E. LAQUIÈRE

Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 69-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__69_1>

Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales ;

par M. E. Laquière.

(Séance du 4 février 1881).

1. La connaissance de la loi de distribution des écarts, c'est-à-dire de la probabilité des valeurs diverses que peut présenter le résultat d'études expérimentales, selon son plus ou moins de divergence d'avec le résultat normal, est de la première importance au point de vue pratique. Cette notion, aussi peu répandue en dehors du monde scientifique qu'elle mériterait au contraire d'être universellement divulguée, peut s'exprimer en disant que, si l'*absolu est la vérité théorique,* le *probable* est, de son côté, *la vérité pratique.*

La détermination mathématique des chances dans les événements soumis aux lois dites du hasard résulte de l'évaluation des combinaisons des causes fortuites pouvant offrir soit les cas favorables, soit les cas contraires à l'arrivée de ces événements.

Dans la nature tout est soumis à des lois immuables, d'après un principe général de continuité, et la connaissance complète des causes entraînerait nécessairement, par une déduction logique et ne laissant prise à aucune incertitude, la connaissance des événements qui en dépendent. Malheureusement, dans la plupart des cas, les causes des événements échappent à notre sagacité et ne se manifestent que par leurs effets, et, comme ceux-ci dépendent, en général, de l'action simultanée d'une multiplicité innombrable de causes qui se combinent pour en amener la production, il nous est d'ordinaire impossible de démêler dans ce chaos le *pourquoi* de l'événement, la cause primordiale et complexe dont il émane.

Au demeurant de cette ignorance des causes, nous ne sommes cependant pas sans avoir le droit de préjuger, dans une certaine mesure, de l'arrivée de certains faits dont les motifs nous sont soit inconnus, soit imparfaitement connus. Guidés par l'idée première et fondamentale de l'invariabilité de la *loi,* nous devons, à l'inverse du joueur pariant maladroitement contre la *série,* croire d'autant plus à l'arrivée future d'un événement que nous l'avons déjà vu plus fréquemment se présenter dans des circonstances qui nous paraissent identiques, car nous devons, logiquement, d'une fréquence qui nous surprend dès l'abord, *conclure à l'existence d'une cause qui favorise sa venue,* cause que nous n'avons nullement besoin de connaître dans son essence pour affirmer d'une façon plausible qu'elle existe réellement.

Les événements qui font l'objet d'études expérimentales sont, en général, le résultat d'une *cause principale* qui les déterminerait complètement sans les modifications qu'y apportent une foule d'autres causes coexistantes et perturbatrices dont l'effet est de produire, en divers sens, des divergences entre les résultats obtenus dans un certain nombre de répétitions de la même cause principale.

On nomme *écart* cette divergence entre un résultat particulier obtenu et le résultat *normal* qu'eût donné la cause principale en l'absence, irréalisable d'ailleurs, de toute cause perturbatrice. La *loi des hasards* a pour objet l'étude de ces écarts; elle détermine la *probabilité* qu'un résultat cherché sera obtenu *à un écart près de limite fixée.* Nous allons montrer d'une manière tout à fait élémentaire que, pour les écarts ordinaires, cette loi des hasards n'est autre que la courbe $y = e^{-x^2}$, que Cauchy avait nommée *indice de probabilité.*

Recherche de la probabilité d'un écart donné.

Cherchons l'expression numérique $P(\delta)$ de la probabilité qu'un événement particulier présentera un écart déterminé de grandeur δ par rapport à l'événement régulier ou normal, tel qu'il serait constitué sans les altérations produites par les causes variables inconnues, et sous la seule influence de la cause principale, simple ou complexe, qui tend à le produire. Cette expression, que l'on pourrait appeler *probabilité théorique,* s'évaluera par le rapport du nombre des cas favorables, ou des combinaisons des causes le produisant, au nombre total des cas ou des combinaisons possibles. La *probabilité expérimentale* ou *pratique* résultant d'une série d'expériences serait le rapport du nombre des cas ayant donné le résultat cherché au nombre total des cas observés. Cette dernière probabilité n'est qu'une approximation de la vérité, d'autant plus grande (sujette à une erreur d'approximation d'autant moindre) que le nombre des expériences aura été plus considérable.

La question que nous nous proposons de résoudre est de déterminer à la fois la variation de la probabilité théorique avec la grandeur relative des écarts, et l'approximation que l'on est en droit d'espérer dans la détermination pratique d'un résultat moyen, en raison du nombre des expériences qui ont servi de bases à la mesure de ce résultat. Nous obtiendrons ainsi, avec une facilité extrême, la démonstration de ce principe de Bernoulli, règle fondamentale de toute méthode logique d'expérimentation, que l'erreur d'approximation à craindre dans la mesure d'une moyenne est en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences exécutées.

Soit donc $P(\delta)$ la probabilité que l'écart entre la valeur normale et la valeur particulière de la quantité en question sera compris entre les grandeurs δ et $\delta + \Delta\delta$. Nous la nommerons *probabilité de l'écart* δ, celui-ci étant par suite mesuré avec une erreur d'approximation au maximum égale à $\Delta\delta$.

Pour une valeur donnée de δ, il est évident, comme conséquence de la loi générale de continuité dont la formule de Taylor est l'expression analytique, que cette expression est de l'ordre de grandeur de la variation, ou erreur d'approximation $\Delta\delta$ de l'écart, et, lorsque celle-ci est infiniment petite, lui devient proportionnelle. La probabilité de l'écart δ se présentera donc sous la forme

$$P(\delta) = y = z\,d\delta,$$

dans laquelle z sera une fonction indépendante de l'accroissement $d\delta$.

Au point de vue pratique et utile, on cherche à connaître la probabilité que l'écart entre la valeur normale et la valeur particulière ne s'élèvera pas au delà d'une quantité déterminée δ, en valeur absolue, c'est-à-dire que l'écart sera compris entre $+\delta$ et $-\delta$. Cette probabilité est l'intégrale de $P(\delta)$ prise entre les limites $+\delta$ et $-\delta$. La valeur en est parfaitement définie, puisqu'elle représente, dans l'infinité des grandeurs possibles de la quantité, le rapport du nombre des quantités, dont l'écart de la valeur normale est égal ou inférieur à $\pm\delta$, à leur nombre total. La différentielle en sera donc proportionnelle à l'accroissement $d\delta$, et z ne sera autre que la dérivée de la probabilité d'un écart $\overline{\lessgtr}\,\delta$.

2. Pour faire intervenir l'action des causes perturbatrices inconnues et variables, considérons l'écart δ comme la résultante d'un certain nombre m d'écarts élémentaires, de grandeur absolue $\Delta\delta$ égale pour tous, mais de signes divers, modifiant l'événement type les uns dans un sens, les autres en sens contraire. Nous appellerons *causes des écarts* les variations des causes dont la valeur normale coexisterait avec la valeur normale de la quantité soumise à l'expérience. Les causes élémentaires en jeu seront en nombre m, dont m_1 sources de l'écart $+\Delta\delta$ et m_2 de l'écart $-\Delta\delta$. On a donc, en posant $n = m_1 - m_2$,

$$\delta = n\,\Delta\delta.$$

La loi de distribution des écarts que nous allons rechercher devant rester en dehors de toute hypothèse sur la nature des phénomènes soumis à l'expérience, elle nécessite une restriction des plus importantes qui, bien que tacitement admise sans nul doute, n'a jamais été, croyons-nous, formellement énoncée, et c'est à cet oubli qu'il faut attribuer les interminables et si obscures discussions engagées entre les partisans et les adversaires de la loi mathématique des hasards. Cette restriction consiste en ce que les écarts considérés doivent toujours être assez faibles pour rester sensiblement proportionnels à la variation de la cause qui leur donne naissance. Cette hypothèse, base unique mais absolue du calcul qui va suivre, est évidemment réalisée dans les séries d'expériences où l'on cherche à obtenir, mais en n'y parvenant qu'imparfaitement, un concours de circonstances identiques, productrices du phénomène. C'est le cas des expériences balistiques et de toutes les études pratiques ayant pour objet la détermination d'une loi naturelle. La loi des écarts et toutes les conséquences qui en découlent seront ainsi applicables en toute sécurité à ces phénomènes ; mais les *écarts anormaux,* qui ne se produisent que dans les cas excessivement rares d'une *méprise,* ou erreur très grossière commise dans la réalisation des causes, restent en dehors de la théorie.

Sous le bénéfice de cette observation capitale, on verra que la loi des hasards est une vraie loi limite, précise et nette, jouant dans un ordre d'idées différent un rôle semblable à celui que l'indicatrice joue dans la théorie de la variation de courbure des surfaces.

Nous ne considérerons d'abord que les écarts de nature absolument semblable, s'ajoutant ou se retranchant numériquement de façon que deux écarts égaux se doublent ou se détruisent, suivant la parité ou la disparité de leurs signes. L'idée de continuité, autrement dit de liaison constante entre un effet et sa cause, loi primordiale et philosophique d'une vérité absolue, régissant à la fois tous les phénomènes moraux ou naturels, nous conduit nécessairement, et sans qu'il y ait lieu à une justification plus détaillée, à considérer comme également probables toutes les causes élémentaires capables des mêmes effets, soit les causes origines de tous les écarts élémentaires $\pm \Delta\delta$.

Cela posé, supposons les causes d'écarts à l'état de division extrême, leur nombre s'accroissant d'ailleurs indéfiniment en raison inverse de leur valeur élémentaire. On sait que les nombres m_1 et m_2 des causes d'écarts d'égale probabilité $\pm \Delta\delta$, soit $\pm d\delta$, ont pour rapport limite l'unité, et que le nombre n est ainsi infiniment petit par rapport à m. Celui-ci est donc infiniment grand par rapport à n, soit un infiniment grand du second ordre par rapport à $d\delta$, et, comme il est d'ailleurs indépendant de la valeur particulière et variable de δ, on peut écrire

$$m\, d\delta^2 = \mathrm{K}^2,$$

K désignant une quantité constante dont nous déterminerons ultérieurement la valeur.

Remarquons dès à présent que, si l'on convient de mesurer les écarts δ à une échelle convenablement choisie a, on pourra représenter l'écart concret δ à l'échelle a par l'écart abstrait ou numérique x, en tenant compte des relations

$$\delta = ax,$$

et, par conséquent,

$$d\delta = a\,dx,$$

$$m\,d\delta^2 = ma^2\,dx^2 = K^2.$$

Il suffira donc d'adopter comme échelle a des écarts la constante K pour simplifier la relation qui donne la valeur de m, et la transformer en

$$m\,dx^2 = 1.$$

Recherche de la loi des écarts.

3. Ainsi qu'il vient d'être expliqué, l'écart $\delta = n\,d\delta$ résulte de la coexistence de $m = \frac{K^2}{d\delta^2}$ écarts élémentaires, dont m_1 égaux à $+d\delta$ et m_2 égaux à $-d\delta$, par hypothèse tous de même probabilité.

La probabilité $P(\delta) = y = z\,d\delta$ de l'écart δ est donc le rapport, au nombre total des cas possibles, du nombre des cas qui lui donnent naissance, c'est-à-dire du nombre de manières de choisir m_1 fois l'écart $d\delta$, ou, ce qui revient au même, m_2 fois l'écart $-d\delta$, dans m groupes de deux écarts contraires ($d\delta$ et $-d\delta$), en prenant à volonté l'un des deux écarts dans chaque groupe. Ce nombre est donc égal à celui des combinaisons de m objets m_1 à m_1, soit m_2 à m_2, et par suite égal à

$$C^m_{m_1} = C^m_{m_2} = \frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m_1 . 1.2.3\ldots m_2}.$$

Son rapport au nombre total

$$P_m = 1.2.3\ldots m$$

des cas possibles donne la valeur de la probabilité $P(\delta)$, d'où

$$y = P(\delta) = \frac{1}{1.2.3\ldots m_1 . 1.2.3\ldots m_2}.$$

Si nous faisons croître m_1 d'une unité, m_2 décroîtra d'une unité, la valeur de m ne changeant pas. Ainsi n augmentera de deux unités, et δ de $2\,d\delta$. On aura conséquemment

$$y + 2\,dy = \mathrm{P}(\delta + 2\,d\delta) = \mathrm{P}(\delta)\,\frac{m_2}{m_1 + 1},$$

ou bien, en vertu de $m = m_1 + m_2$ et $n = m_1 - m_2$,

$$y + 2\,dy = y\,\frac{m - n}{m + n + 2},$$

d'où enfin

$$dy = -\,y\,\frac{n + 1}{m + n + 2}.$$

Remplaçant n et m par leurs valeurs $\frac{\delta}{d\delta}$ et $\frac{\mathrm{K}^2}{d\delta^2}$, et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, il vient

$$dy = -\,y\,\delta\,d\delta.$$

Intégrant et prenant la constante sous la forme $\log \text{nép}\,\mathrm{H}\,d\delta$, nécessaire pour conserver l'expression de la probabilité sous la forme convenable, ainsi qu'il a été dit plus haut,

$$\log \text{nép}\,y = -\,\frac{\delta^2}{2\mathrm{K}^2} + \log \text{nép}\,\mathrm{H}\,d\delta,$$

d'où l'expression définitive

$$y = \mathrm{P}(\delta) = \mathrm{H}e^{-\frac{\delta^2}{2\mathrm{K}^2}}\,d\delta,$$

représentant la probabilité que l'écart sera compris entre les deux valeurs voisines δ et $\delta + d\delta$.

4. Pour déterminer l'expression de la constante H, qui dépend de la nature des phénomènes, il suffit de comparer la formule de Lagrange,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

à l'identité

$$\mathrm{H}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{\mathrm{K}^2}}\,d\delta = 1,$$

evidente puisque la somme des probabilités de tous les écarts possibles n'est autre que l'unité, symbole de la certitude.

Posons, dans ce but,

$$2K^2 = \frac{1}{h^2} \quad \text{et} \quad h\delta = u,$$

d'où

$$d\delta = \frac{du}{h};$$

nous aurons

$$H = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

et la formule de la probabilité deviendra

$$P(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} d\delta.$$

Telle est la forme habituelle donnée à la loi des écarts dans les calculs auxquels donnent lieu les études expérimentales. Le seul paramètre h qu'elle contient, et qui est déterminé dans chaque nature d'expériences par cette nature même, porte le nom de *coefficient de régularité.*

Si l'on prend l'expression de la probabilité en fonction de la valeur abstraite x, en posant

$$\delta = Kx = \frac{x}{h\sqrt{2}},$$

la probabilité de l'écart x, à dx près, aura pour valeur

$$P(x) = y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

En fonction de l'échelle K des écarts, on aura

$$P(\delta) = y = \frac{1}{K\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2K^2}} d\delta.$$

Telle est la loi de distribution des écarts simples. On voit que *la loi de distribution des écarts proportionnels reste invariable quelle que soit la nature du phénomène ;* celle-ci fait seulement varier l'échelle à laquelle doivent être mesurés lesdits écarts pour tomber sous l'application de la formule.

Loi de Bernoulli.

5. En désignant par m le nombre des causes en jeu, nous avons posé

$$m\,dx^2 = 1,$$

soit

$$m\,d\delta^2 = K^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

Or, ainsi que nous venons de le dire, h est une quantité déterminée par la nature même des écarts, dont la distribution suit une loi de répartition invariable suivant leur grandeur relative, c'est-à-dire rapportée à l'échelle convenue $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, mais dont la grandeur intrinsèque dépend de leur nature, qui fixe celle de cette échelle. On voit donc que *l'approximation $d\delta$ obtenue est en raison inverse de la racine carrée de m, c'est-à-dire du nombre des causes mises en jeu.*

Cette relation, à laquelle on serait tenté de n'attacher aucune importance sous cette forme un peu vague, est au contraire la plus précieuse règle que le Calcul des probabilités mette à la disposition des expérimentateurs.

Dans toute méthode rationnelle d'expérimentation, on recherche un résultat normal au moyen d'une série d'expériences qui fournissent un certain nombre de résultats particuliers présentant entre eux des divergences plus ou moins considérables. Ces résultats, étant censés mériter le même degré de confiance, entrent au même titre dans le calcul du résultat normal, et dès lors on devra considérer celui-ci comme n'étant autre que leur moyenne arithmétique. Cette conclusion serait absolument rigoureuse si le nombre des résultats servant à établir le résultat moyen était infini, car les écarts de chacun d'eux d'avec le résultat normal se trouveraient distribués suivant la loi de probabilité, et leur somme algébrique serait nulle (1).

(1) Notons, en passant, que lorsque les expériences doivent, pour des raisons observées et discutées en dehors du calcul de la moyenne, être considérées comme méritant des degrés divers de confiance, pour tenir compte de celui-ci, on l'éva-

Le nombre des expériences étant nécessairement limité, on n'obtiendra pas, par la moyenne des résultats particuliers, rigoureusement le résultat normal, mais seulement une approximation de celui-ci, approximation évidemment d'autant plus grande que le nombre des expériences, s'élevant davantage, devra inspirer une confiance plus complète.

Ce degré de confiance trouve sa mesure dans la relation

$$m\,d\delta^2 = K^2,$$

et, nous le répétons, c'est, au point de vue de la conduite des expériences, la règle la plus utile fournie par la théorie aux praticiens.

A quoi revient, en effet, la division indéfiniment poussée de l'écart en écart élémentaire? A un premier point de vue, elle rapproche de plus en plus les conditions du problème des conditions idéales qui ne sont autres que celles mêmes des faits naturels, dont les lois continues n'admettent point de variations brusques, mais de simples modifications insensiblement variables des causes. Et c'est là ce qui nous autorise, à l'encontre de beaucoup de personnes n'ayant sans doute qu'insuffisamment mûri cette sorte d'études au point de vue philosophique, à considérer le Calcul des probabilités comme l'expression la plus complète de la vérité dans l'ordre des faits naturels.

Au second point de vue, la division de l'écart, ou multiplication du nombre d'écarts élémentaires dont il est la résultante, revient à une multiplication du nombre des cas possibles. Dans cet ordre d'idées, le nombre m des causes élémentaires d'écart mises en jeu aura pour facteur le nombre des expériences, le fait du remplacement d'une expérience par p autres revenant au remplacement des causes qui en déterminent le résultat par la moyenne de p causes identiques, ou la somme de p causes capables individuellement

---

luera, sous le nom de *poids* du résultat particulier, en considérant chaque résultat comme représentant un groupe de résultats en nombre proportionnel au poids du résultat. C'est le suffrage à deux degrés perfectionné, chaque électeur du deuxième degré disposant d'un nombre de voix égal à celui de ses commettants, système qui ne manquerait pas de logique, et qui a été mis en avant par un économiste anglais dans ces derniers temps.

d'un écart élémentaire p fois moindre. On peut donc considérer m comme représentant proportionnellement le nombre des expériences sur lesquelles est basée la détermination du résultat normal ; la relation

$$m\, d\delta^2 = K^2 = \frac{1}{2h^2}$$

soit

$$d\delta = \frac{1}{h\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{m}}$$

exprime donc que l'erreur d'approximation des écarts comptés à partir du résultat normal est en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences sur lesquelles est basée la détermination du résultat moyen, considéré comme résultat normal.

Ainsi les écarts que l'on a la *même probabilité* de ne pas dépasser *dans la détermination du point moyen* (ou résultat normal) sont proportionnels à

$$\frac{1}{h\sqrt{2m}} = \frac{K}{\sqrt{m}},$$

c'est-à-dire en raison de l'*échelle* même *des écarts*, dépendant de la nature du phénomène, et *en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences qui ont servi à l'établir.*

6. L'importance de ce résultat nous engage à insister sur sa démonstration, que rendra plus claire l'examen des résultats d'une série d'expériences.

Considérons une quantité quelconque dont on ait relevé un nombre considérable de valeurs. Si ce nombre en était infini, la distribution des écarts des valeurs diverses d'avec la valeur normale, ou moyenne, eût été faite exactement d'après la loi de probabilité ; avec un nombre simplement très grand, cette distribution s'approchera seulement de cet idéal et l'on obtiendra une approximation de la loi de probabilité de la manière suivante.

Représentons individuellement chaque écart par un poids fixe que nous placerons sur une droite fixe, axe des écarts, à une distance de l'origine, représentative de la valeur normale, égale à l'écart mesuré à une échelle, d'ailleurs quelconque, en rapport avec la nature des faits soumis à l'expérience. Soient p le poids fixe d'un écart individuel et N le nombre des écarts, soit des expériences; Np sera le poids total dont est chargé l'axe des écarts. Il est visible que, si une portion de cet axe se trouve ainsi chargée d'un poids P, la probabilité que, dans une expérience faisant ou non partie de la série, mais exécutée dans les mêmes conditions, l'écart sera compris entre les deux limites mesurées par les distances de l'origine aux deux extrémités de cette portion de l'axe sera égale au rapport $\frac{P}{Np}$ des poids de la portion désignée et de la totalité de l'axe.

Supposons construite la courbe indice de probabilité, et désignons par S la surface totale comprise entre la courbe et son asymptote, axe des écarts, et par s la surface comprise entre la courbe, l'axe des écarts et les deux ordonnées correspondant aux écarts δ et δ'. Soit de plus $\Delta\delta$ le côté du carré dont la surface $\Delta\delta^2$ est contenue N fois dans $S = N.\Delta\delta^2$. A partir de l'asymptote et de sa perpendiculaire par l'origine, construisons un réseau de parallèles aux deux droites à l'équidistance $\Delta\delta$; elles formeront un quadrillage dont les éléments superficiels auront $\Delta\delta^2$ pour surface. Il est visible que le nombre des carreaux compris entre deux ordonnées et la courbe est le même que celui des poids p placés sur l'axe des écarts et que par conséquent il y a une distance inférieure à $\Delta\delta$ entre les deux extrémités de la portion de l'axe chargée d'un poids $P = np$ et les pieds des ordonnées du quadrillage détachant une surface $s = n.\Delta\delta^2$. L'écart, ayant une probabilité déterminée, est donc, à l'aide des poids ou des expériences, déterminé à une approximation $\Delta\delta = \sqrt{\frac{S}{N}}$ près, ce qu'il fallait démontrer.

On voit que cette démonstration est indépendante de l'expression même de la loi de probabilité.

Approximation probable d'un résultat moyen obtenu.

7. Lorsqu'on a cherché une grandeur par une série d'expériences, on a déterminé la *moyenne algébrique* des valeurs particulières qu'elle prend dans chacune des expériences particulières; cette moyenne X est admise comme représentant la valeur *vraie*.

En outre, la comparaison des résultats individuels avec le résultat moyen, toujours admis comme rigoureusement exact, fait connaître le module h dont dépend la régularité du phénomène, et qui permet de calculer les probabilités de tel ou tel écart à craindre.

Mais, le nombre des cas expérimentés étant nécessairement restreint, le résultat moyen obtenu s'écartera toujours plus ou moins du résultat type, de la valeur *vraie* qui se représenterait invariablement à tous les coups, s'il était possible de faire disparaître toute cause de divergence entre les différents cas. La *vérité absolue* nous échappe fatalement, et, selon l'expression on ne peut plus juste de M. Jouffret, alors même que le hasard nous fournirait une valeur de cette nature, *nous n'en pourrions rien savoir*. La valeur moyenne obtenue ne doit donc être considérée que comme *la plus probable* des valeurs que l'on pourrait assigner à la grandeur cherchée.

Toutefois, au prix d'une somme suffisante de travail expérimental, il est toujours possible, sinon de parvenir à la vérité absolue, du moins, en multipliant convenablement les expériences, d'en approcher aussi près que l'on voudra. Cette puissance indéfinie de la répétition des épreuves au point de vue de la *rigueur du résultat moyen* a été mise en évidence pour la première fois par Bernoulli, qui a énoncé la loi suivante, fixant la mesure de l'erreur à craindre sur le résultat moyen en raison du nombre et de la nature des expériences.

THÉORÈME. — *Soient* X *la valeur moyenne d'une quantité et n le nombre des valeurs individuelles x relevées dans les expériences; si l'on désigne par t un nombre quelconque, il y a une probabilité égale à $\theta(t)$ que la valeur vraie cherchée est comprise entre les deux limites*

$$X - \frac{t}{h\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad X + \frac{t}{h\sqrt{n}},$$

c'est-à-dire que l'écart entre la valeur vraie et la valeur moyenne ne dépasse pas $\frac{t}{h\sqrt{n}}$, le symbole $\theta(t)$ représentant la probabilité,

$$\theta(t) = \int_{-t}^{+t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

qu'un écart isolé sera au maximum égal à $\frac{t}{h}$ en valeur absolue.

La démonstration de ce principe découle immédiatement de ce que nous avons dit plus haut. L'écart $\Delta\delta$ du point moyen, c'est-à-dire l'approximation avec laquelle m expériences le déterminent, est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Or, si l'on se borne à une expérience, faisant $m = 1$, il est évident que les deux écarts, celui du point moyen par rapport au point particulier qui seul le détermine, et celui de ce dernier par rapport au point moyen, sont égaux et de signes contraires, et de plus, étant solidaires et relatifs l'un de l'autre, ils ont même probabilité pour une même valeur déterminée. Dans ce cas le module de convergence du point moyen est donc le même que celui du point particulier, et l'on a la probabilité $\theta(t)$ que l'écart sur le point moyen ne dépassera $\frac{t}{h}$, comme l'on aurait cette probabilité que l'écart d'un point particulier par rapport au point moyen restera inférieur ou au plus égal à cette quantité.

Si l'on base la recherche du point moyen sur n expériences, l'écart que l'on a la probabilité $\theta(t)$ de ne pas dépasser sera avec le précédent dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par suite égal à $\frac{t}{h\sqrt{n}}$.

Détermination du coefficient de régularité.

8. Pour comparer les écarts de deux séries d'expériences provenant d'état de choses constant dans une même série, mais différent d'une série à l'autre, soient h_1 et h_2 les deux coefficients de régularité correspondants ; les écarts δ_1 et δ_2 de l'une et l'autre série, accouplés de telle sorte que l'on ait

$$h_1\delta_1 = h_2\delta_2,$$

auront même probabilité de ne pas être dépassés dans l'un et l'autre cas.

Le coefficient de régularité est donc en rapport inverse de l'échelle des écarts, c'est-à-dire des écarts qui ont la même probabilité de ne pas être dépassés.

La détermination de ce coefficient, également connu sous les noms de *module de convergence, mesure de la précision,* s'obtient au moyen des relations ci-dessous.

1° *Écart moyen.* — Soit n le nombre des écarts compris entre δ et $\delta + d\delta$, N étant le nombre total des écarts (ou nombre des expériences); on aura

$$\frac{n}{N} = P(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} d\delta.$$

L'écart moyen μ ou moyenne arithmétique des valeurs absolues $\pm\delta$ de tous les écarts s'évalue facilement :

$$\mu = 2\int_0^{+\infty} \frac{h\delta^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} d\delta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

2° *Écart moyen quadratique.* — Cette quantité, l'unité à laquelle il est le plus commode pour les calculs de rapporter les écarts, est l'écart fictif dont le carré est la moyenne arithmétique des carrés de tous les écarts. En le désignant par ε, on aura

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h\delta^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2} d\delta = \frac{1}{2h^2} = K^2.$$

L'écart moyen quadratique n'est donc autre que l'échelle des écarts que nous avons été amené à employer dans le calcul de la probabilité.

Les relations entre les divers modules,

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{N}} = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

$$\mu = \frac{\Sigma(\pm\delta)}{N} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

permettent de les déterminer pratiquement d'une manière approximative, en traitant le nombre limité N d'expériences faites comme si ce nombre était infini.

9. Nous n'ajouterons qu'un mot sur les écarts simultanés dus à des causes différentes et indépendantes les unes des autres.

Dans le cas de deux, chaque écart particulier complexe est la résultante des deux écarts particuliers correspondants dus à chacune des causes résultantes des groupes de causes élémentaires de même nature. En conséquence, soit Δ l'écart résultant des écarts δ et δ', dus aux deux causes distinctes dont les natures particulières peuvent d'ailleurs être soit similaires, soit différentes; sa probabilité sera

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-(h^2\delta^2+h'^2\delta'^2)} d\delta . d\delta',$$

en désignant par h et h' les coefficients de régularité relatifs aux deux écarts composants.

Deux cas principaux sont à considérer :

1° Les écarts δ et δ' sont de même nature et susceptibles de s'ajouter. L'écart Δ est alors leur somme algébrique et sa probabilité deviendra la somme de toutes les probabilités élémentaires, telles que la précédente, pour lesquelles on aura

$$\delta + \delta' = \Delta.$$

On voit aisément que, si l'on pose

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2},$$

cette probabilité n'est autre que

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta^2} d\Delta.$$

Ce résultat généralisé montre que : lorsqu'un écart est la résultante de plusieurs écarts de même nature dus à des causes indépendantes, la loi de probabilité de l'écart résultant est la même que s'il était dû à une seule nature de cause, mais le carré de l'écart moyen quadratique est la somme des carrés des écarts moyens quadratiques composants.

2° Les écarts de nature analogue ne sont pas superposables, mais assimilables à des écarts simultanés dans deux directions différentes, tels que les écarts en portée et en direction d'une arme à feu. Dans ce cas, posons

$$h^2\delta^2 + h'^2\delta'^2 = \lambda^2.$$

On voit que les courbes d'égale probabilité sont des ellipses concentriques, ayant pour demi-diamètres conjugués dans les directions des écarts

$$\frac{\lambda}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{h'}.$$

On voit immédiatement aussi que les surfaces totales des ellipses d'égale probabilité ont plus de chance de renfermer l'extrémité de l'écart que toute surface autre d'aire équivalente.

10. Terminons par quelques observations ayant pour objet de lever une difficulté apparente à laquelle nous n'aurions peut-être jamais songé sans les critiques insuffisamment mûries à notre avis, dont les courbes d'égale probabilité dans le tir sur écran plan ont été l'objet il y a quelques années.

Si l'on examine un Tableau de probabilité dressé suivant les valeurs de $\theta(t)$, on est immédiatement frappé de l'absence de limite à la grandeur des écarts auxquels est sujet le phénomène. Or il est évident que l'écart de la quantité en jeu par rapport à sa valeur normale ne saurait être infini.

Nous expliquerons tout à l'heure la cause de cette absurdité apparente des résultats déduits de la courbe de probabilité. Disons tout d'abord que la loi de probabilité ne réglant, ainsi que nous l'avons observé dans le principe, que la fréquence des écarts peu considérables, nous pourrions dès à présent laisser passer cette anomalie sans y prêter attention.

Dans le numéro d'avril 1877 de la *Revue d'Artillerie*, cette absence de limite imposée aux écarts par la loi de probabilité a servi d'arme à M. Bréger pour combattre les ellipses isoprobables qui ne sauraient, suivant lui, jouir de cette propriété, la courbe de probabilité zéro devant être le rectangle formé par les écarts maxima en portée d'une part, en direction de l'autre. Sans réfuter les erreurs d'un tel raisonnement, ni nous retrancher derrière ce fait que la loi n'est plus applicable aux écarts considérables, nous ferons simplement observer que, bien que les écarts ne puissent s'étendre à l'infini, la limite absolue dans laquelle ils restent circonscrits pour un sujet déterminé nous échappe totalement, *aussi bien comme conception que comme réalité;* il ne saurait, à proprement parler, y avoir de courbe de probabilité nulle ; et, s'il y avait un lieu géométrique de probabilité nulle, il comprendrait, au delà de cette lisière fictive, tout l'espace extérieur correspondant à des écarts supérieurs à l'écart limité et ne pouvant, *a fortiori*, se présenter. En réalité, la limite des écarts nous échappe fatalement, et il ne nous est point loisible de raisonner sur elle comme sur une quantité déterminée. Les seules quantités de cette nature dont nous pouvons avoir connaissance sont les écarts qui se présenteront une fois sur dix, une fois sur cent, une fois sur mille, et pour ceux-là, même ceux qui sont fort rares, les Tableaux de probabilité nous assignent toujours un écart non seulement fini, mais assez restreint, et par conséquent, malgré la restriction originelle, la loi des écarts leur est applicable.

L'absence de limite assignée aux écarts par la loi de probabilité a d'ailleurs son origine dans la méthode de calcul employée pour exprimer *approximativement en chiffres* les résultats de la théorie, méthode basée sur la proportionnalité des effets aux causes, qui en restreint l'application aux écarts modérés, l'approximation de la probabilité des autres restant tout à fait illusoire.

Quelle que soit l'hypothèse imaginée pour déterminer par le calcul la loi des hasards, elle reviendra fatalement à considérer un écart donné comme la résultante des écarts simultanés dus à toutes les causes accessoires influant sur le phénomène. Prises à part, ces causes sont en général innombrables, mais en nombre fini pourtant. Les écarts, dont chacun pris individuellement résulte de la simultanéité des valeurs particulières correspondantes de toutes ces causes, seront en nombre égal à celui des combinaisons de toutes ces causes en systèmes correspondants, par suite en nombre fini, quoique incomparablement supérieur au précédent. Par conséquent, les écarts résultants de même probabilité, c'est-à-dire ceux qui se reproduisent le même nombre de fois dans la totalité des cas qui peuvent se présenter, formeront, par leurs extrémités sur l'écran. une série de points régulièrement distribués, d'autant plus serrés que les causes seront plus nombreuses, ou plus divisées si l'on considère chacune d'elles comme la résultante de causes semblables. La courbe de probabilité égale est l'image limite, ou abstraction, de la courbe ponctuée, représentation exacte de la figure formée par les points représentant les écarts en nombre fini, bien qu'inassignable.

Le mode de calcul employé se trouve ainsi complètement justifié sans qu'il y ait lieu de se préoccuper de cet écart démesuré qui s'introduit furtivement (d'ailleurs comme application de la formule à un cas exclu *a priori*), mais auquel le calcul lui-même, sans que la limite du possible puisse être pour cela nettement révélée, assigne une improbabilité assez voisine de l'impossibilité pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte. On est en droit d'en considérer l'*aléa* apparent comme erreur d'approximation dans le calcul des chances, et la source s'en trouve dans cette division à l'infini des causes physiques en un groupe de causes théoriques, se combinant entre elles pour multiplier de même les écarts élémentaires dont se compose un écart réel, ce qui, d'après la rapidité d'accroissement du nombre des combinaisons avec le nombre des éléments combinés, rend démesurément plus considérable, à chaque division nouvelle des causes, l'improbabilité de l'écart résultant de la combinaison dans le même sens de tous les écarts élémentaires, tandis que les écarts naturels conservent arithmétiquement la même probabilité avec une approximation d'autant plus grande et plus véritablement figurée par la loi des hasards.

Cette loi, il ne faut jamais le perdre de vue, exprime uniquement une sorte de *pour cent*, la probabilité qu'un écart ne s'éloignera pas d'une quantité assignée de plus qu'une différence $\Delta\delta$ également donnée. Nous terminerons par une représentation diagrammique de cette loi qui nous paraît la mieux imagée : tracer des cercles concentriques d'égale probabilité (projections sur un plan convenable des ellipses isoprobables) distants d'entre eux d'une longueur égale à l'erreur d'approximation assignée comme limite à la mesure des écarts; puis, si l'on désire les probabilités à $\frac{1}{n}$ près, chercher la probabilité $\frac{1}{k}$ d'atteindre chaque zone; placer dans l'intérieur de la zone annulaire $\left(\frac{n}{k}\right)$ points, c'est-à-dire le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{k}$, en les distribuant régulièrement. Le nombre des zones sur lesquelles se distribueront les points figuratifs des probabilités se limitera ainsi de lui-même et donnera de lui-même la grandeur des écarts de probabilité assignable. Cette probabilité sera exprimée en $n^{\text{ièmes}}$ par le nombre de points figuratifs ayant l'écart en question et les résultats spéculatifs rentreront identiquement dans les conditions pratiques.

Les courbes isoprobables sont bien des ellipses ; mais la direction de leurs axes, loin d'être arbitraire, ainsi que leurs adversaires semblent le supposer pour les combattre, est déterminée de la manière la plus précise.

Dans le cas du tir des armes à feu, sans qu'il soit nécessaire de recourir à une démonstration par le calcul, peut-être fort difficile à imaginer, cette vérité me paraît mise hors de conteste par la simple réflexion suivante :

La *trajectoire théorique,* ou lieu du *point d'impact moyen,* est une courbe gauche autour de laquelle tout se passe dans ses plans normaux dans les conditions de la plus parfaite symétrie. En conséquence, la *gerbe,* ou *faisceau des trajectoires individuelles,* a pour surface diamétrale principale la surface gauche enveloppe des plans osculateurs de la trajectoire théorique, soit la développable de ses normales principales. Sur une section plane de la gerbe normale à la trajectoire, les axes de symétrie des courbes d'égale probabilité seront évidemment la normale principale et la perpendiculaire au plan de courbure. Pour toutes les sections obliques, ce seront des courbes fort rapprochées des projections de ces lignes. Ces axes sont d'ailleurs, en pratique, représentés avec une approximation très suffisante par l'horizontale et la trace sur l'écran du plan vertical passant par la tangente à la trajectoire à laquelle l'écran cible est posé normalement.