$

l'action d'un opérateur $\partial(\xi)$ sur une $(m,0)$ forme $\varphi(\zeta,\xi)\,\mathrm{d}\zeta_I$ étant définie par

$$\partial(\xi)\big[\varphi(\zeta,\xi)\,\mathrm{d}\zeta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\zeta_{i_m}\big] = \partial(\xi)\big[\varphi(\zeta,\xi)\big]\,\mathrm{d}\zeta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\zeta_{i_m}$$

et $\gamma_{n,m}$ désignant une constante positive ne dépendant que de la dimension et du nombre de polynômes. On vérifie aisément que la formule (19) est bien une formule de représentation du type (i).

(ii) *implique* (i). — Cette implication résulte simplement du fait que le courant résidu $\bar\partial(1/P)$ est annulé par les polynômes $P_1, \dots, P_m$ ($P_j.\bar\partial(1/P) \equiv 0$ au sens des courants) et est un courant tempéré d'ordre fini. $\square$

Les idées soutendant l'injectivité de l'opérateur $P^*(D)[P.]$ évoquée dans l'introduction (ou plus généralement la conjecture selon laquelle, lorsque $P_1, \dots, P_m$ constituent un système en position normale, il puisse y avoir incompatibilité pour un élément non nul F de $H(\mathbb{C}^n)$ entre être solution de $P_1^*(D)F \equiv \cdots \equiv P_m^*(D)F \equiv 0$ et appartenir à l'idéal de $H(\mathbb{C}^n)$ engendré par $P_1, \dots, P_m$) semblent résulter d'un argument de dualité. En effet, l'appartenance d'un élément F de $H(\mathbb{C}^n)$ à l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$ est caractérisée par : $F\bar\partial(1/P) \equiv 0$ au sens des courants; si de plus F est solution du système $P_1^*(D)F \equiv \cdots \equiv P_m^*(D)F \equiv 0$, on a d'après la PROPOSITION 7

$$F(z) = \Big\langle \bar\partial(1/P^*)(\zeta),\, \mathrm{e}^{\langle\zeta,z\rangle}\omega(\zeta)\Big\rangle$$

pour un certain élément ω de $\mathcal{S}^{n,n-m}(\mathbb{R}^{2n})$; une telle fonction F est dans l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$ si et seulement si

$$\forall\psi\in\Lambda^{n,n-m}(\mathbb{C}^n),\quad \Big\langle \overline{T}(\bar z)\wedge T(\zeta),\, \mathrm{e}^{\langle\bar z,\zeta\rangle}\,\bar\psi(\bar z)\wedge\omega(\zeta)\Big\rangle = 0, \tag{20}$$

T désignant le courant résidu $\bar{\partial}(1/P^*)$ et $\Lambda^{n,n-m}(\mathbb{C}^n)$ l'espace des $(n, n-m)$ formes à coefficients dans $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$.

Donnons un exemple simple d'application de cette remarque; si t désigne un n-uplet de $(\mathbb{N}^*)^n$, nous dirons qu'un polynôme P est *t-isobare* si le polynôme

$$P^{(t)}(X) = P(X_1^{t_1}, ..., X_n^{t_n})$$

est homogène. Nous avons la proposition suivante, généralisant le théorème 13 de [17] :

PROPOSITION 8. — *Soient $P_1, \dots, P_m$ des polynômes t-isobares (avec $t \in (\mathbb{N}^*)^n$) définissant un système en position normale; soit F une fonction entière dans l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$ et solution de*

$$P_1^*(D)F \equiv \cdots \equiv P_m^*(D)F \equiv 0\,;$$

alors $F \equiv 0$.

Preuve. — Remarquons que pour tout j de $\{1, \dots, m\}$, on a

$$P_j(\epsilon^{t_1}\zeta_1, \dots, \epsilon^{t_n}\zeta_n) = \epsilon^{k_j} P_j(\zeta_1, \dots, \zeta_n), \epsilon \in \mathbb{R}^+, \zeta \in \mathbb{C}^n \tag{21}$$

pour un certain k_j dans $\mathbb{N}$.

Nous représentons une solution F du système différentiel sous la forme

$$F(z) = \left\langle \bar{\partial}(1/P^*)(\zeta), e^{\langle \zeta, z\rangle}\omega(\zeta)\right\rangle$$

et nous écrivons (20) avec, à la place de ψ , la forme ψ_ϵ égale au pull-back de la forme ψ par l'application

$$\zeta \longmapsto \left(\frac{1}{\epsilon^{t_1}}\,\zeta_1, \dots, \frac{1}{\epsilon^{t_n}}\,\zeta_n\right)$$

ϵ désignant un réel strictement positif. Après changement de variables et utilisation des identités (21), on voit que pour tout $\epsilon > 0$, on a, à partir du moment où F est dans l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_m$

$$\left\langle \overline{T}(\bar{z}) \wedge T(\zeta), \exp\Big(\sum_{j=1}^{j=n} \epsilon^{t_j}\,\bar{z}_j\zeta_j\Big)\,\bar{\psi}(\bar{z}) \wedge \omega(\zeta)\right\rangle = 0 \tag{22}$$

où T désigne le courant $\bar{\partial}(1/P^*)$; en écrivant la nullité en 0 de toutes les dérivées de la fonction de ϵ figurant dans (22), nous obtenons, pour tout entier positif p

$$\left\langle \overline{T}(\bar{z}) \wedge T(\zeta), \sum_{\ell_1 t_1 + \cdots + \ell_n t_n = p} \frac{(\bar{z}_1\zeta_1)^{\ell_1} \cdots (\bar{z}_n\zeta_n)^{\ell_n}}{\ell_1!\dots l_n!}\,\bar{\psi}(\bar{z}) \wedge \omega(\zeta)\right\rangle = 0$$

et aussi, compte tenu d'un immédiat passage à la limite

$$\Big\langle \overline{T}(\bar{z}) \wedge T(\zeta), \sum_{l_1 t_1 + \ldots + l_n t_n = p} \frac{(\bar{z}_1 \zeta_1)^{\ell_1} \cdots (\bar{z}_n \zeta_n)^{\ell_n}}{\ell_1 ! \ldots \ell_n !} \bar{\omega}(\bar{z}) \wedge \omega(\zeta) \rangle = 0.$$

Puisque nous avons affaire ici à une somme de termes positifs ou nuls (les variables z et ζ se séparent dans chaque et l'on reconnait en chacun d'eux le carré d'un module), on a, pour tout p entier positif, pour tout ℓ dans $\mathbb{N}^n$ tel que $\sum \ell_j t_j = p$

$$\big\langle T(\zeta), \zeta_1^{\ell_1} \cdots \zeta_n^{\ell_n} \omega(\zeta) \big\rangle = 0 \quad .$$

d'où l'on déduit, les t_j étant tous strictement positifs, que T annule toutes les formes $Q\omega$ où Q est un polynôme en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$; il en résulte bien la nullité de F puisque

$$F(z) = \big\langle T(\zeta), \mathrm{e}^{\langle \zeta, z \rangle} \omega(\zeta) \big\rangle. \quad \square$$

Lorsque F est une solution entière du système $P_1^*(D)F \equiv \cdots \equiv P_m^*(D)F \equiv 0$ obéissant à des conditions de croissance convenables, il est raisonnable de penser qu'il existe une formule (ou tout au moins un algorithme) de reproduction pour F à partir de ses valeurs sur la variété "à multiplicités" associée à l'idéal $(P_1, \ldots, P_m)$; avant d'énoncer un premier résultat dans ce sens, nous devons préciser quelques notations : si Q est un polynôme en $2n$ variables $Q = \sum q_{\alpha,\beta} X^\alpha Y^\beta$ et G une fonction entière, on note

$$\big(Q(D_1, \ldots, D_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\big) \cdot \big(G(\xi)\big) \, \mathrm{d}\zeta_I =: \Big(\sum_\alpha \sum_\beta q_{\alpha,\beta} \zeta^\beta D^\alpha G(\xi) \Big) \, \mathrm{d}\zeta_I$$

ζ et ξ désignant des éléments de $\mathbb{C}^n$ et I un multi-indice constitué d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

PROPOSITION 9. — *Soient $P_1, \ldots, P_m$ m polynômes définissant un système en position normale et F une solution entière de type exponentiel du système d'équations* $P_1^*(D)F \equiv \cdots \equiv P_m^*(D)F \equiv 0$; *la fonction F se représente dans $\mathbb{C}^n$ sous la forme*

$$\frac{1}{(2i\pi)^{n-m}} \Big\langle \bar{\partial}(1/P^*)(\zeta), \\ \mathrm{e}^{\langle \zeta, (\cdot) - \bar{\zeta} \rangle} \big(\partial \bar{\partial} \|\zeta\|^2\big)^{n-m} \wedge \Big(\sum_I (\Phi_I(D, \zeta) \cdot F(\bar{\zeta}) \Big) \, \mathrm{d}\zeta_I) \Big\rangle$$

avec $\sum \Phi_I(X,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta_I = g_1(X,\zeta)\wedge\cdots\wedge g_m(X,\zeta)$, *les formes* $g_1,\dots,g_m$ *étant les* $(1,0)$ *associées à des systèmes de diviseurs de Hefer pour* $P_1^*,\dots,P_m^*$.

Nota. — On rappelle que l'action du courant résidu $\bar\partial(1/P^*)$ sur une $(n,n-m)$ forme ω est définie comme la valeur en $\lambda=0$ du prolongement analytique de :

$$\lambda \longmapsto \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(2i\pi)^m}\,\lambda^m \int \left|P_1^*\cdots P_m^*\right|^{2(\lambda-1)} \bar\partial \overline{P}_1^* \wedge\cdots\wedge \bar\partial \overline{P}_m^* \wedge \omega.$$

Preuve. — Elle repose comme précédemment sur les formules de représentation de Berndtsson; on écrit F comme la transformée de Fourier–Borel d'une fonctionnelle analytique $\mathbf{T}$, soit

$$F(z) = \big\langle \mathbf{T}(\zeta), \exp\langle\zeta,z\rangle\big\rangle,$$

puis, à z fixé, on divise la fonction $\zeta \mapsto \exp\langle\zeta,z\rangle$ en utilisant cette fois les deux paires (Q,G) suivantes :

$$Q_1(\zeta) = \partial\|\zeta\|^2, \qquad G_1(t) = \mathrm{e}^{t-1},$$
$$Q_2(z,\zeta;\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{j=m} \left|P_j^*(\zeta)\right|^{2\lambda} \frac{g_j(z,\zeta)}{P_j^*(\zeta)}, \quad G_2(t) = \frac{1}{m!}\prod_{j=1}^{j=m}(mt-j).$$

On intervertit finalement les actions de $\mathbf{T}$ et de $\bar\partial(1/P^*)$ dans la formule finale obtenue (tenant compte du fait que $P_j^*\mathbf{T}$ est pour tout j la fonctionnelle nulle puisque F est solution du système différentiel). □

5. Appendice

Nous nous proposons de démontrer ici que pour toute matrice symétrique complexe S, il existe une matrice unitaire U et une matrice diagonale D à coefficients réels positifs ou nuls telles que $D = {}^tUSU$; cette démonstration nous a été communiquée par J. FRESNEL.

Notons S_1 et S_2 les parties réelle et imaginaire de S et $\mathbf{C}$ la matrice $(2n,2n)$ (S étant d'ordre n) définie par

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & -S_1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\mathbf{C}$ est réelle symétrique, ses valeurs propres sont réelles; considérons celles qui sont strictement positives, $\alpha_1 > \cdots > \alpha_t > 0$ et les sous espaces propres de $\mathbb{R}^{2n}$ $V(\alpha_1),\dots,V(\alpha_t)$ correspondants.

Si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par $u(X,Y) = (Y,-X)$, u est orthogonal pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, satisfait $u^2+\mathrm{Id} = 0$ et transforme $V(\alpha_j)$ en le sous espace propre associé à la valeur propre $-\alpha_j$, ce qui prouve que les valeurs propres non nulles de u sont $\alpha_1, -\alpha_1, \ldots, \alpha_t, -\alpha_t$ et que le noyau de u est de dimension $2(n-t) = 2p$.

Notons, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $W(\alpha)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini comme l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{C}^n$ tels que $S(Z) = \alpha\overline{Z}$ et $\mathcal{W}(\alpha)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $W(\alpha)+iW(\alpha)$ si α est non nul, le sous-espace $W(0)$ si $\alpha = 0$. Si α est non nul, et si Z et Z' sont deux éléments de $W(\alpha)$, la quantité $\sum z_j\bar{z}'_j$ est un nombre réel, ce qui prouve que la forme hermitienne $(Z', Z) \mapsto {}^t\overline{Z}'Z$ peut être considérée comme un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $W(\alpha)$. Ainsi, toute base orthonormale de $W(\alpha_j)$ (considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) pour le produit scalaire ainsi défini est une famille orthonormale de $W(\alpha_j)$ pour la forme hermitienne correspondante, ce qui en fait une base pour $\mathcal{W}(\alpha_j)$.

On construit ainsi une base de $\mathbb{C}^n$ en juxtaposant une base orthonormale de $\mathcal{W}(0)$ (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$) et des bases orthonormales des différents $W(\alpha_j)$ (considérés comme $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, avec comme produit scalaire $\sum z_j\bar{z}'_j$) ; on montre que cette base est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, les éléments seront dénotés $T_1, \ldots, T_n$; comme $S(T_j) = \alpha_j\overline{T}_j$, on a ${}^tUSU = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_t, 0, \ldots, 0)$, ce qui achève la preuve de notre affirmation. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSSON (M.) and PASSARE (M.). — *A shortcut to weighted representation formulas for holomorphic functions*, Ark. Mat., t. **26**, 1988, p. 1–12.

[2] BERNDTSSON (B.). — *A formula for interpolation and division in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann., t. **263**, 1981, p. 399–418.

[3] BERNDTSSON (B.) and PASSARE (M.). — *Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle*, J. Funct. Anal., t. **84, 2**, 1989, p. 358–372.

[4] CAMPBELL (R.). — *Théorie générale de l'équation de Mathieu.* — Éditions Masson, Paris, 1955.

[5] COURANT (R.) and HILBERT (D.). — *Methods of Mathematical physics, 2.* — Interscience Publishers, Wiley and Sons, New York, 1962.

[6] EHRENPREIS (L.). — *Fourier analysis in several complex variables.* — Tracts in Math, 17, Wiley Interscience, New York, 1970.

[7] FISCHER (E.). — *Über die Differentiations prozesses der Algebra*, J. Math., t. **148**, 1917, p. 1–78.

[8] GILBARG (D.) and TRUDINGER (N.S.). — *Elliptic Partial Differential Equations of second order.* — Springer Verlag, Berlin, 1983.

[9] HANSEN (S.). — *Localizable analytically uniform spaces and the fundamental principle*, Trans. Amer. Mat. Soc., t. **264, 1**, 1981, p. 235–250.

[10] HOBSON (E.W.). — *The Theory of spherical and ellipsoidal Harmonics.* — Chelsea Publishing Company, New York, 1965.

[11] KISELMAN (C.). — *Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants*, Bull. Soc. Math. France, t. **97**, 1969, p. 329–356.

[12] MCLACHLAN (N.W.). — *Theory and application of Mathieu functions.* — Oxford University Press, 1947.

[13] MALGRANGE (B.). — *Sur les points singuliers des équations différentielles*, Enseign. Math., t. **2, 20**, 1974, p. 147–176.

[14] MEIXNER (J.) and SCHAFKER (F.W.). — *Mathieusche funktionen und sphäroid functionen*, Die Grundlehren der Math, **71**, Springer Verlag, 1954.

[15] MERIL (A.) and STRUPPA (D.). — *Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions*, Bull. London Math. Soc., t. **17**, 1985, p. 469–473.

[16] NEWMAN (D.J.) and SHAPIRO (H.). — *Fischer spaces of entire functions*, Proc. Sympos. Pure Math., t. **11**, 1968, p. 360–369.

[17] NEWMAN (D.J.) and SHAPIRO (H.). — *A Hilbert space of entire functions related to the operational calculus*, mimeographed, Ann Arbor, 1964.

[18] SHAPIRO (H.). — *An algebraic theorem of E. Fischer and the holomorphic Goursat problem*, preprint.

[19] SZEGÖ (G.). — *Orthogonal polynomials.* — Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., t. **23**, 1939.

[20] VEKUA (I.N.). — *New methods for solving elliptic equations.* — North Holland, 1967.

[21] WADA (R.). — *A uniqueness set for linear partial differential operators of the second order*, Funkcial. Ekvac., t. **31**, 1988, p. 241–248.

[22] WADA (R.). — *Holomorphic functions on the complex sphere*, Tokyo J. Math., t. **11, 1**, 1988, p. 205–218.
[23] WATSON (G.). — *Theory of Bessel functions.* — Cambridge University Press, London-New York, 1966.
[24] YGER (A.). — *Formules de division et prolongement méromorphe*, Séminaire Lelong–Skoda, 1986–1987, Lecture Notes in Math., **1295**.