BULLETIN DE LA S. M. F.

DE ST. GERMAIN

Sur la résolvante de deux équations du second degré

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 142-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__142_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1872-1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la résolvante de deux équations du second degré;
par M. DE SAINT-GERMAIN.

(Séance du 2 avril 1873)

Pour résoudre un système de deux équations du second degré à deux inconnues :

$$S = Ax^2 + 2Bxy + \ldots + F = 0, \qquad S' = A'x^2 + \ldots + F' = 0,$$

on lui substitue ordinairement le système équivalent

$$(1) \qquad S + \lambda_1 S' = 0, \quad S + \lambda_2 S' = 0,$$

λ_1 et λ_2 étant tellement choisis que les premiers membres de ces équations se décomposent en un produit de facteurs linéaires. On pose, pour abréger,

$$S + \lambda S' = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f;$$

et l'on sait que λ_1 et λ_2 doivent être racines de l'équation du troisième degré :

$$(2) \qquad \Delta = \frac{1}{c}\left[(be - cd)^2 - (b^2 - ac)(e^2 - cf)\right] = 0.$$

Il peut être bon, pour l'étude algébrique du système proposé, de voir, par la forme de cette équation, qu'elle admet généralement une ou trois racines réelles et rendant positives les quantités $H = b^2 - ac$, $K = e^2 - cf$; cette triple condition étant nécessaire pour que $S + \lambda S'$ se décompose en un produit de facteurs réels. L'équation (2) prouvant que H et K sont de même signe, il suffit d'établir que H est > 0 pour une ou trois racines de l'équation.

Si H conserve le même signe pour toutes les valeurs de λ, ce sera le signe $+$, qui est en évidence pour $\lambda = -\frac{C}{C'} = \lambda'$, car H se réduit alors à b^2. Dans ce cas, la racine, ou les trois racines réelles de l'équation (2), donnent pour $S + \lambda S'$ des facteurs réels.

Supposons au contraire que H s'annule pour $\lambda = \mu$ et $\lambda = \nu$, et que de plus λ' soit compris entre ces deux quantités; H sera positif pour les valeurs de λ renfermées dans le même intervalle. Mais μ et ν substitués à λ dans Δ font prendre à ce polynôme le signe de c, qui n'est pas le même pour les deux. L'équation (2) aura donc une ou trois racines comprises entre μ et ν, et par suite rendant $H > 0$. Dans le cas où λ' serait en dehors de l'intervalle μ, ν, ces nombres mis à la place de λ dans Δ lui feraient prendre des valeurs de même signe ; l'équation (2) aurait donc une ou trois racines réelles en dehors de l'intervalle, et c'est alors précisément la condition pour qu'elles rendent $H > 0$.

Si une des racines de l'équation (2) annule H, on considérera K qui donne lieu aux mêmes résultats ; et notre analyse ne sera en défaut que si cette racine annule à la fois Δ, H et K. Mais il est évident qu'alors $be - cd$, H et K ayant un facteur commun, l'équation (2) aura une racine double qui fera de $S + \lambda S'$ un carré parfait réel ; quant à la troisième racine, elle peut aussi bien donner une décomposition en facteurs réels qu'imaginaires. Ce dernier cas fait exception à la proposition générale, et se présente quand le système proposé admet deux solutions doubles et imaginaires.

Rien de plus facile que d'achever algébriquement la discussion du système (1), qui peut prendre les formes :

$$MN = 0, \quad PQ = 0;$$
$$MN = 0, \quad P^2 + Q^2 = 0;$$
$$(M + N\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1}) = 0, \quad (M - N\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1}) = 0,$$

auxquelles répondent 4, 0 ou 2 solutions réelles. Le cas où l'équation (2) a des racines égales s'étudie en écrivant que ces racines ont une différence qu'on fait tendre vers zéro. Ainsi, dans le cas d'une racine triple, le système (1) prend la forme

$$MN = 0, \quad \left(M + h\frac{dM}{d\lambda} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2M}{d\lambda^2} + \dots\right)\left(N + h\frac{dN}{d\lambda} + \dots\right) = 0;$$

ou, à la limite,

$$MN = 0, \quad M\frac{dN}{d\lambda} + N\frac{dM}{d\lambda} = 0.$$

Les quatre solutions sont :

$$M = 0,\ N = 0;\ M = 0,\ \frac{dM}{d\lambda} = 0;\ N = 0,\ M = 0;\ N = 0,\ \frac{dN}{d\lambda} = 0.$$

Mais ces solutions doivent aussi satisfaire à l'équation

$$\left(M + k\frac{dM}{d\lambda} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2M}{d\lambda^2} + \dots\right)\left(N + k\frac{dN}{d\lambda} + \dots\right) = 0,$$

qui, en tenant compte des deux premières, se réduit, à la limite, à

$$M\frac{d^2N}{d\lambda^2}+2\frac{dM}{d\lambda}\frac{dN}{d\lambda}+N\frac{d^2M}{d\lambda^2}=0.$$

Pour que la solution $M=0$, $N=0$ y satisfasse, il faut que $\frac{dM}{d\lambda}$ ou $\frac{dN}{d\lambda}$ s'annule en vertu des deux premières relations, ce qui rend la deuxième ou la quatrième solution (3) identique à la première et à la troisième. Il y a solution triple.