

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHALIS ANOUSSIS

## **Intégrales invariantes et formules de caractères pour un groupe de Lie connexe à radical co-compact**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 120, n° 3 (1992), p. 347-370

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1992\\_\\_120\\_3\\_347\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_347_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTÉGRALES INVARIANTES ET FORMULES DE CARACTÈRES POUR UN GROUPE DE LIE CONNEXE A RADICAL CO-COMPACT

PAR

MICHALIS ANOUSSIS (\*)

---

RÉSUMÉ. — On considère un groupe de Lie  $G$  connexe unimodulaire et à radical co-compact. On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie du groupe  $G$ . Soit  $\ell$  un élément du dual de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$ . Sous l'hypothèse que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell)$  est réductive et abélienne dans  $\mathfrak{g}$ , on construit une application  $\varphi \mapsto F_{\ell, \varphi}$  de  $D(G)$  dans l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur une partie ouverte et dense de  $G(\ell)$ . Si le groupe  $G$  est compact,  $F_{\ell, \varphi}$  est — à un scalaire près — l'intégrale invariante de  $\varphi$  relativement au sous-groupe de Cartan  $G(\ell)$  de  $G$ . En utilisant cette application, on donne une formule pour la trace de l'opérateur  $T(\ell, G)(\varphi)$ , où  $T(\ell, G)$  est la représentation unitaire du groupe  $G$  associée à  $\ell$ .

ABSTRACT. — We consider a connected Lie group with co-compact radical  $G$ . Let  $\mathfrak{g}$  be the Lie algebra of  $G$ . Let  $\ell$  be in the dual of  $\mathfrak{g}$ . Under the assumption that  $\mathfrak{g}(\ell)$  is commutative and reductive in  $\mathfrak{g}$ , we construct an application  $\varphi \mapsto F_{\ell, \varphi}$  from  $D(G)$  to the space of  $C^\infty$  functions on an open dense subset of  $G(\ell)$ . If  $G$  is compact,  $F_{\ell, \varphi}$  is — up to a scalar — the invariant integral of  $\varphi$  relative to the Cartan subgroup  $G(\ell)$  of  $G$ . Using this, we give a formula for the trace of the operator  $T(\ell, G)(\varphi)$ , where  $T(\ell, G)$  is the unitary representation of  $G$  associated to  $\ell$ .

## Introduction

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe, à radical co-compact unimodulaire. On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie du groupe  $G$ . On suppose qu'il existe une forme linéaire  $\ell$  sur  $\mathfrak{g}$ , admissible bien polarisable et telle que  $\mathfrak{g}(\ell)$  soit réductive dans  $\mathfrak{g}$ . Le groupe  $G(\ell)$  est alors abélien et connexe. D'après [14], on peut associer à  $\ell$  l'une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe  $G$  qu'on notera  $T(\ell, G)$ .

---

(\*) Texte reçu le 16 mai 1991.

Michalis ANOUSSIS, Département de Mathématiques, Université d'Aegean, Karlovassi 83200 Samos, Grèce.

Classification AMS : primaire 22E30, secondaire 43E65.

Nous allons démontrer une formule pour le caractère de  $T(\ell, G)$ . On construit en 4 une application  $\varphi \mapsto F_{\ell, \varphi}$  de  $D(G)$  dans  $C^\infty(G(\ell)')$ , où  $G(\ell)'$  est une partie ouverte et dense de  $G(\ell)$ . Cette application possède les propriétés suivantes :

(i) Si  $g_1$  est dans  $G$  et si  $\varphi_1$  est la fonction sur  $G$  définie par  $\varphi_1(g) = \varphi(g_1 g g_1^{-1})$ , on a  $F_{\ell, \varphi} = F_{\ell, \varphi_1}$ .

(ii) Pour tout  $\varphi$  dans  $D(G)$  il existe une partie compacte  $C_\varphi$  de  $G(\ell)$  telle que  $F_{\ell, \varphi}$  soit nulle en dehors de  $C_\varphi Z(G)$ .

(iii) Si  $G$  est compact,  $G(\ell)$  est un tore maximal de  $G$ ,  $G(\ell)'$  est l'ensemble des éléments réguliers de  $G(\ell)$  et  $F_{\ell, \varphi}$  est, à un scalaire près, l'intégrale invariante de  $\varphi$  relativement à  $G(\ell)$ , comme elle est définie en [14].

On dira que  $F_{\ell, \varphi}$  est l'intégrale invariante de  $\varphi$  relativement à  $\ell$ . Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples, il existe en général des fonctions  $\varphi$  dans  $D(G)$  telles que la fonction  $F_{\ell, \varphi}$  ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur  $G(\ell)$ . Soit  $T$  une représentation du groupe  $G$  dont la classe d'équivalence est  $T(\ell, G)$ . Soit  $dg$  une mesure de Haar sur le groupe  $G$ . On note  $dx$  la mesure de Haar sur le groupe  $G(\ell)$  telle que la mesure quotient  $dg/dx$  corresponde à la mesure  $db_{O_\ell}$  sur l'orbite  $O_\ell$ . On note  $dz$  une mesure de Haar sur le groupe  $Z(G)$  et  $d\dot{x}$  la mesure quotient  $dx/dz$ . On note  $X_\ell$  le caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X)$ .

THÉORÈME. — Pour tout  $\varphi$  dans  $D(G)$  l'opérateur

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(g) T(g) dg$$

est à trace et on a

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell, \varphi}(xz) X_\ell(xz) dz d\dot{x},$$

les intégrales successives étant convergentes.

Un cas particulier de ce théorème est obtenu par DUFLO dans [5, chap. IX, prop. 2.4.1].

Nous avons démontré ce théorème dans [4] pour  $G$  résoluble. Si  $G$  est compact, le théorème résulte facilement de la formule de caractère de H. Weyl.

La formule du caractère démontrée dans [15] est valable pour tout  $\varphi$  dans  $D(U)$ , où  $U$  est un voisinage de l'élément neutre du groupe  $G$ . Notre résultat est valable pour tout fonction  $\varphi$  dans  $D(G)$ .

D'après [1], [2], [7], toute représentation de  $G$  de carré intégrable modulo  $Z(G)$  est associée à une forme linéaire vérifiant les hypothèses de l'introduction. Le théorème s'applique donc en particulier à de telles représentations.

**Plan**

- 0. Principales notations.
- 1. Construction de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie connexe à radical co-compact.
- 2. La structure de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .
- 3. Lemmes de réduction.
- 4. Une intégrale invariante sur le groupe  $G$ .
- 5. La formule du caractère.

**0. Principales notations.**

**0.1.** — Si  $G$  est un groupe topologique, on note  $G_0$  la composante neutre de  $G$ .

**0.2.** — Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on notera  $Z_H(V)$  le centralisateur de  $V$  dans  $H$ . Si  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ , on notera  $Z_{\mathfrak{h}}(V)$  le centralisateur de  $V$  dans  $\mathfrak{h}$ . Le centre de  $\mathfrak{g}$  sera noté  $Z(\mathfrak{g})$ . Soit  $X$  une partie de  $G$ . On notera  $Z_H(X)$  le centralisateur de  $X$  dans  $H$ . Le centre de  $G$  sera noté  $Z(G)$ .

**0.3.** — Soient  $G, \mathfrak{g}$  comme en 0.2. Supposons donnée une représentation du groupe  $G$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $V$ . On en déduit une représentation de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dans  $V$ . Si  $v$  est dans  $V$ , on notera  $G(v)$  (resp.  $\mathfrak{g}(v)$ ) le stabilisateur (resp. l'annulateur) de  $v$  dans  $G$  (resp. dans  $\mathfrak{g}$ ).

**0.4.** — Soit  $G$  un groupe localement compact. On notera  $\Delta_G$  la fonction module sur  $G$ . Soient  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ ,  $dg$  et  $dh$  des mesures de Haar à gauche sur  $G$  et  $H$ . On notera  $\Delta_{H,G}$  la fonction sur  $H$  définie par  $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)\Delta_G(h)^{-1}$ . Si  $\Delta_{H,G} = 1$ , on notera  $dg/dh$  la mesure quotient de  $dg$  par  $dh$  sur l'espace  $G/H$ .

**0.5.** — Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Si  $V$  et  $W$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathfrak{g}$ , on notera  $[V, W]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{g}$  engendré par les vecteurs  $[v, w]$  avec  $v$  dans  $V$  et  $w$  dans  $W$ .

**0.6.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. On notera  $V'$  son dual. Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  et si  $\ell$  est dans  $V'$ , on notera  $\ell_W$  la restriction de  $\ell$  à  $W$ . Soit  $B$  une forme bilinéaire antisymétrique sur  $V$ . On notera  $B^W$  la restriction de  $B$  à  $W$  et  $W^B$  l'orthogonal de  $W$  pour  $B$ .

**0.7.** — Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ , on notera  $V^c$  son complexifié et  $x \mapsto \bar{x}$  l'involution de  $V^c$  définie par la forme réelle  $V$ .

Si  $\lambda$  est dans  $(V^c)'$  on notera  $\bar{\lambda}$  la forme linéaire sur  $(V^c)$  définie par  $\bar{\lambda}(X) = \overline{\lambda(\bar{X})}$ . On dira que  $\lambda$  est *réelle* ( resp. *imaginaire pure*) si  $\lambda = \bar{\lambda}$  (resp.  $\lambda = -\bar{\lambda}$ ). Si  $\lambda$  n'est ni réelle ni imaginaire pure on dira que  $\lambda$  est *complexe*. Si  $B$  est une forme bilinéaire sur  $V$ , on notera par la même lettre l'extension complexe de  $B$  à  $V^c$ .

**0.8.** — Soit  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et ses idéaux sont considérés comme  $G$ -modules pour la représentation adjointe. Le dual de l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  ou de l'un de ses idéaux est considéré comme  $G$ -module pour la représentation contragrédiente. Si  $\ell$  est dans  $\mathfrak{g}'$ , on notera  $O_\ell$  l'orbite de  $\ell$  sous l'action de  $G$ . L'orbite  $O_\ell$  porte une mesure  $G$ -invariante. On notera  $db_{O_\ell}$  cette mesure normalisée comme en [4, chap. 2, 2.6]. On notera  $B_\ell$  la forme bilinéaire alternée sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $B_\ell(X, Y) = \ell([X, Y])$ .

**0.9.** — Si  $X$  est un espace localement compact, on notera  $C_c(X)$  l'espace des fonctions continues et à support compact définies sur  $X$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Si  $X$  est une variété  $C^\infty$ , on notera  $C^\infty(X)$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, définies sur  $X$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On notera  $D(X)$  l'espace  $C_c(X) \cap C^\infty(X)$ .

## 1. Construction de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie connexe à radical co-compact

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe à radical co-compact. On note  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie.

**1.1.** — Soit  $\ell$  une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$ . Soit  $W$  une polarisation positive en  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^c$ . (Il en existe d'après [8].) D'après [5, chap. 5, lemme 4.3.8], si  $X$  est dans  $\mathfrak{g}(\ell)$  le nombre  $\theta(X) = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \operatorname{Tr}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$  ne dépend pas du choix de  $W$ . On dira que la forme linéaire  $\ell$  est *admissible* s'il existe un caractère du groupe  $G(\ell)_0$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X) + \theta(X)$ . On notera  $\tilde{X}_\ell$  ce caractère. D'après [11, rem. 2, p. 154], cette définition est

équivalente à celle de [11]. On dira que  $\ell$  est *bien polarisable* si elle admet une polarisation résoluble qui vérifie la condition de Pukanszky.

**1.2.** — Soient  $\ell$  une forme linéaire admissible sur  $\mathfrak{g}$  et  $\tau$  une représentation unitaire irréductible du groupe  $G(\ell)$  dont la restriction à  $G(\ell)_0$  est un multiple de  $\tilde{X}_\ell$ . D'après [15], on peut associer au couple  $(\ell, \tau)$  une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles du groupe  $G$ .

Notons  $\mathfrak{n}$  le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et  $f$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathfrak{n}$ . D'après [8], il existe une polarisation positive  $W$  en  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^c$ , stable par  $G(\ell)$ , admissible pour  $\mathfrak{n}$  et telle que  $W \cap \mathfrak{n}^c$  soit stable par  $G(f)$ .

Posons  $\mathfrak{d} = W \cap \mathfrak{g}$  et notons  $D_0$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{d}$ . Le groupe  $D = G(\ell)D_0$  est fermé dans  $G$ . Le caractère  $\tilde{X}_\ell$  du groupe  $G(\ell)_0$  se prolonge en un caractère unitaire du groupe  $D_0$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X) + \theta(X)$  (où  $\theta(X) = -\frac{1}{2} \text{Im Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$  pour  $X$  dans  $\mathfrak{d}$ ), qu'on note aussi  $\tilde{X}_\ell$ . La représentation  $\tau$  du groupe  $G(\ell)$  se prolonge en une représentation du groupe  $D$ , notée aussi  $\tau$ , dont la restriction à  $D_0$  est un multiple de  $\tilde{X}_\ell$ . Sur l'espace des fonctions numériques sur  $G$  qui vérifient  $\varphi(xd) = \Delta_{D,G}(d)\varphi(x)$  pour tout  $x$  dans  $G$  et pour tout  $d$  dans  $D$ , on fixe une mesure  $G$ -invariante notée  $\int_{G/D} \varphi(x) dx$ . On note  $C^\infty(\ell, \tau, W, G)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $G$  à valeurs dans l'espace de  $\tau$  qui vérifient :

(i)  $\varphi(xd) = \Delta_{D,G}(d)^{1/2} \tau(d)^{-1} \varphi(x)$  pour tout  $x$  dans  $G$  et pour tout  $d$  dans  $D$ .

(ii)  $\lambda(X)\varphi = (-i\ell(X) + \frac{1}{2} \text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X)\varphi$ , pour tout  $X$  dans  $W$  et où  $\lambda(X)$  est le champ des vecteurs invariant à gauche déterminé par  $X$ .

(iii)  $\int_{G/D} |\varphi|^2 dx < +\infty$ .

On note  $H(\ell, \tau, W, G)$  le complété de  $C^\infty(\ell, \tau, W, G)$  pour la norme

$$\varphi \mapsto \left( \int_{G/D} |\varphi|^2 dx \right)^{1/2}$$

et  $T(\ell, \tau, W, G)$  la représentation de  $G$  par translations à gauche dans  $H(\ell, \tau, W, G)$ . La représentation  $T(\ell, \tau, W, G)$  est une représentation unitaire irréductible du groupe  $G$  et sa classe d'équivalence ne dépend pas du choix de  $W$  [15, th. 3.3]. Si le groupe  $G(\ell)$  est connexe on a  $\tau = \tilde{X}_\ell$ . Dans ce cas, on notera  $T(\ell, W, G)$  la représentation  $T(\ell, \tilde{X}_\ell, W, G)$  et  $T(\ell, G)$  sa classe d'équivalence.

**1.3.** — On suppose ici que  $G$  est un groupe de Lie compact, connexe, simplement connexe. Soit  $\ell$  une forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$  admissible et bien

polarisable. D'après [11, II.3, Lemme], l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell)$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Soit  $A$  le système des racines associé à  $(\mathfrak{g}(\ell)^c, \mathfrak{g}^c)$ . Pour  $\alpha$  dans  $A$ , on note  $\mathfrak{g}^\alpha$  le sous-espace radiciel correspondant. Posons

$$A^+ = \{\alpha \in A; (i\ell, \alpha) > 0\}, \quad A^- = \{\alpha \in A; -\alpha \in A^+\}.$$

Il est facile de voir que  $A^+$  est un système des racines positives et que  $\mathfrak{g}(\ell)^c + \sum_{\alpha \in A^-} \mathfrak{g}^\alpha$  est une polarisation positive en  $\ell$ . Posons

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in A^+} a.$$

D'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $\rho_{\mathfrak{g}(\ell)}$ . On notera  $\xi_\rho$  ce caractère. Pour  $\alpha$  dans  $A$ , on note  $\xi_\alpha$  le caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $\alpha_{\mathfrak{g}(\ell)}$ . D'après ce qui précède, il existe un caractère unitaire  $X_\ell$  du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $i\ell_{\mathfrak{g}(\ell)}$ . La proposition suivante est bien connue [15, § 5] et [17, 4.9.6] :

PROPOSITION 1.3. — *Le poids  $i\ell - \rho$  est dominant pour  $A^+$ . La représentation*

$$T\left(\ell, \mathfrak{g}(\ell)^c + \sum_{\alpha \in A^-} \mathfrak{g}^\alpha, G\right)$$

*est la représentation unitaire irréductible de  $G$  de plus haut poids  $i\ell - \rho$ . Si  $x$  est dans  $G(\ell)$  et si  $\xi_\alpha(x) \neq 1$  pour tout  $\alpha$  dans  $A$ , on a*

$$\text{Tr } T(\ell, G)(x) = \left( \sum_{w \in W} \det w X_\ell(w^{-1}x) \right) (\xi_\rho(x)) \prod_{\alpha \in A^+} (1 - \xi_{-\alpha}(x))^{-1},$$

*où  $W$  est le groupe de Weyl associé à  $A$ .*

### 2. La structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie unimodulaire. On suppose qu'il existe une forme linéaire  $\ell$  sur  $\mathfrak{g}$  telle que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell)$  soit abélienne et réductive dans  $\mathfrak{g}$ . On note  $\mathfrak{r}$  le radical de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . D'après [16, cor. 5.2], il existe un facteur de Levi  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$  qui est stable par  $\mathfrak{g}(\ell)$ . Pour  $\lambda$  dans  $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$ , avec  $\lambda \neq 0$ , on note :

$$(\mathfrak{g}^c)_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^c; [A, X] = \lambda(A)X; \text{ pour tout } A \text{ dans } \mathfrak{g}(\ell)^c\}$$

et  $P(\mathfrak{g}(\ell))$  l'ensemble des  $\lambda$  dans  $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$  qui sont différents de 0 et pour lesquels  $(\mathfrak{g}^c)_\lambda$  est non trivial. Si  $\lambda$  est dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ ,  $\bar{\lambda}$  est dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$

et  $(\mathfrak{g}^c)_{\bar{\lambda}} = \overline{(\mathfrak{g}^c)_{\lambda}}$ . Il existe donc un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{m}$  de  $\mathfrak{g}$  tel que l'on ait :

$$\mathfrak{m}^c = \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))} \oplus (\mathfrak{g}^c)_{\lambda}.$$

Notons  $\mathfrak{h}$  le centralisateur de  $\mathfrak{g}(\ell)$  dans  $\mathfrak{g}$ . On a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ . Si  $\lambda$  est dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ , on dira que  $\lambda$  est un *poids* pour  $\mathfrak{g}(\ell)$ . La proposition suivante se démontre comme la Proposition 2.1 de [4] :

PROPOSITION 2.1.

(a) On a  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$ ,  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{s} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ .

(b) La forme linéaire  $\ell$  est nulle sur  $\mathfrak{m}$ . Si  $\lambda$  est dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ ,  $-\lambda$  est dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$  et la restriction de  $B_{\ell}$  à  $(\mathfrak{g}^c)_{\lambda} + (\mathfrak{g}^c)_{-\lambda}$  est non dégénérée. On a  $\dim(\mathfrak{g}^c)_{\lambda} = \dim(\mathfrak{g}^c)_{-\lambda}$ .

(c) On a  $\text{Ker } B_{\ell}^{\mathfrak{m}} = \{0\}$ ,  $\text{Ker } B_{\ell}^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}(\ell) = Z(\mathfrak{h})$ .

On note  $Z(\mathfrak{h})^{\perp}$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$  qui sont nulles sur  $Z(\mathfrak{h})$ .

PROPOSITION 2.2.

(a) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  est unimodulaire.

(b) Soit  $H$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . Alors,

$$H \cdot \ell_{\mathfrak{h}} = \ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^{\perp}.$$

*Démonstration.*

(a) Soit  $G$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Posons  $H_1 = Z_G(\mathfrak{g}(\ell))_0$ . L'algèbre de Lie du groupe  $H_1$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . On va définir trois fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{h}'$  :

- Soit  $E$  une base de l'espace vectoriel  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell)$ . Pour tout  $f$  dans  $\mathfrak{h}'$ , la forme bilinéaire  $B_f$  définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée sur  $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell)$ . On notera  $Q_{\mathfrak{h}}(f)$  le pfaffien de cette forme calculé dans la base  $E$ .

- Soit  $E'$  une base de l'espace vectoriel  $\mathfrak{m}$ . La décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  permet de définir un plongement  $i$  de  $\mathfrak{h}'$  dans  $\mathfrak{g}'$ . Soit  $f$  dans  $\mathfrak{h}'$ . On note  $Q_{\mathfrak{m}}(f)$  le pfaffien de la forme bilinéaire alternée  $B_{i(f)}^{\mathfrak{m}}$  calculé dans la base  $E'$ .

- Pour tout  $f$  dans  $\mathfrak{h}'$ , la forme bilinéaire  $B_{i(f)}$  définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell) = \mathfrak{h}/\mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{m}$ . On notera  $Q(f)$  le pfaffien de cette forme calculé dans la base  $E \cup E'$ .

Le polynôme  $Q$  est  $H_1$ -invariant et le polynôme  $Q_{\mathfrak{h}}$  est semi-invariant pour  $H_1$  de poids  $\Delta_{H_1}^{-1}$ . D'après l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1.,

$H_1 \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$  est un ouvert de  $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^\perp$ . Par conséquent  $Q$  est constant sur  $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^\perp$ . Comme  $i(\ell_{\mathfrak{h}}) = \ell$ ,  $Q$  est non nul sur  $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^\perp$ . Comme pour tout  $f$  dans  $\mathfrak{h}'$  on a :  $Q(f) = Q_{\mathfrak{h}}(f)Q_{\mathfrak{m}}(f)$ , le polynôme  $Q_{\mathfrak{h}}$  est constant et non nul sur  $\ell_{\mathfrak{h}} + Z(\mathfrak{h})^\perp$ . On en déduit que  $\Delta_{H_1} = 1$ , d'où l'assertion.

(b) L'assertion résulte de (a) et de [2, th. 2.9].  $\square$

Le Lemme suivant se démontre facilement :

LEMME 2.3. — *Soit  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{s}$  et telle que  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ . Alors  $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{s})$ . Si de plus  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{s}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$  est réductrice et  $Z(\mathfrak{p}) = Z_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{s})$ .*

PROPOSITION 2.4.

- (a) *L'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$  est réductrice dans  $\mathfrak{g}$ .*
- (b) *On a  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$ .*
- (c) *On a  $\mathfrak{g}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{t}$ .*
- (d) *L'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$  est une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{s}$ .*

*Démonstration.*

(a) Posons  $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{s}$ . D'après le LEMME 2.3, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$  est réductrice et  $\mathfrak{p} = Z(\mathfrak{p}) \oplus \mathfrak{s}$ . Posons  $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(\ell) + Z(\mathfrak{p})$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  est réductrice dans  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{s} \oplus Z(\mathfrak{p})$ . Il est clair que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}$  est réductrice dans  $\mathfrak{s}$ . Soit  $\mathfrak{k}$  le centralisateur de  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}$  dans  $\mathfrak{s}$ . D'après [10, prop. 1.7.7 (iii)], l'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  est réductrice dans  $\mathfrak{s}$  et d'après [6, § 6, n° 6, cor. 1], l'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  est réductrice dans  $\mathfrak{g}$ .

D'autre part  $\mathfrak{k} = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{s}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{b}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}(\ell)) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ .

(b) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$  est réductrice dans  $\mathfrak{h}$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{h}$ , stable par  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$  et supplémentaire de  $Z(\mathfrak{h})$  dans  $\mathfrak{h}$ . On a :

$$[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, \mathfrak{h}] = [\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}, Z(\mathfrak{h}) + V] \subset V.$$

Soit  $H$  un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$ . D'après l'assertion (b) de la PROPOSITION 2.2, il existe  $x$  dans  $H$  tel que la forme linéaire  $x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$  soit nulle sur  $V$ . Il en résulte que  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} \subset \mathfrak{h}(x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}) = x \cdot \mathfrak{h}(\ell_{\mathfrak{h}})$ . Vu l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$  est contenue dans  $\mathfrak{g}(\ell)$ . Comme l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$  est contenue dans  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ , l'assertion s'ensuit.

(c) Résulte de (b) et de l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.1.

(d) On a  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}) = Z_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$ . Pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$  l'opérateur  $\text{ad}_{\mathfrak{s}} X$  est semi-simple. L'assertion s'ensuit.  $\square$

PROPOSITION 2.5.

(a ) Il existe un facteur de Levi  $\mathfrak{s}$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  stable par  $\mathfrak{g}(\ell)$  et tel que l'on ait  $\mathfrak{g}(\ell_{\tau}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$ .

(b) On a alors  $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}}) = \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{s}$ .

Démonstration.

(a) Posons  $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$ . D'après [6, § 6, n° 5, th. 4], l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$  est réductive dans  $\mathfrak{g}$ . Il existe donc un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathfrak{r}$ , stable par  $\mathfrak{p}$  et supplémentaire de  $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$  dans  $\mathfrak{r}$ . On a  $V = V \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ . Soient  $G, H_1$  comme dans la démonstration de (a) de la PROPOSITION 2.2. Il existe  $x$  dans  $H_1$  tel que la restriction de la forme linéaire  $x \cdot \ell_{\mathfrak{h}}$  à  $V \cap \mathfrak{h}$  soit nulle. On en déduit que  $(x \cdot \ell)_V = 0$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$  est contenue dans  $\mathfrak{g}(x \cdot \ell_{\tau})$ . Posons  $\mathfrak{s}_1 = x^{-1} \cdot \mathfrak{s}$ . Comme  $x$  est dans  $H_1$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}_1$  est stable par  $\mathfrak{g}(\ell)$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{g}(\ell)$  est contenue dans  $\mathfrak{g}(\ell_{\tau})$  et

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}(\ell_{\tau}) &= \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{r} + \dim(\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}) \\ &= \dim \mathfrak{p} = \dim(x^{-1} \cdot \mathfrak{p}). \end{aligned}$$

L'assertion résulte de ce que  $x^{-1} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{g}(\ell)$ .

(b) Résulte de (a).  $\square$

PROPOSITION 2.6.

(a) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}(\ell_{\tau})$  est égale à  $\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}$ .

(b) La forme bilinéaire  $B_{\ell}^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}}$  est non dégénérée.

(c) Soit  $\mathfrak{s}$  un facteur de Levi de  $\mathfrak{g}$  stable par  $\mathfrak{g}(\ell)$  et tel que l'on ait  $\mathfrak{g}(\ell_{\tau}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$ . La forme bilinéaire  $B_{\ell}^{\mathfrak{s} \cap \mathfrak{m}}$  est non dégénérée.

Démonstration.

(a) résulte de l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.4 et de l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.5. Soit  $\mathfrak{s}$  comme en (c). Les assertions (b) et (c) résultent de l'assertion (c) de la PROPOSITION 2.1 et de ce que les espaces vectoriels  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{r}$  sont orthogonaux pour la forme bilinéaire  $B_{\ell}$ .  $\square$

Remarque. — Soit  $G$  un groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Des résultats proches aux résultats de ce paragraphe sont obtenus par N. H. ANH [1, 2] lorsque  $G(\ell)/Z(G)$  est compact et par M. DUFLO [12, chap. III, § 15] lorsque  $G$  est un groupe de Lie algébrique.

### 3. Lemmes de réduction

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe, à radical co-compact, unimodulaire. On note  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. On suppose qu'il existe une forme linéaire admissible et bien polarisable  $\ell$  sur  $\mathfrak{g}$  telle que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell)$  soit réductive dans  $\mathfrak{g}$ . Comme  $\ell$  est bien polarisable, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}(\ell)$  est abélienne. On note  $\mathfrak{r}$  le radical de  $\mathfrak{g}$ . On fixe un facteur de Levi  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$ , stable par  $\mathfrak{g}(\ell)$  et tel que  $\mathfrak{g}(\ell_{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell)$ . (Il en existe d'après la PROPOSITION 2.5.) Soit  $R$  (resp.  $S$ ) le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}$  (resp.  $\mathfrak{s}$ ). Les groupes  $R$  et  $S$  sont fermés et simplement connexes et le groupe  $G$  est le produit semi-direct de  $S$  par  $R$ . Le groupe  $S$  est compact semi-simple.

#### 3.1.

LEMME 3.1.1. — *Les groupes  $S(\ell_{\mathfrak{s}})$  et  $R(\ell_{\mathfrak{r}})$  sont connexes. En outre, on a  $G(\ell) = S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$ .*

*Démonstration.* — Il résulte des PROPOSITIONS 2.4 et 2.5 que l'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$  est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}$ . Identifions  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{s}'$  par la forme de Killing. D'après [11, II.3, Lemme],  $\ell_{\mathfrak{s}}$  est semi-simple et régulier. Comme  $S(\ell_{\mathfrak{s}}) = Z_{\mathfrak{s}}(\ell_{\mathfrak{s}})$ , il résulte de [9, 21.7.14] que le groupe  $S(\ell_{\mathfrak{s}})$  est connexe. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}$  est unimodulaire et d'après l'assertion (a) de la PROPOSITION 2.6, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{r}})$  est réductive dans  $\mathfrak{r}$ . Il résulte de [4, prop. 2.3] que le groupe  $R(\ell_{\mathfrak{r}})$  est connexe. D'après les PROPOSITIONS 2.5 et 2.6 et d'après ce qui précède, le groupe  $S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$  est contenu dans  $G(\ell)$ . Soit  $g$  dans  $G(\ell)$ . On a  $g = xy$  avec  $x$  dans  $S$  et  $y$  dans  $R$ . Comme  $S$  est contenu dans  $G(\ell_{\mathfrak{r}})$ ,  $y$  est dans  $G(\ell_{\mathfrak{r}}) \cap R = R(\ell_{\mathfrak{r}})$ . Par conséquent  $x$  est dans  $S \cap G(\ell) \subset S(\ell_{\mathfrak{s}})$  et  $G(\ell) = S(\ell_{\mathfrak{s}})R(\ell_{\mathfrak{r}})$ .  $\square$

LEMME 3.1.2. — *Soit  $\mathfrak{n}$  le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il existe une polarisation positive  $W$  en  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^c$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- (i)  $W$  est admissible pour  $\mathfrak{n}$  et  $\mathfrak{n}^c \cap W$  est stable par  $G(\ell_{\mathfrak{n}})$ .
- (ii)  $W$  est admissible pour  $\mathfrak{r}$  et  $\mathfrak{r}^c \cap W$  est stable par  $G(\ell_{\mathfrak{r}})$ .
- (iii)  $W \cap \mathfrak{s}^c$  est une polarisation en  $\ell_{\mathfrak{s}}$  dans  $\mathfrak{s}^c$ .
- (iv)  $W$  (resp.  $W \cap \mathfrak{r}^c$ ,  $W \cap \mathfrak{s}^c$ ) vérifie la condition de Pukanszky.

*Démonstration.* — Soit  $W_1$  une polarisation positive en  $\ell_{\mathfrak{n}}$  dans  $\mathfrak{n}^c$  stable par  $G(\ell_{\mathfrak{n}})$ . (Il en existe d'après [8, prop. II].) Notons  $q$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{n}})$ . Soit  $W_2$  une polarisation positive en  $q$  dans  $\mathfrak{r}(\ell_{\mathfrak{n}})^c$ . Soit  $W_3$  une polarisation positive en  $\ell_{\mathfrak{s}}$  dans  $\mathfrak{s}^c$ . (Il en existe d'après [8].)

Posons  $W = W_1 + W_2 + W_3$ . Il est clair que  $W$  vérifie les conditions (i), (ii), (iii) du lemme. D'après [15, prop. 2.2],  $W$  vérifie la condition (iv).  $\square$

LEMME 3.1.3.

(a) Soit  $W$  la polarisation en  $\ell$  construite dans le Lemme 3.1.2. Pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{s}$  on a  $\text{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c \cap W))} X = 0$ .

(b) La forme linéaire  $\ell_\tau$  est admissible. La forme linéaire  $\ell_\mathfrak{s}$  est admissible.

(c) Il existe un caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X)$ .

Démonstration.

(a) L'application  $X \mapsto \text{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c \cap W))} X$  est un homomorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{s}$  dans  $\mathbb{C}$ . Comme  $\mathfrak{s}$  est une algèbre de Lie semi-simple,  $\text{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c \cap W))} X = 0$  pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{s}$ .

(b) Comme le groupe  $R$  est simplement connexe, la forme linéaire  $\ell_\tau$  est admissible. La forme linéaire  $\ell$  étant admissible, il existe un caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X) - \frac{1}{2} \text{Im} \text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$ . La restriction de ce caractère à  $S(\ell_\mathfrak{s})$  est un caractère unitaire de  $S(\ell_\mathfrak{s})$  de différentielle

$$X \rightarrow i\ell_\mathfrak{s}(X) - \frac{1}{2} \text{Im} \text{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c \cap W))} X - \frac{1}{2} \text{Im} \text{Trad}_{(\mathfrak{r}^c/(\mathfrak{r}^c \cap W))} X.$$

L'assertion résulte alors de (a).

(c) Comme le groupe  $G(\ell)$  est le produit direct des groupes  $S(\ell_\mathfrak{s})$  et  $R(\ell_\tau)$  et comme  $R(\ell_\tau)$  est simplement connexe, il suffit de montrer qu'il existe un caractère unitaire du groupe  $S(\ell_\mathfrak{s})$  de différentielle  $X \mapsto i\ell_\mathfrak{s}(X)$ . D'après la démonstration de l'assertion (b) ci-dessus, il existe un caractère du groupe  $S(\ell_\mathfrak{s})$  de différentielle  $X \mapsto i\ell_\mathfrak{s}(X) - \frac{1}{2} \text{Im} \text{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c \cap W))} X$ . Reprenons les notations de 1.3. On a  $\frac{1}{2} \text{Im} \text{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(\mathfrak{s}^c \cap W))} X = \rho(X)$  pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{s}(\ell_\mathfrak{s})$ . D'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère du groupe  $S(\ell_\mathfrak{s})$  de différentielle  $X \mapsto \rho(X)$ . L'assertion s'ensuit.  $\square$

**3.2.** — Dans ce qui suit, on utilise en plus les notations de 1.2. La polarisation  $W$  en  $\ell$  est celle construite dans le LEMME 3.1.2. Soit  $\mathfrak{s}$  dans  $S$ . On définit un opérateur  $V(\mathfrak{s})$  dans  $C^\infty(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  par  $V(\mathfrak{s})\varphi(x) = \varphi(\mathfrak{s}^{-1}x\mathfrak{s})$ . Il est facile de vérifier que  $V(\mathfrak{s})$  définit bien un opérateur dans  $C^\infty(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  et que cet opérateur conserve la norme sur  $C^\infty(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ . L'opérateur  $V(\mathfrak{s})$  se prolonge par continuité en un opérateur dans  $H(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  qu'on note aussi  $V(\mathfrak{s})$ . On définit une représentation unitaire  $T^e(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  du groupe  $G$  dans  $H(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  par :

$$T^e(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(s\tau) = V(\mathfrak{s})T(\ell_\tau, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(\tau),$$

pour  $s$  dans  $S$  et  $r$  dans  $R$ . Soit  $q$  une forme linéaire admissible et bien polarisable sur  $\mathfrak{s}$ . Identifions  $\mathfrak{s}$  et  $\mathfrak{s}'$  par la forme de Killing. D'après [11, II.3, Lemme],  $q$  est semi-simple et régulier et d'après [9, 21.7.14], le groupe  $S(q) = Z_S(q)$  est connexe. Soit  $U$  une polarisation positive en  $q$  dans  $\mathfrak{s}^c$ . On note  $f$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $f_{\mathfrak{t}} = \ell_{\mathfrak{t}}$ ,  $f_{\mathfrak{s}} = q$ . Il résulte de l'assertion (a) du LEMME 3.1.3. que  $f$  est une forme linéaire admissible. Soit  $\mathfrak{n}$  le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Il est facile de vérifier que  $U + W \cap \mathfrak{r}^c$  est une polarisation positive en  $f$  dans  $\mathfrak{g}^c$ , stable par  $G(f)$ , admissible pour  $\mathfrak{n}$  et que  $\mathfrak{n}^c \cap (U + W \cap \mathfrak{r}^c) = \mathfrak{n}^c \cap W$  est stable par  $G(f_{\mathfrak{n}}) = G(\ell_{\mathfrak{n}})$ . D'après [15, prop. 2.2],  $U + W \cap \mathfrak{r}^c$  vérifie la condition de Pukanszky.

LEMME 3.2.1. — *La représentation du groupe  $G$  dans*

$$H(q, U, S) \otimes H(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$$

*définie par  $sr \mapsto T(q, U, S)(s) \otimes T^e(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(sr)$ , pour  $s$  dans  $S$  et  $r$  dans  $R$ , est équivalente à la représentation  $T(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$ .*

*Démonstration.* — Soient  $\varphi_1 \in C^\infty(q, U, S)$  et  $\varphi_2 \in C^\infty(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$ . La fonction  $B(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$  sur  $G$  définie par

$$B(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(sr) = \varphi_1(s)\varphi_2(srs^{-1}),$$

pour  $s$  dans  $S$  et  $r$  dans  $R$ , est dans  $C^\infty(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$ . En multipliant l'opérateur  $B$  par un scalaire positif non nul, on peut supposer que  $c'$  est une isométrie de  $C^\infty(q, U, S) \otimes C^\infty(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  dans  $C^\infty(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$ . L'opérateur  $B$  se prolonge en une isométrie de  $H(q, U, S) \otimes H(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  dans  $H(f, U + W \cap \mathfrak{r}^c, G)$  et il est facile de voir qu'il entrelace les deux représentations du Lemme. Comme celles-ci sont irréductibles, elles sont équivalentes.  $\square$

COROLLAIRE 3.2.2. — *La représentation du groupe  $G$  dans  $H(\ell_{\mathfrak{s}}, W \cap \mathfrak{s}^c, S) \otimes H(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)$  définie par  $sr \mapsto T(\ell_{\mathfrak{s}}, W \cap \mathfrak{s}^c, S)(s) \otimes T^e(\ell_{\mathfrak{t}}, W \cap \mathfrak{r}^c, R)(sr)$ , pour  $s$  dans  $S$  et  $r$  dans  $R$ , est équivalente à la représentation  $T(\ell, W, G)$ .*

Soit  $p$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{s}$  qui est égale à  $-\frac{1}{2}i \text{Trad}_{(\mathfrak{s}^c/(W \cap \mathfrak{s}^c))} X$  sur  $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$  et qui est nulle sur l'orthogonal de  $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$  dans  $\mathfrak{s}$  pour la forme de Killing sur  $\mathfrak{s}$ . La forme linéaire  $p$  est admissible et bien polarisable. L'algèbre de Lie  $W \cap \mathfrak{s}^c$  est une polarisation positive en  $p$  dans  $\mathfrak{s}^c$ . D'après la PROPOSITION 1.3, la représentation  $T(p, W \cap \mathfrak{s}^c, S)$  est la représentation triviale du groupe  $S$ . Soit  $e$  la forme sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $e_{\mathfrak{t}} = \ell_{\mathfrak{t}}$ ,  $e_{\mathfrak{s}} = p$ . La forme linéaire  $e$  est admissible et bien polarisable et le groupe  $G(e) = G(\ell)$  est connexe. Le corollaire suivant résulte du LEMME 3.2.1 :

COROLLAIRE 3.2.3. — *La représentation  $T^e(\ell_\tau, W \cap \tau^c, R)$  du groupe  $G$  est dans la classe d'équivalence  $T(e, G)$ .*

Soit  $T$  un tore maximal dans  $S$ . On note  $\mathfrak{t}$  son algèbre de Lie. Posons  $G_1 = TR$  et  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{t} + \tau$ . Soit  $\ell_1$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{g}_1$  définie par  $(\ell_1)_\tau = \ell_\tau$ ,  $(\ell_1)_\mathfrak{t} = 0$ . Le groupe  $G_1(\ell_1) = TR(\ell_\tau)$  est connexe. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c$  est une polarisation positive en  $\ell_1$ , stable par  $G_1(\ell_1)$ , admissible pour  $\mathfrak{n}$  et telle que  $\mathfrak{n}^c \cap (\mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c)$  soit stable par  $G_1((\ell_1)_\mathfrak{n}) = G_1(\ell_\mathfrak{n})$ . D'après [5, chap. IV.3.1.7], la polarisation  $\mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c$  vérifie la condition de Pukanszky. Il résulte de l'assertion (a) du LEMME 3.1.3 que  $\ell_1$  est admissible.

LEMME 3.2.4. — *La restriction de  $T^e(\ell_\tau, W \cap \tau^c, R)$  à  $G_1$  est équivalente à la représentation  $T(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c, G_1)$ .*

Démonstration. — Soit  $\varphi$  dans  $C^\infty(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c, G_1)$ . Soit  $B\varphi$  la fonction sur  $R$  définie par  $B\varphi(r) = \varphi(r)$ . l'opérateur  $B$  envoie

$$C^\infty(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c, G_1) \text{ dans } C^\infty(\ell_\tau, W \cap \tau^c, R).$$

En multipliant  $B$  par un scalaire positif non nul on peut supposer que  $c'$  est une isométrie. L'opérateur  $B$  se prolonge en une isométrie de  $H(\ell_1, \mathfrak{t}^c + W \cap \tau^c, G_1)$  dans  $H(\ell_\tau, W \cap \tau^c, R)$  et il est facile de voir qu'il entrelace les deux représentations du Lemme. Comme celles-ci sont irréductibles, elles sont équivalentes.  $\square$

#### 4. Une intégrale invariante sur le groupe $G$

On conserve les hypothèses de 3. Les objets  $G, S, R, \mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \tau, \ell$  sont comme en 3. On utilise les objets  $\mathfrak{h}, \mathfrak{m}, (\mathfrak{g}^c)_\lambda, P(\mathfrak{g}(\ell))$  définis en 2. Le plus grand idéal nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est noté  $\mathfrak{n}$ .

4.1. — Soit  $F$  une partie de  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ . On notera  $-F$  l'ensemble des poids  $\lambda$  de  $P(\mathfrak{g}(\ell))$  tels que  $-\lambda$  soit dans  $F$  et  $F_r$  (resp.  $F_i, F_c$ ) l'ensemble des poids réels (resp. imaginaires purs, complexes) contenus dans  $F$ . On dira que  $F$  est un *système de poids positifs* si :

- (i)  $F \cap (-F) = \emptyset, \quad FU(-F) = P(\mathfrak{g}(\ell));$
- (ii)  $F_c$  est stable par l'involution  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  de  $(\mathfrak{g}(\ell)^c)'$ .

LEMME 4.1.1. — *Soit  $F$  un système de poids positifs. Posons*

$$\rho_F = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} d_\lambda \cdot \lambda, \quad \text{où } d_\lambda = \dim(\mathfrak{g}^c)_\lambda.$$

*Il existe un caractère du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto \rho_F(X)$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de montrer qu'il existe un caractère du groupe  $S(\ell_{\mathfrak{s}})$  de différentielle  $X \mapsto \rho_F(X)$ . Soit  $W$  la polarisation construite dans la démonstration du LEMME 3.1.2. Il résulte de l'assertion (c) du LEMME 3.1.3 qu'il existe un caractère du groupe  $S(\ell_{\mathfrak{s}})$  de différentielle  $X \mapsto \frac{1}{2} \text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$  (ceci puisque  $\text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X$  est imaginaire pur pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{s}(\ell_{\mathfrak{s}})$ ). On a

$$\frac{1}{2} \text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))} (d_{\lambda} - w_{\lambda})\lambda(X),$$

où  $w_{\lambda} = \dim((\mathfrak{g}^c)_{\lambda} \cap W)$  pour  $\lambda$  dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ . Il résulte de la PROPOSITION 2.1 que  $w_{\lambda} + w_{-\lambda} = d_{\lambda}$ . On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \text{Trad}_{(\mathfrak{g}^c/W)} X = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} (w_{-\lambda} - w_{\lambda})\lambda(X).$$

Il est clair qu'il existe un caractère du groupe  $S(\ell_{\mathfrak{s}})$  de différentielle  $X \mapsto \sum_{\lambda \in F} w_{\lambda} \cdot \lambda(X)$ . Le Lemme résulte alors de ce que

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} (w_{-\lambda} - w_{\lambda}) \cdot \lambda + \sum_{\lambda \in F} w_{\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F} d_{\lambda} \cdot \lambda. \quad \square$$

On définit une forme hermitienne  $H_{\ell}$  sur  $\mathfrak{g}^c$  par  $H_{\ell}(X, Y) = iB_{\ell}(X, Y)$ . Soit  $\lambda$  dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))_i$ . Il résulte de l'assertion (b) de la PROPOSITION 2.1 que la restriction  $H_{\ell}^{\lambda}$  de  $H_{\ell}$  à  $(\mathfrak{g}^c)_{\lambda}$  est non dégénérée. On notera  $(p_{\lambda}, n_{\lambda})$  la signature de  $H_{\ell}^{\lambda}$ . Pour  $\lambda$  dans  $P(\mathfrak{g}(\ell))$ , on note  $\xi_{\lambda}$  le caractère du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto \lambda(X)$ . Fixons un système de poids positifs  $F$ . On note  $\xi_{\rho_F}$  le caractère dy groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto \rho_F(X)$ , où  $\rho_F$  est comme dans le LEMME 4.1.1. Posons pour  $x$  dans  $G(\ell)$  :

$$c_{r,F}(x) = \text{sgn} \prod_{\lambda \in F_r} (1 - \xi_{-\lambda}(x))^{d_{\lambda}}.$$

LEMME 4.1.2. — Soit  $r_{\ell,F}$  la fonction sur  $G(\ell)$  définie par :

$$r_{\ell,F}(x) = (-1)^{i(F)} c_{r,F}(x) \xi_{\rho_F}(x) \prod_{\lambda \in F} (1 - \xi_{-\lambda}(x))^{d_{\lambda}}$$

où  $i(F) = \sum_{\lambda \in F_i} n_{\lambda}$ . Alors, la fonction  $r_{\ell,F}$  ne dépend pas du choix de système de poids positifs  $F$ .

*Démonstration.* — Elle résulte de ce que

$$r_{\ell, F}(x) = \prod_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))_i} (\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x))^{p_\lambda} \\ \times \prod_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))_c} |\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)|^{d_{\lambda/2}} \\ \times \prod_{\lambda \in P(\mathfrak{g}(\ell))_r} |\xi_{\lambda/2}(x) - \xi_{-\lambda/2}(x)|^{d_{\lambda/2}}$$

pour tout  $x$  dans  $G(\ell)$ .  $\square$

On notera  $r_\ell$  la fonction du LEMME 4.1.2 et  $G(\ell)'$  l'ensemble des  $x$  appartenant à  $G(\ell)$  et tels que  $r_\ell(x) \neq 0$ . L'ensemble  $G(\ell)'$  est un ouvert dense de  $G(\ell)$  et son complémentaire dans  $G(\ell)$  est de mesure nulle pour la mesure de Haar sur  $G(\ell)$ .

**4.2.** — L'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}$  est unimodulaire et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{r}(\ell_\mathfrak{r})$  est réductive dans  $\mathfrak{r}$ . D'après la Proposition 2.4 de [4], il existe un sous-groupe fermé, connexe, simplement connexe  $A$  de  $R$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{a}$  et un sous-groupe fermé, connexe, simplement connexe, invariant  $K$  de  $R$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Le groupe  $R$  est le produit semi-direct de  $A$  par  $K$ .

(ii) Le groupe  $R(\ell_\mathfrak{r})$  est le produit direct des groupes  $A$  et  $Z(K)$  et  $Z(K) = Z(R)_0$ . (En particulier  $Z(K)$  est connexe.) Comme  $[\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{r}(\ell_\mathfrak{r}), \mathfrak{s}] = \{0\}$ , on a  $Z(K) = Z(G)_0$ .

(iii) L'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  contient le plus grand idéal nilpotent  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{g}$ . Il est clair que  $\mathfrak{r} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} + \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ . Comme  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} = [\mathfrak{g}(\ell), \mathfrak{r}]$ ,  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  est contenu dans  $\mathfrak{n}$  et d'après la condition (iii) ci-dessus,  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  est contenu dans  $\mathfrak{k}$ . Posons  $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$ . On note  $U$  le sous-groupe analytique de  $R$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}$ . Posons  $B = AS(\ell_\mathfrak{s}) \cap G(\ell)'$ . Il est clair que  $B$  est une partie ouverte et dense de  $AS(\ell_\mathfrak{s})$ . D'après la condition (ii) ci-dessus, on a  $G(\ell)' = BZ(G)_0$ .

LEMME 4.2. — *L'application  $(x, X, u) \mapsto \exp Xx \exp(-X)u$  est un difféomorphisme de  $B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U$  sur  $BK$ .*

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur la dimension de  $\mathfrak{u}$ . On note  $\mathfrak{z}$  le centre de  $\mathfrak{n}$  et  $\theta$  l'application du lemme.

(a) On suppose que  $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$ . On pose  $\mathfrak{j} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$  et on note  $J$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{j}$  et  $\pi$  l'application canonique  $G \rightarrow G/J$ . Il est facile de voir en utilisant l'hypothèse de récurrence que  $\theta$  est bijective. Montrons qu'elle est régulière en tout point  $(x_0, X_0, u_0)$  de  $B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U$ . On note  $\mathfrak{b}$  l'algèbre de Lie du groupe  $AS(\ell_\mathfrak{s})$  et  $\pi'$  (resp.  $\theta'$ )

la différentielle de l'application  $\pi$  (resp.  $\theta$ ). Pour  $g$  dans  $G$ , on note  $L_g$  la différentielle de l'application  $x \mapsto gx$  de  $G$  dans  $G$ .

L'espace tangent à  $(x_0, X_0, u_0)$  de la variété  $B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U$  s'identifie à  $L_{x_0}(e)\mathfrak{b} \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{u}$  et l'espace tangent au  $\theta(x_0, X_0, u_0)$  de la variété  $BK$  s'identifie à  $L_{\theta(x_0, X_0, u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$ . Il résulte de l'hypothèse de récurrence que l'application  $\pi'(\theta(x_0, X_0, u_0))\theta'(x_0, X_0, u_0)$  est surjective. Par conséquent, l'image par  $\theta'(x_0, X_0, u_0)$  de  $L_{x_0}(e)\mathfrak{b} \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{u}$  contient un sous-espace vectoriel  $W$  de  $L_{\theta(x_0, X_0, u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$ , supplémentaire de  $L_{\theta(x_0, X_0, u_0)}(\mathfrak{z})$  dans  $L_{\theta(x_0, X_0, u_0)}(\mathfrak{b} + \mathfrak{k})$ .

D'autre part, l'image par  $\theta'(x_0, X_0, u_0)$  de  $\{0\} \times \{0\} \times L_{u_0}(e)\mathfrak{z}$  est  $L_{\theta(x_0, X_0, u_0)}\mathfrak{z}$ . On en déduit que l'application  $\theta'(x_0, X_0, u_0)$  est surjective. Comme  $\dim(B \times \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \times U) = \dim(BK)$ ,  $\theta'(x_0, X_0, u_0)$  est un isomorphisme.

(b) On suppose que  $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ . L'idéal  $\mathfrak{z}$  est alors contenu dans  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  et la démonstration du lemme dans ce cas est analogue à la démonstration ci-dessus.  $\square$

**4.3.** — On conserve les notations de 4.2. On note  $H$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  et  $H_1$  le sous-groupe analytique de  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$ .

LEMME 4.3.1. — *Le groupe  $H$  est le centralisateur de  $G(\ell)$  dans  $G$ .*

*Démonstration.* — L'image de  $Z_G(G(\ell))$  par l'homomorphisme canonique  $p : G \rightarrow G/R = S$  est contenu dans  $Z_S(S(\ell_s)) = S(\ell_s)$ . On en déduit que  $Z_G(G(\ell))$  est contenu dans  $S(\ell_s)R$ . Posons  $G_1 = S(\ell_s)R$ . Notons  $\mathfrak{g}_1$  l'algèbre de Lie du groupe  $G_1$  et  $\ell_1$  la restriction de  $\ell$  à  $\mathfrak{g}_1$ . Le groupe  $G_1$  est résoluble, connexe, unimodulaire et  $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{g}(\ell)$ . L'assertion résulte alors de [4, Proposition 2.1 (d)].  $\square$

LEMME 4.3.2. — *Soient  $\varphi$  dans  $C_c(G)$  et  $x$  dans  $G(\ell)'$ . La fonction  $g \mapsto \varphi(gxg^{-1})$  est à support compact modulo  $H$  sur  $G$ .*

*Démonstration.* — Comme  $G(\ell)' = BZ(G)_0$ , il existe  $y$  dans  $B$  et  $z$  dans  $Z(G)_0$  tels que  $x = yz$ . Notons  $C$  le support de  $\varphi$ . Soient  $s$  dans  $S$ ,  $X$  dans  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ ,  $h_1$  dans  $H_1$  tels que l'on ait  $g = s \exp X h_1$ . Comme  $gxg^{-1}$  est dans  $C$ ,  $\exp X y \exp(-X)$  est dans  $SCS z^{-1}$ . D'après le LEMME 4.2,  $X$  est dans une partie compacte  $C(x, \varphi)$  de  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ , indépendante de  $g$ . Soit  $C(x, \varphi)'$  l'image de  $C(x, \varphi)$  par l'application exponentielle. On a  $g \in SC(x, \varphi)'H$ , d'où le Lemme.  $\square$

L'application canonique  $G \rightarrow G/H$  définit un isomorphisme de  $\mathfrak{m}$  sur l'espace tangent  $T_H(G/H)$  au point  $H$  de la variété  $G/H$ . On identifie  $\mathfrak{m}$  et  $T_H(G/H)$  par cet isomorphisme. Comme  $G$  et  $H$  sont unimodulaires,

il existe une unique forme différentielle  $G$ -invariante sur  $G/H$  dont la valeur au point  $H$  est la forme extérieure

$$\frac{1}{(2\pi)^m m!} B_\ell^m \wedge \dots \wedge B_\ell^m \quad (m = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m} \text{ facteurs}).$$

On notera  $dm_\ell$  la mesure sur  $G/H$  définie par cette forme. Soit  $\varphi$  une fonction dans  $D(G)$ . Soit  $x$  dans  $G(\ell)'$ . La fonction  $g \mapsto \varphi(gxg^{-1})$  définit, par passage au quotient, une fonction sur  $G/H$  et, d'après le LEMME 4.3.2, cette fonction est dans  $C_c(G/H)$ . On notera  $F_{\ell,\varphi}$  la fonction sur  $G(\ell)'$  définie par

$$F_{\ell,\varphi}(x) = r_\ell(x) \int_{G/H} \varphi(gxg^{-1}) dm_\ell(g),$$

où  $r_\ell$  est la fonction sur  $G(\ell)$  définie en 4.1. Soit  $dt$  la mesure de Haar sur  $S(\ell_s)$  de masse totale 1. Notons  $ds$  la mesure de Haar sur  $S$  telle que la mesure quotient  $ds/dt$  corresponde à la mesure  $db_{O_{\ell_s}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_s}$ . Posons, pour  $\varphi$  dans  $D(G)$ ,  $\tilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1}) ds$ . Notons  $dX$  la mesure sur  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$  définie par la forme extérieure

$$\frac{1}{(2\pi)^n n!} B_\ell^{m \cap \mathfrak{r}} \wedge \dots \wedge B_\ell^{m \cap \mathfrak{r}}, \quad (n = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{m} \cap \mathfrak{r} \text{ facteurs}).$$

Il est facile de voir que pour tout  $x$  dans  $G(\ell)'$  on a :

$$F_{\ell,\varphi}(x) = r_\ell(x) \int_{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}} \tilde{\varphi}(\exp Xx \exp(-X)) dX.$$

Il résulte alors du LEMME 4.2 que pour toute fonction  $\varphi$  dans  $D(G)$  la fonction  $F_{\ell,\varphi}$  est dans  $C^\infty(C(\ell)')$ .

*Remarques*

(i) Soit  $g_1$  dans  $G$ . Posons  $\varphi_1(g) = \varphi(g_1gg_1^{-1})$ . Il est clair que  $F_{\ell,\varphi} = F_{\ell,\varphi_1}$ .

(ii) Supposons  $G$  compact. Le groupe  $G(\ell)$  est alors un sous-groupe de Cartan de  $G$ . La fonction  $F_{\ell,\varphi}$  est à un scalaire près l'intégrale invariante de  $\varphi$  relativement au sous-groupe de Cartan  $G(\ell)$ , comme elle est définie en [14].

(iii) Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes de Lie semi-simples (cf. [14]), il existe en général des fonctions  $\varphi$  dans  $D(G)$  telles que la fonction  $F_{\ell,\varphi}$  ne soit pas sommable pour la mesure de Haar sur  $G(\ell)$ . On peut voir cela dans l'exemple donné en [3, 3.4]. Si  $\varphi$  est

dans  $D(G)$ , on dira que  $F_{\ell, \varphi}$  est l'intégrale invariante de  $\varphi$  relativement à  $\ell$ .

4.4. — Soit  $D$  un sous-groupe discret du centre de  $G$ . Posons  $\tilde{G} = G/D$ . On suppose que la fonction  $r_\ell$  est constante sur les classes de  $G(\ell)$  modulo  $D$ . La fonction  $r_\ell$  définie par passage au quotient une fonction sur  $\tilde{G}(\ell) = G(\ell)/D$ , qu'on notera aussi  $r_\ell$ . On peut alors définir comme en 4.3, pour toute fonction  $\varphi$  dans  $D(\tilde{G})$ , l'intégrale invariante  $F_{\ell, \varphi}$  de  $\varphi$  relativement à  $\ell$ .

4.5. — Posons  $G_1 = S(\ell_s)R$ . l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1$  du groupe  $G_1$  est égale à  $\mathfrak{s}(\ell_s) + \mathfrak{r}$ . On note  $\ell_1$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{g}_1$  définie par  $(\ell_1)_\mathfrak{r} = \ell_\mathfrak{r}$ ,  $(\ell_1)_{\mathfrak{s}(\ell_s)} = 0$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1$  est résoluble unimodulaire et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1(\ell_1) = \mathfrak{g}(\ell)$  est réductrice dans  $\mathfrak{g}_1$ . Soit  $P(\mathfrak{g}_1(\ell_1))$  l'ensemble des poids de la représentation  $X \mapsto \text{ad}_{(\mathfrak{g}_1)} X$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_1(\ell_1)^c$ . Soit  $P_1$  le système des racines associé à  $(\mathfrak{g}(\ell)^c, (\mathfrak{s} + \mathfrak{g}(\ell))^c)$ . Il est clair que  $P(\mathfrak{g}(\ell)) = P(\mathfrak{g}_1(\ell_1)) \cup P_1$ . Soit  $F_1$  un système de poids positifs dans  $P(\mathfrak{g}_1(\ell_1))$ . D'après le LEMME 4.1.1 et d'après [9, 21.14.8 (i) et 21.16.3], il existe un caractère du groupe  $G_1(\ell_1) = G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto \rho_{F_1}(X)$ , où

$$\rho_{F_1} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in F_1} d_\lambda \cdot \lambda \quad \text{et} \quad d_\lambda = \dim(\mathfrak{g}_1^\lambda).$$

On en déduit que la fonction  $r_{\ell_1}$  est définie sur  $G_1(\ell_1) = G(\ell)$ . Soit  $dt$  la mesure de Haar sur  $S(\ell_s)$  de masse totale 1. Notons  $ds$  la mesure de Haar sur  $S$  telle que la mesure quotient  $ds/dt$  corresponde à la mesure  $db_{O_{\ell_s}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_s}$ . Soit  $\varphi$  dans  $D(G)$ . On notera  $\tilde{\varphi}$  la fonction sur  $G$  définie par  $\tilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1}) ds$  et  $\bar{\varphi}$  la fonction sur  $G_1$  définie par  $\bar{\varphi}(tr) = r_{\ell_s}(t)\tilde{\varphi}(tr)$ , pour  $t$  dans  $S(\ell_s)$  et  $r$  dans  $R$ .

LEMME 4.5. — Pour tout  $\varphi$  dans  $D(G)$  et pour tout  $x$  dans  $G(\ell)'$ , on a l'égalité  $F_{\ell, \varphi}(x) = F_{\ell_1, \bar{\varphi}}(x)$ .

Démonstration. — Remarquons d'abord que le deuxième membre de l'égalité du Lemme a un sens puisque  $G(\ell)'$  est contenu dans  $G_1(\ell_1)'$ . Il résulte du LEMME 4.3.1. que  $Z_{G_1}(G_1(\ell_1)) = Z_G(G(\ell)) = H$ . On a :

$$F_{\ell_1, \bar{\varphi}}(x) = r_{\ell_1}(x) \int_{G_1/H} \bar{\varphi}(g_1 x g_1^{-1}) dm_{\ell_1}(g_1).$$

Soient  $t$  dans  $S(\ell_s)$ ,  $r$  dans  $R$  tels que  $x = tr$ . On a  $g_1 t r g_1^{-1} = t t^{-1} g_1 t r g_1^{-1}$ . Pour tout  $g_1$  dans  $G_1$ ,  $t^{-1} g_1 t r g_1^{-1}$  est dans  $R$  et d'après la définition de  $\bar{\varphi}$ ,

on a  $\tilde{\varphi}(g_1 tr g_1^{-1}) = r_{\ell_s}(t) \tilde{\varphi}(g_1 tr g_1^{-1})$ . Comme  $P(\mathfrak{g}(\ell)) = P(\mathfrak{g}_1(\ell_1)) \cup P_1$ , on a  $r_{\ell_1}(tr) r_{\ell_s}(t) = r_{\ell}(tr)$ . Par conséquent :

$$F_{\ell_1, \tilde{\varphi}}(x) = r_{\ell}(x) \int_{G_1/H} \tilde{\varphi}(g_1 x g_1^{-1}) dm_{\ell_1}(g_1).$$

D'après le choix de la mesure  $ds$ , ceci est égal à  $F_{\ell, \varphi}(x)$ .  $\square$

**5. La formule du caractère**

Les hypothèses sont celles de 3. Les objets  $G, S, R, \mathfrak{g}, \mathfrak{s}, \mathfrak{r}, \ell$  sont comme en 3. Pour  $\varphi$  dans  $D(G)$  la fonction  $F_{\ell, \varphi}$  est définie en 4.3. On note  $X_{\ell}$  le caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto i\ell(X)$ . (Un tel caractère existe d'après l'assertion (c) du LEMME 3.1.3.). Soit  $dg$  une mesure de Haar sur le groupe  $G$ . On note  $dx$  la mesure de Haar sur le groupe  $G(\ell)$  telle que la mesure quotient  $dg/dx$  corresponde à la mesure  $db_{O_{\ell}}$  sur l'orbite  $O_{\ell}$ . Soit  $dz$  une mesure de Haar sur  $Z(G)$ . On note  $d\dot{x}$  la mesure quotient  $dx/dz$  sur  $G(\ell)/Z(G)$ .

THÉORÈME 5.1. — Soient  $T$  une représentation du groupe  $G$  dont la classe d'équivalence est  $T(\ell, G)$  et  $\varphi$  une fonction dans  $D(G)$ . L'opérateur  $T(\varphi) = \int_G \varphi(g)T(g)dg$  est à trace et sa trace est donnée par la formule

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell, \varphi}(xz) X_{\ell}(xz) dz d\dot{x},$$

les intégrales successives étant convergentes.

*Démonstration*

a) Supposons d'abord  $G$  compact. On va montrer que le théorème est vrai pour toute fonction continue sur  $G$ .

Posons  $T = G(\ell)$ . Soient  $dk$  et  $dt$  les mesures de Haar sur les groupes  $G$  et  $T$  de masse totale 1. On utilise les notations de la PROPOSITION 1.3. Posons pour  $t$  dans  $T$  :

$$D(t) = \xi_{\rho}(t) \prod_{\alpha \in A^+} (1 - \xi_{-\alpha}(t)).$$

Si  $t$  est dans  $T$  et tel que  $D(t) \neq 0$ , on note :

$$c_T(t) = \left( \sum_{w \in W} \det w X_{\ell}(w^{-1}tw) \right) D(t)^{-1}.$$

D'après la PROPOSITION 1.3 et d'après la formule d'intégration de H. Weyl [17, 4.8.2], pour toute fonction  $\varphi$  continue sur  $G$  on a :

$$\text{Tr} \left( \int_G \varphi(k) T(k) dk \right) = \frac{1}{|W|} \int_T |D(t)|^2 c_T(t) \int_{G/T} \varphi(ktk^{-1}) dk dt,$$

où  $dk$  est la mesure quotient  $dk/dt$ . Pour tout  $w$  dans  $W$ , on a :

$$\begin{aligned} & \int_T \overline{D(t)} \det w X_\ell(w^{-1}tw) \int_{G/T} \varphi(ktk^{-1}) dk dt \\ &= \det w \int_T \overline{D(wtw^{-1})} X_\ell(t) \int_{G/T} \varphi(kwtw^{-1}k^{-1}) dk dt \\ &= \det w \int_T \overline{D(wtw^{-1})} X_\ell(t) \int_{G/T} \varphi(ktk^{-1}) dk dt. \end{aligned}$$

D'après [17, 4.9.2],  $D(wtw^{-1}) = \det w D(t)$ . Il en résulte que

$$\text{Tr} \left( \int_G \varphi(k) T(k) dk \right) = \int_T \overline{D(t)} X_\ell(t) \int_{G/T} \varphi(ktk^{-1}) dk dt.$$

Soient  $c_1, c_2$  les nombres strictement positifs tels que l'on ait  $dk = c_1 dg$ ,  $dt = c_2 dx$ . On a  $dk = c_1 c_2^{-1} dm_\ell$ . On en déduit que :

$$\text{Tr} \left( \int_G \varphi(g) T(g) dg \right) = \int_{G(\ell)} \overline{D(x)} X_\ell(x) \int_{G/G(\ell)} \varphi(gxg^{-1}) dm_\ell(g) dx.$$

Pour terminer la démonstration du théorème pour  $G$  compact, il suffit de montrer que  $r_\ell(x) = \overline{D(x)}$  pour tout  $x$  dans  $G(\ell) = T$ . Il est clair que  $A^-$  est un système de poids positifs dans  $P(\mathfrak{g}(\ell)) = A$ . D'après le LEMME 4.1.2,  $r_\ell(x) = (-1)^{i(A^-)} \overline{D(x)}$ . Comme  $\mathfrak{g}(\ell)^c + \sum_{\alpha \in A^-} (\mathfrak{g}^c)_\alpha$  est une polarisation positive en  $\ell$ , on a  $i(A^-) = 0$ .

b) Reprenons les notations du COROLLAIRE 3.2.2. Posons :

$$T_1 = T(\ell_s, W \cap \mathfrak{s}^c, S), \quad T_2 = T^e(\ell_r, W \cap \mathfrak{r}^c, R).$$

D'après le COROLLAIRE 3.2.2, la représentation du groupe  $G$  définie par  $sr \mapsto T_1(s) \otimes T_2(sr)$ , pour  $s$  dans  $S$  et  $r$  dans  $R$ , est équivalente à la représentation  $T$ . On note  $H(T_1)$  (resp.  $H(T_2)$ ) l'espace de la représentation  $T_1$  (resp.  $T_2$ ). Soit  $dt$  la mesure de Haar sur le groupe  $S(\ell_s)$  de masse totale 1. Soit  $ds$  la mesure de Haar sur le groupe  $S$  telle que la

mesure quotient  $ds/dt$  corresponde à la mesure  $db_{0_{\ell_s}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_s}$ . On notera  $dr$  la mesure de Haar sur le groupe  $R$  telle que l'on ait  $dg = ds dr$ .

Posons  $n = \dim T_1$ . Soit  $e_1, \dots, e_n$  (resp.  $\{f_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ ) une base ortho-normée de  $H(T_1)$  (resp. de  $H(T_2)$ ). On a :

$$\text{Tr } T(\varphi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbf{N}} \int_S \int_R \varphi(sr)(T_1(s)e_i, e_i)(T_2(sr)f_j, f_j) dr ds.$$

On va montrer que la somme

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbf{N}} \int_S \left| \int_R \varphi(sr)(T_1(s)e_i, e_i)(T_2(sr)f_j, f_j) dr \right| ds$$

est finie. Posons, pour  $s$  dans  $S$ ,

$$A(s) = \int_R \varphi(sr)T_2(sr) dr, B(s) = \sum_{j \in \mathbf{N}} |(A(s)f_j, f_j)|.$$

D'après [4, th. 5.1], la représentation  $r \mapsto T_2(r)$  du groupe  $R$  est traçable. Par conséquent, pour tout  $s$  dans  $S$ , l'opérateur  $A(s)$  est à trace. On note  $|\cdot|_1$  la norme de l'espace des opérateurs à trace sur  $H(T_2)$ . [12, chap. XI, § 9]. Il résulte de la démonstration de [12, chap. XI, § 9, Lemme 13, (b)] que  $B(s) \leq |A(s)|_1$ . On a :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \int_S \sum_{j \in \mathbf{N}} |(T_1(s)e_i, e_i)(A(s)f_j, f_j)| ds \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_S B(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_S |A(s)|_1 ds. \end{aligned}$$

L'application  $s \mapsto |A(s)|_1$  est continue. On en déduit que la somme  $I$  est finie. Comme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in \mathbf{N}} \left| \int_S \int_R \varphi(sr)(T_1(s)e_i, e_i)(T_2(sr)f_j, f_j) dr ds \right| \leq I,$$

l'opérateur  $T(\varphi)$  est à trace. D'après ce qui précède, on a :

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_S c_{T_1}(s) \text{Tr } A(s) ds, \quad \text{où } c_{T_1}(s) = \sum_{i=1}^n (T_1(s)e_i, e_i).$$

Posons  $a(s) = \text{Tr } A(s)$ . La fonction  $a$  est continue. Il résulte alors de (a) que :

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_{S(\ell_s)} X_\ell(t)r_{\ell_s}(t) \int_{S/S(\ell_s)} a(sts^{-1}) d\dot{s} dt,$$

où  $d\dot{s}$  est la mesure quotient  $ds/dt$  sur  $S/S(\ell_s)$ .

c) On va calculer  $\int_{S/S(\ell_s)} a((sts^{-1}) d\dot{s}$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_{S/S(\ell_s)} a(sts^{-1}) d\dot{s} &= \int_S a(sts^{-1}) ds \\ &= \int_S \text{Tr} \left( \int_R \varphi(sts^{-1}r) T_2(sts^{-1}r) dr \right) ds. \end{aligned}$$

Comme pour tout  $s$  dans  $S$   $\det(\text{Ad}_\tau s) = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_S a(sts^{-1}) ds &= \int_S \text{Tr} \left( \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(strs^{-1}) dr \right) ds \\ &= \int_S \text{Tr} \left( T_2(s) \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr) dr T_2(s)^{-1} \right) ds \\ &= \int_S \text{Tr} \left( \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr) dr \right) ds. \end{aligned}$$

L'application  $s \mapsto \int_R \varphi(strs^{-1}) T_2(tr) dr$  est une application continue de  $S$  dans l'espace des opérateurs à trace sur  $H(T_2)$ . Par conséquent, on a

$$\int_S a(sts^{-1}) ds = \text{Tr} \left( \int_R \tilde{\varphi}(tr) T_2(tr) dr \right),$$

où  $\tilde{\varphi}$  est la fonction sur  $G$  définie par  $\tilde{\varphi}(g) = \int_S \varphi(sgs^{-1}) ds$ .

d) Soit  $\bar{\varphi}$  la fonction sur  $S(\ell_s)R$  définie par

$$\bar{\varphi}(tr) = X_\ell(t)r_{\ell_s}(tr)\tilde{\varphi}(r)$$

où  $t$  est dans  $S(\ell_s)$  et  $r$  est dans  $R$ . La fonction  $\bar{\varphi}$  est dans  $D(S(\ell_s)R)$ . L'application  $t \mapsto \int_R \bar{\varphi}(tr) T_2(tr) dr$  est une application continue de  $S(\ell_s)$  dans l'espace des opérateurs à trace sur  $H(T_2)$ . D'après ce qui précède, on a :

$$\text{Tr } T(\varphi) = \text{Tr} \int_{S(\ell_s)R} \bar{\varphi}(tr) T_2(tr) dr dt.$$

Soit  $\ell_1$  la forme linéaire sur  $\mathfrak{s}(\ell_s) + \mathfrak{r}$  définie par  $(\ell_1)_{\mathfrak{s}(\ell_s)} = 0$ ,  $(\ell_1)_{\mathfrak{r}} = \ell_\tau$ . Il résulte du LEMME 3.2.4 et de [4, prop. 4.1] que

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(R)_0} \int_{Z(R)_0} F_{\ell_1, \bar{\varphi}}(xz) X_{\ell_1}(xz) dz d\dot{x},$$

où  $X_{\ell_1}$  est le caractère unitaire du groupe  $G(\ell)$  de différentielle  $X \mapsto i\ell_1(X)$  et les mesures  $d\dot{x}$  et  $dz$  sont déterminées de la manière suivante :  $dz$  est une mesure de Haar sur le groupe  $Z(R)_0$ ,  $d\dot{x}$  est la mesure quotient  $dx/dz$  où  $dx$  est la mesure de Haar sur le groupe  $G(\ell)$  telle que la mesure quotient  $(dt dr)/dx$  corresponde à la mesure  $db_{O_{\ell_r}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_r}$ . On montre comme dans le LEMME 4.5 que, pour tout  $x$  dans  $G(\ell)'$ , on a :

$$F_{\ell,\varphi}(x)X_{\ell}(x) = F_{\ell_1,\bar{\varphi}}(x)X_{\ell_1}(x).$$

Comme  $[\mathfrak{g}(\ell) \cap \mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = \{0\}$ , on a  $Z(R)_0 = Z(G)_0$ . On montre, comme dans la démonstration de [4, th. 5.1], que pour tout  $x$  dans  $G(\ell)'$  la fonction  $z \mapsto F_{\ell,\varphi}(xz)$  est absolument intégrable pour la mesure de Haar sur  $Z(G)$ . On a

$$\text{Tr } T(\varphi) = \int_{G(\ell)/Z(G)} \int_{Z(G)} F_{\ell,\varphi}(xz)X_{\ell}(xz) dz d\dot{x},$$

où  $dz$  est une mesure de Haar sur  $Z(G)$ ,  $dx$  la mesure de Haar sur le groupe  $G(\ell)$  telle que la mesure quotient  $(dt dr)/dx$  corresponde à la mesure  $db_{O_{\ell_r}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_r}$  et  $d\dot{x}$  la mesure quotient  $dx/dz$ . D'autre part la mesure quotient  $ds/dt$  correspond à la mesure  $db_{O_{\ell_s}}$  sur l'orbite  $O_{\ell_s}$  et  $dg = ds dr$ . On en déduit que la mesure quotient  $dg/dx$  correspond à la mesure  $db_{O_{\ell}}$  sur l'orbite  $O_{\ell}$ . Le théorème est démontré.  $\square$

COROLLAIRE 5.2. — *Le support de la distribution  $\varphi \mapsto \text{Tr } T(\ell, G)(\varphi)$  est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des conjugués des éléments de  $G(\ell)$ .*

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANH (N.H.). — Lie groups with square integrable representations, *Ann. of Math.*, t. **104**, 1976, p. 431–458.
- [2] ANH (N.H.). — Classification of connected unimodular Lie groups with discrete series, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **30**, **1**, 1980, p. 159–192.
- [3] ANOUSSIS (M.). — *Sur les caractères des groupes de Lie résolubles*, Thèse de troisième cycle, Paris VII, 1985.

- [4] ANOUSSIS (M.). — Sur les caractères des groupes de Lie résolubles, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **41**, **1**, 1991, p. 27–48.
- [5] BERNAT (P.) et al. — *Représentations des groupes de Lie résolubles*. — Dunod, Paris, 1972.
- [6] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie, chapitre I, Algèbres de Lie*. — Hermann, Paris, 1960.
- [7] CHARBONNEL (J.-Y.). — La formule de Plancherel pour un groupe de Lie résoluble connexe, *Lecture Notes in Math.*, t. **587**, 1977, p. 32–76.
- [8] CHARBONNEL (J.-Y.) et KHALGUI (M.S.). — Polarisations pour un certain type des groupes de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **287**, **A**, 1976, p. 915–917.
- [9] DIEUDONNE (J.-D.). — *Éléments d'analyse, vol. V*. — Gauthier-Villars, Paris, 1975.
- [10] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes*. — Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [11] DUFLO (M.). — *Construction des représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Cours d'été du CIME, Cortona, 1980.
- [12] DUFLO (M.). — Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, *Acta Math.*, t. **149**, 1982, p. 154–213.
- [13] DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J.). — *Linear operators, part. II*. — Interscience, New-York, 1963.
- [14] HARISH -CHANDRA. — A formula for semi-simple Lie groups, *Amer. J. Math.*, t. **79**, 1957, p. 733–760.
- [15] KHALGUI (M.S.). — Sur les caractères des groupes de Lie à radical co-compact, *Bull. Soc. Math. France*, t. **109**, 1981, p. 331–372.
- [16] MOSTOW (G.P.). — Fully reducible subgroups of algebraic groups, *Amer. J. Math.*, t. **78**, 1956, p. 200–221.
- [17] WALLACH (N.). — *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. — Dekker, New-York, 1973.