BULLETIN DE LA S. M. F.

BENALI BENZAGHOU
JEAN-PAUL BÉZIVIN

Propriétés algébriques de suites différentiellement finies

Bulletin de la S. M. F., tome 120, nº 3 (1992), p. 327-346
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_327_0>

Bull. Soc. math. France,
120, 1992, p. 327–346.

PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DE SUITES DIFFÉRENTIELLEMENT FINIES

PAR

BENALI BENZAGHOU ET JEAN-PAUL BEZIVIN (*)

RÉSUMÉ. — On dit qu'une suite $u(n)$, à valeurs dans un corps commutatif K est récurrente linéaire si la série génératrice $f(x) = \sum u(n)x^n$ est une fraction rationnelle, et différentiellement finie si $f(x)$ vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients dans $K[x]$. Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes de caractériser les suites $u(n)$ différentiellement finies telles que $1/u(n)$ le soit aussi, et les suites $u(n)$ différentiellement finies vérifiant une équation polynômiale à coefficients suites récurrentes linéaires.

ABSTRACT. — We say that the sequence $u(n)$ of elements of a commutative field K is a linear recurrent sequence if the generating function $f(x) = \sum u(n)x^n$ is a rational function, and differentially finite if $f(x)$ satisfy a linear homogeneous differential equation with coefficients in $K[x]$. In this paper, we study the problem of finding the differentially finite sequence $u(n)$ such that $1/u(n)$ is also differentially finite, and the differentially finite sequences that satisfy a polynomial equation with linear recurrent sequences coefficients.

1. Introduction et Notations

Soient K un corps commutatif de caractéristique nulle et $u(n)$ une suite d'éléments de K. Nous dirons que $u(n)$ est une *suite récurrente linéaire* si elle vérifie une relation de récurrence de la forme

$$\sum_{i=0}^{t} a_i u(n+i) = 0 \tag{1}$$

pour n assez grand, les a_i étant des constantes de K non toutes nulles. Il est bien connu qu'une telle suite admet, pour n assez grand, une expression

(*) Texte reçu le 28 mars 1991, révisé le 29 octobre 1991.
J.-P. BEZIVIN, Université de Caen, Département de Mathématique et de Mécanique, 14032 Caen Cedex.
B. BENZAGHOU, Université H. Boumediene, Mathématiques, El Alia, B.P. n^o 32, Bab Ezzouar, Alger (Algérie).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1992/327/$ 5.00

de la forme

$$u(n) = \sum_{1}^{s} P_i(n)\alpha_i^n. \tag{2}$$

où les α_i sont des éléments non nuls d'une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, et les P_i des polynômes non nuls de $\overline{K}[X]$.

A une telle suite $u(n)$, on associe sa série génératrice $f(x) = \sum u(n)x^n$ qui est la série formelle à coefficients dans K. Dire que $u(n)$ est une suite récurrente linéaire est alors équivalent à dire que la série $f(x)$ est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle ; c'est pourquoi nous notons l'ensemble des suites récurrentes linéaires par $R(K)$.

On parle aussi, en raison de l'expression (2), de polynômes exponentiels pour les suites récurrentes linéaires. Une partie de $R(K)$ est formée des sommes exponentielles ; ce sont les éléments de $R(K)$ tels que dans l'expression (2), les polynômes P_i soient des constantes non nulles.

Nous noterons $S(K)$ cette partie de $R(K)$; sur la série génératrice f, l'appartenance de $u(n)$ à $S(K)$ signifie que la fraction rationnelle f n'a que des pôles simples dans une clôture algébrique de K.

Nous aurons besoin aussi de la notion de suite différentiellement finie ou D-finie ; une telle suite sera une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\sum_{i=0}^{t} Q_i(n)u(n+i) = 0 \tag{3}$$

pour n assez grand, avec $Q_i \in K[X]$ pour tout i.

Il est équivalent de dire que la série génératrice $f(x)$ vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, d'où cette appelation, introduite par STANLEY dans [11].

Nous noterons $J(K)$ l'ensemble de ces suites. Enfin, nous introduisons une dernière classe de suites d'éléments de K, que nous appellerons *suites algébriques* ; ce sont les suites $u(n)$ d'éléments de K telles que la série génératrice $f(x)$ soit une série algébrique sur $K(X)$, c'est-à-dire vérifie une équation $P(x, f(x)) = 0$ où $P(X, Y)$ est un polynôme non nul de $K[X, Y]$.

Nous noterons $A(K)$ ce dernier ensemble. On a $S(K)$ inclus dans $R(K)$, $R(K)$ inclus dans $A(K)$ et enfin $A(K)$ inclus dans $J(K)$. Il est bien connu que $J(K)$ est un anneau commutatif non intègre pour les opérations usuelles sur les suites ; il en est de même de $S(K)$ et de $R(K)$, mais pas de $A(K)$. Cependant, le produit d'une suite de $A(K)$ par une suite de $R(K)$ est encore dans $A(K)$, comme on s'en rend compte aisément en utilisant la formule (2).

Le produit usuel $w(n) = u(n)v(n)$ de deux suites $u(n)$ et $v(n)$ est encore appelé *produit de Hadamard*, car le produit défini sur l'ensemble des séries formelles par $f * g = \sum u(n)v(n)x^n$ si $f = \sum u(n)x^n$ et $g = \sum v(n)x^n$ a été introduit et étudié par HADAMARD pour ses bonnes propriétés vis à vis des singularités des séries f, g, $f * g$ quand le corps de base est $\mathbb{C}$.

Les propriétés algébriques de $S(K)$ et $R(K)$ ont été étudiées depuis longtemps, et sont assez bien connues (voir [1], [5], [7], [8]). Par contre, en ce qui concerne les suites D-finies, on connaît bien moins de résultats, voir l'article [11] déjà cité.

Dans cet article, nous allons examiner un certain nombre de problèmes dans $J(K)$, analogues aux problèmes résolus dans $R(K)$, et aussi les relations entre éléments de $J(K)$ et $R(K)$. Dans chaque partie, nous ferons si nécessaire une brève introduction indiquant ce qui est connu dans le cas de $R(K)$.

Nous utiliserons assez largement des outils d'analyse complexe, de sorte que nous supposons désormais $K = \mathbb{C}$. Mais comme on le voit facilement, pour toute suite $u(n)$ de $J(K)$, il existe un sous-corps K_0, de type fini sur $\mathbb{Q}$, tel que $u(n)$ appartienne à $J(K_0)$; par suite, pour des propriétés algébriques, on peut toujours considérer que l'on s'est placé dans $\mathbb{C}$, de sorte que supposer $K = \mathbb{C}$ ne nuit pas à la généralité des énoncés.

2. Suites de $J(K)$ vérifiant une relation de dépendance algébrique

Dans cette partie, nous considérons les suites D-finies qui vérifient une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable n. Nous aurons besoin d'une définition.

Définition 2.1. — On dit qu'une suite $u(n)$ est un *emboîtement* de suites fractions rationnelles s'il existe un entier naturel positif d tel que, pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, il existe une fraction rationnelle $F_r(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$ telle que $u(kd + r) = F_r(k)$ pour tout k assez grand.

Une suite $u(n)$ qui est un emboîtement de suites fractions rationnelles est D-finie, et aussi vérifie une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable n ; on vérifie en effet facilement que :

$$w(n) = \prod_{r=0}^{d-1} \Big[u(n) - F_r\Big(\frac{n-r}{d}\Big)\Big]$$

est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Nous allons démontrer que la réciproque est vraie :

THÉORÈME 1. — *Soit $u(n)$ une suite D-finie, vérifiant $P(n,u(n)) = 0$, où :*

$$P(X,Y) = \sum_{0}^{t} A_j(X)Y^j \in \mathbb{C}[X,Y]$$

n'est pas nul. Alors $u(n)$ est un emboîtement de suites fractions rationnelles.

Démonstration. — On ne peut pas supposer que $P(X,Y)$ est irréductible, car $J(\mathbb{C})$ n'est pas intègre. Nous pouvons cependant supposer que $P(X,Y)$ n'a pas de facteurs multiples.

Considéré comme équation en la variable z, $P(z,Y) = 0$ définit au voisinage de l'infini des fonctions algébriques $\psi_1,\dots,\psi_t$ qui seront donc distinctes.

On a par hypothèse, pour n assez grand, l'égalité :

$$\prod_{1}^{t}\big(u(n) - \psi_j(n)\big) = 0 \qquad (n \geq N_0). \tag{4}$$

Quitte à supposer n un peu plus grand, on peut supposer aussi que $\psi_j(n) \neq \psi_i(n)$ si $i \neq j$, $n \geq N_0$. Nous supposerons aussi que pour tout i, il existe une infinité de valeurs de n telles que $u(n) = \psi_i(n)$.

Puisque la suite $u(n)$ est dans $J(\mathbb{C})$, on a une relation non triviale de la forme :

$$\sum_{0}^{s} H_j(n)u(n+j) = 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand, avec} \quad H_0H_s \neq 0.$$

Nous supposerons $H_0(n)H_s(n) \neq 0$ pour $n \geq N_0$. Ces réductions étant faites, pour tout $n \geq N_0$, il existe d'après (4) un entier $\ell \in \{1,\dots,t\}$, déterminé de façon unique, tel que $u(n) = \psi_\ell(n)$; nous notons $\ell(n)$ cet entier.

Posons $\omega(n) = (\ell(n),\dots,\ell(n+s))$ pour $n \geq N_0$.

L'application ω est à valeurs dans l'ensemble fini $\{1,\dots,t\}^{s+1}$.

Soit ω_0 un élément de cet ensemble qui est atteint une infinité de fois, $\omega_0 = (\ell_0,\ell_1,\dots,\ell_s)$ et soit $A = \{n, n \geq N_0, \omega(n) = \omega_0\}$, ensemble que nous notons aussi $\{n_k\ ;\ k \geq 1\}$.

Soit $\varphi(z)$ la fonction algébrique définie par :

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{s} H_j(z)\psi_{\ell_j}(z+j).$$

Pour $n \in A$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_0^s H_j(n)\psi_{\ell_j}(n_j)\\ &= \sum_0^s H_j(n)\psi_{\ell(n+j)}(n+j)\\ &= \sum_0^s H_j(n)u(n+j) = 0.\end{aligned}$$

Puisque A est infini, on en déduit que $\varphi(z) = 0$. Considérons maintenant l'ensemble $A' = \{n+1, n \in A\}$.

Pour n dans A, on a $\ell(n+1) = \ell_1, \dots, \ell(n+s) = \ell_s$ par définition de A. Par contre, $\ell(n+s+1)$ peut a priori varier avec $n \in A$. Soit B une partie infinie de A telle que $\ell(n+s+1)$ soit constant, et égal à ℓ_{s+1}.

Le raisonnement que nous venons de faire pour A, appliqué à B, montre que l'on a :

$$\prod_0^s H_j(z+1)\psi_{\ell_{j+1}}(z+j+1) = 0. \tag{5}$$

On remplace alors z par $n \in A$ quelconque dans (5) d'où :

$$\sum_0^{s-1} H_j(n+1)\psi_{\ell_j}(n+j+1) + H_s(n+1)\psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = 0.$$

On a $\psi_{\ell_{j+1}}(n+j+1) = u(n+j+1)$ pour $0 \leq j \leq s-1$, car $n \in A$, donc :

$$\sum_0^{s-1} H_j(n+1)u(n+j+1) + H_s(n+1)\psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = 0. \tag{6}$$

Tenant compte de $\sum_0^s H_j(n+1)u(n+j+1) = 0$, il en résulte que :

$$H_s(n+1)\psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = H_s(n+1)u(n+s+1)$$

et puisque $H_s(n+1) \neq 0$, on a $u(n+s+1) = \psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1)$, donc $\ell(n+s+1) = \ell_{s+1}$ pour tout n dans A, et pas seulement pour les éléments de B.

On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $n \in A \mapsto \ell(n+k)$ est constante; nous noterons cette valeur constante par ℓ_k. Pour tout k, on a donc :

$$\sum_0^s H_j(z+k)\psi_{\ell_{j+k}}(z+j+k) = 0. \tag{7}$$

Soit $\mathbb{L}$ le corps de fonctions engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par

$$\psi_{\ell_0}(z), \quad \psi_{\ell_1}(z+1), \dots, \psi_{\ell_{s-1}}(z+s-1).$$

La relation $\varphi(z) = 0$ et $H_s(z) \neq 0$ montrent que $\psi_{\ell_s}(z+s) \in \mathbb{L}$.

En procédant par récurrence, la relation (7) montre alors que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\psi_{\ell_k}(z+k) \in \mathbb{L}$.

Soit ℓ un indice qui apparaît une infinité de fois dans la suite ℓ_k ; il existe donc une suite croissante k_n d'entiers tels que $\psi_\ell(z+k_n) \in \mathbb{L}$.

Si la fonction algébrique ψ_ℓ a un point de branchement z_0, il en résulte que, pour tout n, $z_0 - k_n$ est un point de branchement pour $\psi_\ell(z+k_n)$, donc appartient à l'ensemble des points de branchement pour $\mathbb{L}$, qui est fini. Ceci est clairement impossible, et par suite ψ_ℓ est méromorphe dans tout $\mathbb{C}$. Étant algébrique, c'est donc une fraction rationnelle.

Tous les indices parmi $\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{s-1}\}$ interviennent une infinité de fois, et tout indice ℓ parmi $\{1, \dots, t\}$ est tel qu'il existe une infinité de valeurs de n telles que $\ell(n) = \ell$, grâce à nos hypothèses. Par suite, toutes les fonctions ψ_ℓ sont des fractions rationnelles.

Nous reprenons maintenant la relation (7), que nous pouvons écrire aussi :

$$\sum_0^s H_j(z)\psi_{\ell_{j+k}}(z+j) = 0 \tag{8}$$

en y remplaçant $z+k$ par z.

Soit k un entier ≥ 2, et T tel que $n_1 + T = n_k$. On a $\ell(n_1 + T + h) = \ell(n_k + h) = \ell_h$ pour $h = 0, 1, \dots, s-1$, d'où on tire, en prenant $k = 0$ et $k = T$ dans la relation (8), que $\psi_{\ell_s}(z+s) = \psi_{\ell_{s+t}}(z+s)$, donc $\ell_s = \ell_{s+T}$.

En procédant par récurrence sur m, on voit donc en utilisant la relation (8) que $\ell_m = \ell_{m+T}$ pour tout m dans $\mathbb{N}$, $m \geq n_1$. Comme $\ell(m+n_1) = \ell_m, \ell(m+T+n_1) = \ell_{m+T}$, il en résulte que la suite $\ell(n)$ est périodique à partir d'un certain rang. Quitte à faire une translation sur l'indice, on peut supposer qu'elle est périodique.

Nous avions posé au départ $u(n) = \psi_{\ell(n)}(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $n = kT + r, r \in \{0, 1, \dots, T-1\}, k \in \mathbb{N}$, donc

$$u(n) = u(kT + r) = \psi_{\ell(kT+r)}(kT + r) = \psi_{\ell(r)}(kT + r).$$

Soit $F_r(X) = \psi_{\ell(r)}(XT + r) \in \mathbb{C}(X)$. On a alors :

$$\forall\, k,\ \forall\, r \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad u(kT + r) = F_r(k),$$

ce qui prouve que $u(n)$ est un emboîtement de suites fractions rationnelles, et termine la démonstration du THÉORÈME 1.

3. Suites de $J(K)$ dont l'inverse au sens de Hadamard est dans $J(K)$

Dans cette partie, nous considérons le problème suivant :

Soit $u(n)$ une suite D-finie. On suppose que $u(n) \neq 0$ pour toute valeur de n, et que la suite $v(n) = 1/u(n)$ est D-finie. Que peut-on dire de la suite $u(n)$?

Dans le cas des suites récurrentes linéaires, on peut montrer que si $u(n)$ et $1/u(n)$ sont toutes deux dans $R(\mathbb{C})$, alors $u(n)$ est un emboîtement de suites géométriques, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel d non nul et pour $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ des constantes λ_r , μ_r dans $\mathbb{C}$ non nulles telles que $u(kd + r) = \lambda_1 \mu_r^k$ (cf. [1]). La suite $v_r(k) = u(kd + r)$ vérifie alors $v_r(k+1) = \mu_r v_r(k)$.

Dans le cas des suites algébriques, on a exactement le même résultat : si $u(n)$ est une suite de $A(\mathbb{C})$ telle que $u(n) \neq 0$ pour tout n et $1/u(n)$ appartient à $A(\mathbb{C})$, alors $u(n)$ est un emboîtement de suites géométriques, (cf. [2]).

On peut construire de manière analogue une classe de suites D-finies dont l'inverse au sens de Hadamard est aussi D-finie.

Nous dirons que la suite $u(n)$ est un *emboîtement de suites hypergéométriques* s'il existe un entier d non nul et, pour tout $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, des fractions rationnelles $F_r(k)$ non nulles telles que $v_r(k) = u(kd + r)$ vérifie la relation :

$$v_r(k+1) = F_r(k) v_r(k)$$

pour tout k assez grand et pour tout r.

Il est clair que toute suite $u(n)$ qui est un emboîtement de suites hypergéométriques est une suite D-finie, et, si de plus $u(n) \neq 0$ pour tout n, $v(n) = 1/u(n)$ est aussi un emboîtement de suites hypergéométriques, donc D-finie.

Nous pensons que la réciproque est vraie :

CONJECTURE C_1. — *Une suite $u(n)$ D-finie telle que $u(n) \neq 0$ pour tout n est telle que $v(n) = 1/u(n)$ est aussi D-finie si et seulement si $u(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques.*

Ceci fournit donc une description conjecturale de l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $J(\mathbb{C})$.

Cette description signifie qu'une série $f(X) = \sum u(n)X^n$ D-finie est telle que son inverse au sens de Hadamard $\sum X^n/u(n)$ est D-finie si et seulement si $f(X)$ est obtenue par emboîtement de séries hypergéométriques $F\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix}\,\middle|\, X\right)$, ou de leurs transformées par $\mathcal{L}_s(F)$, où

$$\mathcal{L}_s\Big(\sum u(n)X^n\Big) = \sum \frac{u(n)}{(n\,!)^s}X^n, \qquad s \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *La conjecture C_1 est vraie quand la suite $u(n)$ vérifie une relation de récurrence à coefficients polynômes de longueur inférieure ou égale à 2.*

Démonstration. — Le cas où la longueur de la récurrence vérifiée par $u(n)$ est égale à 1, est le cas où, pour n assez grand, on a une relation de la forme

$$u(n+1) = F(n)u(n)$$

où F est une fraction rationnelle non nulle. Par suite, $u(n)$ est une suite hypergéométrique, et il n'y a rien à démontrer.

Nous supposons donc dans la suite qu'il y a une relation de la forme :

$$u(n+2) = A_1(n)u(n+1) + A_0(n)u(n) \tag{9}$$

pour n assez grand, où A_1 et A_0 sont des fractions rationnelles.

On déduit de (9) que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a une relation :

$$u(n+j) = A_{1,j}(n)u(n+1) + A_{0,j}(n)u(n) \tag{10}$$

pour n assez grand, où $A_{1,j}$ et $A_{0,j}$ sont des fractions rationnelles.

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas où il existe un entier $j \geq 2$, tel que $A_{1,j} = 0$. On a donc :

$$u(n+j) = A_{0,j}(n)u(n).$$

En prenant $d = j$, on voit alors facilement que $u(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques, ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Nous supposons désormais $A_{1,j} \neq 0$, pour tout $j \geq 2$.

Nous savons que $v(n) = 1/u(n)$ est D-finie. On a donc une relation de récurrence

$$\sum_{j=0}^{t} H_j(n)/u(n+j) = 0 \qquad (H_0 H_t \neq 0). \tag{11}$$

On remplace dans (11) $u(n+j)$ par l'expression (10). Il vient :

$$\sum_{j=0}^{t} \frac{H_j(n)}{A_{1,j}(n)u(n+1) + A_{0,j}(n)u(n)} = 0.$$

Posons $a(n) = u(n+1)/u(n)$. On a alors :

$$\sum_{j=0}^{t} \frac{H_j(n)}{A_{1,j}(n)a(n) + A_{0,j}(n)} = 0. \tag{12}$$

On a $A_{1,0} = 0$, $A_{0,0} = 1$, $A_{1,1} = 1$, $A_{0,1} = 0$, $A_{1,j} \neq 0$ pour $j \geq 2$.

On multiplie (12) par $a(n) \prod_{j=2}^{t}(A_{1,j}(n)a(n) + A_{0,j}(n))$ et on trouve la relation :

$$\sum_{j=0}^{t} H_j(n) \prod_{k \neq j} \big(A_{1,k}(n)a(n) + A_{0,k}(n)\big) = 0.$$

Ceci est une relation de la forme $P(n, a(n)) = 0$, où $P \in \mathbb{C}(X)[Y]$, avec $\mathrm{d}^\circ_Y P \leq t$.

Le terme Y^t n'apparaît que dans l'expression

$$H_0(X) Y \prod_{2}^{t} \big(A_{1,k}(X)Y + A_{0,k}(X)\big),$$

les autres termes étant de degré $\leq t-1$ en la variable Y. Le coefficient de Y^t dans ce facteur est égal à

$$H_0(X) \prod_{2}^{t} A_{1,j}(X) \neq 0$$

et par suite $P(X,Y) \neq 0$.

En chassant les dénominateurs, on trouve donc une relation de dépendance algébrique non triviale pour $a(n)$, sur les fonctions polynômes en la variable n.

La suite $u(n)$ est D-finie, ainsi que la suite $1/u(n)$, donc il en est de même pour $a(n)$.

Nous pouvons alors appliquer le THÉORÈME 1 : la suite $a(n)$ est un emboîtement de suites fractions rationnelles. Il existe donc un entier $d \geq 1$, et pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ des fractions rationnelles $F_r(X)$ telles que :

$$a(kd + r) = F_r(k)$$

ou encore :

$$u(kd + r + 1) = F_r(k)u(kd + r). \tag{13}$$

Fixons $r_0 \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. En écrivant (13) pour $r = r_0, r_{0+1}, \ldots,$ on trouve :

$$\begin{aligned} u\big(kd + r_0 + d\big) = F_{r_0}(k)F_{r_{0+1}}(k) \cdots \\ F_{d-1}(k)F_0(k+1) \cdots F_{r_{0-1}}(k+1)u(kd + r_0). \end{aligned}$$

Soit, en posant $v_{r_0}(k) = u(kd + r_0)$ et

$$G_{r_0}(X) = F_{r_0}(X) \ldots F_{d-1}(X)F_0(X+1) \ldots F_{r_{0-1}}(X+1),$$

qui est une fraction rationnelle :

$$v_{r_0}(k+1) = G_{r_0}(k)v_{r_0}(k),$$

ce qui prouve que $u(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques, et termine la démonstration du THÉORÈME 2.

Remarques :

1) On peut en fait démontrer en suivant la même démarche que dans le THÉORÈME 1, le résultat suivant :

Soit $u(n)$ une suite D-finie, que l'on suppose non nulle pour tout n (mais on ne suppose pas $1/u(n)$ D-finie). On suppose que $a(n) = u(n+1)/u(n)$ vérifie une relation algébrique non triviale à coefficients polynômes en la variable n, alors $u(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques (et par suite $1/u(n)$ est D-finie).

L'hypothèse faite ici est que $u(n)$ et $u(n+1)$ vérifient une relation de dépendance algébrique non triviale homogène à coefficients polynômes en la variable n.

2) Comme exemple d'application du THÉORÈME 2, on a le résultat suivant : la fonction entière $f(z) = \sum \frac{z^n}{n!+1}$ ne vérifie aucune équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. En effet, la suite $u(n) = n!+1$ vérifie la relation :

$$nu(n+2) - (n^2+3n+1)u(n+1) + (n^2+2n+1)u(n) = 0,$$

de sorte que si $v(n) = 1/u(n)$ est D-finie, $u(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques.

Il existe donc un entier $d \geq 1$, et pour $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ des fractions rationnelles $F_r(k)$ telles que l'on ait :

$$u\big((k+1)d+r\big) = F_r(k)u(kd+r).$$

On en déduit que

$$\big[(kd+r)!(kd+r)\cdots(kd+r+d)+1\big] = F_r(k)\big[(kd+r)!+1\big],$$

donc que $F_r(k) = 1 = (kd+r)\dots(kd+r+d)$ pour tout k, ce qui est absurde.

Nous pouvons aussi démontrer la conjecture C_1 dans le cas où la suite $u(n)$ n'est plus la suite D-finie la plus générale, mais une suite récurrente linéaire (dont l'inverse au sens de Hadamard $v(n) = 1/u(n)$ est donc D-finie).

En fait, nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

THÉORÈME 3. — *Soient $a(n)$ une suite récurrente linéaire (algébrique) et $b(n)$ une suite récurrente linéaire. On suppose que $b(n) \neq 0$ pour tout n, et que la suite $c(n) = a(n)/b(n)$ est D-finie. Alors il existe un polynôme non nul $P(n)$ tel que $P(n)c(n)$ soit une suite récurrente linéaire (algébrique).*

Réciproquement, on voit facilement qu'une suite $c(n) = a(n)/P(n)$, où $a(n)$ est récurrente linéaire (algébrique) et P un polynôme, est D-finie.

Nous en déduirons le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit $b(n)$ une suite récurrente linéaire telle que $b(n) \neq 0$ pour tout n. On suppose que $1/b(n)$ est une suite D-finie. Alors $b(n)$ est un emboîtement de suites hypergéométriques.*

Démonstration du théorème 3. — On écrit $b(n) = \sum_1^s P_j(n)\alpha_j^n$, où les $P_j \in \mathbb{C}[X]$ sont non nuls, et les α_j des éléments non nuls de $\mathbb{C}$.

Nous aurons besoin de la notion de suite non dégénérée :

Définition. — Soit $b(n) = \sum_1^s P_j(n)\alpha_j^n$ une suite de $R(\mathbb{C})$. On dit que $b(n)$ est *non dégénérée* si aucun des α_j n'est une racine de l'unité différente de 1 et si aucun quotient α_i/α_j, avec i différent de j, n'est une racine de l'unité.

Nous pouvons supposer dans la suite que $b(n)$ est non dégénérée. En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de se placer sur des progressions arithmétiques $kd+r$ convenables. Nous suivons alors une méthode utilisée dans [4].

Nous définissons la *longueur* de la suite $b(n)$ comme étant l'entier

$$L(b) = \sum_1^t \big(\mathrm{d}^\circ(P_i) + 1\big).$$

Une suite de longueur 1 est de la forme $\beta\alpha^n$ où α, β sont des éléments non nuls de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, $a(n)/b(n)$ est visiblement récurrente linéaire (algébrique) de sorte que le résultat à démontrer est vrai.

Nous procédons ensuite par récurrence sur $L(b) = L$, en supposant acquis le résultat pour les suites $b(n)$ de longueur inférieure ou égale à L. Soit donc $b(n)$ une suite de longueur $L+1$. Il existe des $Q_j \in [X]$, tels que :

$$\sum_0^m Q_j(n)\frac{a(n+j)}{b(n+j)} = 0 \quad \text{avec} \quad Q_m(X) \neq 0.$$

On en déduit que :

$$(14) \qquad Q_m(n)b(n)\cdots b(n+m-1)\frac{a(n+m)}{b(n+m)} = -\sum_{j=0}^{m-1} Q_j(n)a(n+j)\prod_{k\neq j} b(n+k)$$

est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique). Posons :

$$M_i(n) = b(n+m) - \alpha_1^{m-i}b(n+i).$$

On a $M_i(n) = H_1(n)\alpha_1^n + H_2(n)\alpha_2^n + \cdots + H_t(n)\alpha_t^n$ avec

$$H_j(X) = P_j(X+m)\alpha_1^m - \alpha_1^{m-i}\alpha_j^i P_j(X+i)$$

de sorte que $\mathrm{d}^\circ H_1 \leq \mathrm{d}^\circ P_1 - 1$, $\mathrm{d}^\circ H_j \leq \mathrm{d}^\circ P_j$, donc $L(M_i) \leq L$ pour tout i.

On remplace $b(n+i)$ dans (14) en fonction de $b(n+m)$ et $M_i(n)$ et on en déduit que

$$w(n) = Q_m(n)M_0(n)\cdots M_{m-1}(n)\,\frac{a(n+m)}{b(n+m)}$$

est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique). On a donc

$$Q_m(n)M_0(n)\cdots M_{m-2}(n)\,\frac{a(n+m)}{b(n+m)} = \frac{w(n)}{M_{m-1}(n)}$$

qui est D-finie comme produit des suites D-finies

$$Q_m(n), \quad M_0(n),\ldots,M_{m-2}(n) \quad \text{et} \quad \frac{a(n+m)}{b(n+m)},$$

et quotient de la suite récurrente linéaire (algébrique) $w(n)$ par la suite récurrente $M_{m-1}(n)$, qui est de longueur inférieure ou égale à L.

L'hypothèse de récurrence s'applique, et il existe un polynôme non nul G_{m-1} tel que :

$$G_{m-1}(n)\,\frac{w(n)}{M_{m-1}(n)} = G_{m-1}(n)Q_m(n)M_0(n)\cdots M_{m-2}(n)\,\frac{a(n+m)}{b(n+m)}$$

est une suite récurrente linéaire (suite algébrique).

Poursuivant le procédé, on montre l'existence d'un polynôme non nul P tel que $P(n)a(n)/b(n)$ est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique), ce qui termine la démonstration.

Démonstration du Corollaire 1. — Nous pouvons appliquer le THÉORÈME 3 avec $a(n) = 1$ pour tout n. On peut de plus supposer que $b(n)$ est non dégénérée, on écrit :

$$b(n) = \sum_1^s P_i(n)\alpha_i^n.$$

D'après le THÉORÈME 3, il existe un polynôme non nul P tel que $P(n)/b(n) = c(n)$ soit récurrente linéaire. On écrit :

$$c(n) = \sum_1^k Q_j(n)\beta_j^n.$$

On a alors la relation :

$$P(n) = \Big(\sum_1^s P_i(n)\alpha_i^n\Big)\Big(\sum_1^h Q_j(n)\beta_j^n\Big).$$

On écrit cette relation :

$$P(n) = \sum Q_\gamma(n)\gamma^n \tag{15}$$

où les γ parcourent $\Gamma = \big\{\alpha_i\beta_j\ ;\ 1 \le i \le s, 1 \le j \le h\big\}$ et où on a posé :

$$Q_\gamma(X) = \sum P_i(X)Q_j(X),$$

la somme étant étendue aux indices (i,j) tels que $\alpha_i\beta_j = \gamma$. Il résulte de (15) et de l'unicité de l'écriture d'une suite récurrente linéaire sous la forme (2) que l'on a :

$$Q_1(X) = P(X), \quad Q_\gamma(X) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \neq 1.$$

Soit z un nombre complexe, choisi de façon que $P(z) \neq 0$, $P_j(z) \neq 0$ pour tout j et $Q_i(z) \neq 0$ pour tout i. Posons

$$v(n) = \sum_1^s P_j(z)\alpha_j^n.$$

Alors cette suite récurrente linéaire est telle que $v(n) \neq 0$ pour tout n et

$$\frac{1}{v(n)} = \sum_1^h \frac{Q_i(z)}{P(z)}\beta_i^n$$

est aussi récurrente linéaire, comme le montre la relation (15) pour $X = z$. On sait que dans ce cas, ou $s = 1$, ou la suite $v(n)$ est dégénérée; mais par hypothèse, $v(n)$ est — comme $b(n)$ — non dégénérée; donc $s = 1$, $b(n) = P_1(n)\alpha_1^n$, qui est une suite hypergéométrique, et ceci termine la démonstration du COROLLAIRE 1.

4. Dépendance algébrique sur l'anneau $S(K)$

Dans cette partie, nous nous intéressons aux suites D-finies $u(n)$ qui vérifient une relation non triviale de la forme :

$$\sum_{i=0}^{s} A_i(n)u(n)^i = 0 \tag{17}$$

où A_i est une somme exponentielle pour tout i.

Il est clair qu'une somme exponentielle vérifie une relation analogue à (17). Nous conjecturons que c'est le seul cas.

CONJECTURE C_2. — *Soit $u(n)$ une suite D-finie vérifiant une relation de dépendance algébrique non triviale de la forme (17), les coefficients $A_i(n)$ étant des sommes exponentielles non dégénérées. Alors $u(n)$ est une somme exponentielle.*

Ce type de propriété ressemble à des résultats dûs à RITT (cf. [9]), dans le cadre des sommes exponentielles complexes.

Nous allons démontrer quelques cas particuliers de la CONJECTURE C_2. Nous commençons par des équations de la forme $u(n)^k - A(n) = 0$.

THÉORÈME 4. — *Soit $A(n)$ une somme exponentielle, k un entier non nul, et $u(n)$ une suite D-finie telle que $u(n)^k - A(n) = 0$. Alors $u(n)$ est une somme exponentielle.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer, quitte à se placer sur des progressions arithmétiques convenables, que $A(n)$ est non dégénérée.

Soit $f(z) = \sum u(n)z^n$ la série génératrice de f.

La série $f(z)$ a un rayon de convergence non nul, comme on le déduit de la relation $u(n)^k = A(n)$, et fini, sauf dans le cas où $A(n)$ est nulle, auquel cas il n'y a rien à démontrer.

La série $f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes. Par suite $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de singularités dans $\mathbb{C}$.

Toute série $g(z)$ de la forme $g(z) = \sum u(kd+r)z^k$ a pour singularités éventuelles des puissances d-ième des éléments de l'ensemble S des singularités de f. Comme cet ensemble est fini, on peut, quitte à se placer sur des progressions arithmétiques convenables, supposer que f n'a pas deux singularités distinctes, dont le quotient est une racine de l'unité. Soit alors :

$$\sum_{i=0}^{t} Q_i(n)u(n+i) = 0 \tag{18}$$

une relation de récurrence vérifiée par $u(n)$, avec $Q_0, Q_t \neq 0$.

Nous posons :

$$R(Y, X_0, \dots, X_t) = \prod \Big(\sum_0^t Q_i(Y) \varepsilon_i X_i \Big)$$

où le produit est fait sur tous les $(t+1)$-uplets $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t)$ avec ε_i racine k-ième de l'unité pour tout i.

Par construction, il existe un polynôme S tel que :

$$S(Y, X_0^k, \dots, X_t^k) = R(Y, X_0, \dots, X_t). \tag{19}$$

En remplaçant Y par n et X_i par $u(n+i)$ dans (19), et en tenant compte de $u(n+i)^k = A(n+i)$ pour tout i, il vient :

$$S\big(n, A(n), \dots, A(n+t)\big) = 0. \tag{20}$$

Comme $A(n)$ est une somme exponentielle, on peut appliquer la même méthode que nous avons utilisée pour démontrer le COROLLAIRE 1 : pour tout x dans $\mathbb{C}$, on a :

$$S\big(x, A(n), \dots, A(n+t)\big) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, en choisissant x tel que $Q_i(x) \neq 0$ si $Q_i \neq 0$:

$$\prod \Big(\sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) u(n+i) \Big) = 0.$$

Il existe donc un choix de $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t)$ tel que la suite

$$v(n) = \sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) u(n+i)$$

soit nulle pour un ensemble E d'indices n, dont la densité supérieure est strictement positive.

La suite $v(n)$ est, comme $u(n)$ une suite D-finie. On a donc

$$\sum_0^m H_j(n) v(n+j) = 0 \quad \text{avec} \quad H_m \neq 0.$$

On montre alors comme dans [3, lemme 1], que, pour tout d, la suite $v(kd+r)$, $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, vérifie une relation de récurrence analogue, de longueur inférieure ou égale à m.

D'autre part, le fait que la densité supérieure de E soit positive montre qu'il existe dans E une infinité de progressions arithmétiques, de même raison d et de longueur m (cf. [3, p. 135]). On en déduit qu'il existe un entier $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ tel que $v(kd + r) = 0$ pour k assez grand. Par suite, la série (où on a posé $g(z) = \sum v(n)z^n$)

$$h(z) = \sum \xi^{-r} g(\xi z) \quad \text{est un polynôme.} \tag{21}$$

Si $g(z)$ a une singularité dans $\mathbb{C}$, (21) montre qu'elle a une autre singularité dont le quotient avec la première est une racine de l'unité.

D'autre part, on montre facilement que :

$$z^t g(z) = \Big(\sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) z^{t-i}\Big) f(z) + Q(z) \tag{22}$$

où Q est un polynôme.

Il résulte de (22) que toute singularité de g est une singularité de f, et donc g ne peut avoir de singularité dans $\mathbb{C}$, puisque f n'a pas de couple de singularités dont le quotient est une racine de l'unité. Donc $g(z)$ est une fonction entière, et par suite $f(z)$ est, par la formule (22), le quotient d'une fonction entière par un polynôme. On peut donc écrire :

$$f(z) = R(z) + W(z) \tag{23}$$

où R est une fraction rationnelle régulière à l'origine et nulle à l'infini, et $w(z)$ une fonction entière. Si l'on pose

$$R(z) = \sum a(n)z^n, \quad W(z) = \sum b(n)z^n,$$

on a donc $u(n) = a(n) + b(n)$. Il existe deux constantes c_1, c_2 positives telles que :

$$|a(n)| \le c_1 c_2^n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|b(n)|} = 0.$$

On a d'autre part :

$$u(n)^k = a(n)^k + \sum_1^s c_k^j b(n)^j a(n)^{k-j} = A(n). \tag{24}$$

On réécrit (24) sous la forme :

$$A(n) - a(n)^k = \sum_1^s c_k^j b(n)^j a(n)^{k-j} = c(n). \tag{25}$$

La fonction $\sum c(n)z^n$ est une fonction rationnelle nulle à l'infini, puisque $A(n) - a(n)^k$ est récurrente linéaire. Le second membre de la relation (25) montre aussi que cette fonction est entière.

Par suite $\sum c(n)z^n = 0$, ie $c(n) = 0$ pour tout n. On a donc $A(n) = a(n)^k$ tout n.

L'égalité $A(n) = a(n)^k$ et le fait que $A(n)$ soit une somme exponentielle permet de montrer que si $a(n) = \sum_1^h G_i(n)\gamma_i^n$, où les G_i sont des polynômes, alors, pour x tel que $G_i(x) \neq 0$ pour tout i, on a, en posant $a_1(n) = \sum_1^h G_i(x)\gamma_i^n$, encore $A(n) = a_1(n)^k$ en suivant la même méthode que pour le COROLLAIRE 1. On peut donc supposer que $a(n)$ est une somme exponentielle.

L'égalité $A(n) = u(n)^k$ montre alors que $u(n)^k = a(n)^k$ de sorte qu'il existe une suite θ_n à valeurs dans les racines k-ièmes de l'unité telle que $u(n) = \theta_n a(n)$ pour tout n.

Posons $a(n) = \sum_1^h G_i\gamma_i^n$; on a donc $u(n) = \sum_1^h G_i\theta_n\gamma_i^n$.

Il en résulte que $u(n)$ est somme d'au plus h éléments de $\mathbb{C}$ appartenant tous au sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de $\mathbb{C}$ engendré par les G_i, les γ_i et les racines k-ièmes de 1.

Le théorème 4 de [2] s'applique alors et montre que, puisque $u(n)$ est D-finie, $u(n)$ est une somme exponentielle, et ceci termine la démonstration.

Remarque. — On a là un énoncé semblable à la conjecture de la racine k-ième au sens de Hadamard d'une suite récurrente linéaire ; sur ce sujet, voir [1] et [10].

THÉORÈME 5. — *La conjecture* C_2 *est vraie si* $u(n)$ *vérifie une relation de dépendance algébrique de degré au plus deux.*

Démonstration. — Nous commençons par le cas de degré 1. On a alors $A_1(n)u(n) - A_0(n) = 0$, donc pour n assez grand on a $u(n) = A_0(n)/A_1(n)$. On peut appliquer le THÉORÈME 3. Il existe donc un polynôme non nul $P(n)$ tel que $P(n)u(n)$ soit récurrente linéaire. Posons :

$$P(n)u(n) = P(n)\frac{A_0(n)}{A_1(n)} = w(n) = \sum Q_j(n)\gamma_j^n.$$

Donc $\quad P(n)A_0(n) = \left(\sum Q_j(n)\gamma_j^n\right)A_1(n).$

Nous utilisons encore une fois la méthode du COROLLAIRE 1 et le fait que $A_0(n)$, $A_1(n)$ soient des sommes exponentielles, pour montrer que si $x \in \mathbb{C}$ tel que $P(x) \neq 0$, $Q_j(x) \neq 0$ pour tout j, on a

$$P(x)A_0(n) = \left(\sum Q_j(x)\gamma_j^n\right)A_1(n),$$

de sorte que $u(n) = 1/P(x) \sum Q_j(x)\gamma_j^n \in S(\mathbb{C})$, d'où l'assertion.

Nous passons maintenant au cas du degré 2. La suite D-finie $u(n)$ vérifie donc une relation

$$A_2(n)u(n)^2 + A_1(n)u(n) + A_0(n) = 0$$

où les $A_i(n)$ sont des sommes exponentielles non dégénérées.

Posons $v(n) = A_2(n)u(n)$. La suite $v(n)$ est encore D-finie, et vérifie :

$$v(n)^2 + A_1(n)u(n) + A_0(n)A_2(n) = 0.$$

On écrit

$$w(n) = v(n) + \tfrac{1}{2}A_1(n).$$

La suite $w(n)$ est D-finie et vérifie la relation :

$$w(n)^2 = \tfrac{1}{4}A_1(n)^2 - A_0(n)A_2(n) = A(n) \quad \text{et} \quad A(n) \in S(\mathbb{C}).$$

On peut donc appliquer le THÉORÈME 4, et par suite $w(n)$ est une somme exponentielle. Il en est donc de même de $v(n) = A_2(n)u(n)$. Le cas $k = 1$ que nous venons de démontrer montre alors que $u(n)$ est dans $S(\mathbb{C})$, et ceci termine la démonstration.

Remarque. — On peut se poser la question plus générale suivante : soit $u(n)$ une suite D-finie qui vérifie une relation de la forme

$$\sum A_i(n)u(n)^i = 0$$

où les A_i sont des suites récurrentes linéaires (et non plus des sommes exponentielles) non dégénérées. Existe-t-il alors un polynôme P non nul tel que $P(n)u(n)$ soit une suite récurrente linéaire ?

Les méthodes utilisées pour les cas où nous savons démontrer la conjecture C_2 ne marchent évidemment pas dans ce cadre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (B.). — *Algèbres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France, t. **98**, 1970, p. 209–252.

[2] BEZIVIN (J.-P.). — *Sur un théorème de G. Polya*, J. Reine Angew. Math., t. **364**, 1986, p. 60–68.

[3] BEZIVIN (J.-P.). — *Une généralisation du théorème de Skolem-Mahler-Lech*, Quart. J. Math. Oxford, t. **40**, 1989, p. 133–138.

[4] BEZIVIN (J.-P.). — *Quotient de fonctions entières et quotients de Hadamard de séries formelles*, Ann. Inst. Fourier, t. **39**, 1989, p. 737–752.

[5] CIERLENCO (I.), MIGNOTTE (M.) et PIRAS (F.). — *Suites récurrentes linéaires : propriétés algébriques et arithmétiques*, Enseign. Maths, t. **33**, 1987, p. 67–108.

[6] JUNGEN (R.). — *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence*, Comment. Math. Helv., t. **3**, 1931, p. 266–306.

[7] POLYA (G.). — *Arithmetische Eigenschaften der Reihenenwicklungen rationaler Funktionen*, J. Reine Angew. Math., t. **151**, 1921, p. 1–31.

[8] REUTENAUER (C.). — *Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles*, Bull. Soc. Math. France, t. **110**, 1982, p. 225–232.

[9] RITT (J.-F.). — *Algebraic combination of polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **31**, 1929, p. 654–689.

[10] RUMELY (R.) and VAN DER POORTEN (A.). — *A note on the k-th root of a rational function*, J. Austr. Math. Soc., t. **43**, 1987, p. 314–327.

[11] STANLEY (R.P.). — *Differentially finite power series*, European J. Combin., t. **1**, 1980, p. 175–188.