BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Problème concernant les courbes planes du troisième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 96-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__96_0>

Problème concernant les courbes planes du troisième degré; par M. Halphen.

(Séance du 5 novembre 1880.)

1. Le problème que je me propose de traiter est le suivant :

Étant donnée une courbe plane du troisième degré, trouver une courbe de la troisième classe qui soit tangente à la proposée en neuf points.

D'après une élégante proposition due à M. Cremona ([1]), la *hessienne* et la *cayleyenne* d'un même réseau de coniques sont tangentes entre elles en neuf points. Ces courbes sont respectivement du troisième degré et de la troisième classe. De plus, toute courbe du troisième degré est, de trois manières différentes, la hessienne d'un réseau de coniques. Il lui correspond donc trois cayleyennes, qui, toutes trois, donnent des solutions du problème que je viens d'énoncer. Ainsi trois solutions sont déjà connues. Il s'agit de reconnaître s'il en existe d'autres, si même le problème est déterminé : dans un cas particulier, en effet, comme je vais le montrer pour commencer, il existe une infinité de solutions.

Le résultat auquel je parviens est celui-ci :

1° *Si la cubique donnée est équianharmonique, le problème admet une infinité de solutions. Les courbes de troisième classe touchant la cubique en neuf points forment un système dont ne font pas partie les trois cayleyennes. Ces dernières donnent, en outre, trois solutions isolées.*

2° *Si la cubique n'est pas équianharmonique, il n'y a pas d'autre solution que les trois cayleyennes.*

J'entre maintenant en matière, et j'avertis le lecteur que j'emploie les caractères italiques pour les coordonnées des points, les caractères grecs pour les coordonnées des droites. Ainsi x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées homogènes du *point* x, et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées homogènes de la *droite* ξ.

([1]) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, p. 116. Voir également Picquet, *Systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, p. 106.

2. Soient les deux courbes

$$(1) \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0,$$

$$(2) \qquad \lambda_1 x_1^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 x_2^{\frac{3}{2}} + \lambda_3 x_3^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Je me propose de déterminer les constantes λ de telle sorte que ces courbes se touchent. Je fais, pour un instant, $x^3 = y^2$. Le problème est alors le même que celui d'établir le contact entre une conique et une droite ; les deux équations se changent effectivement en celles-ci :

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0.$$

La condition de contact est

$$(3) \qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0.$$

Soit supposée remplie cette condition. La conique et la droite se touchent en un point y. Mais les équations

$$x_1^3 : y_1^2 :: x_2^3 : y_2^2 :: x_3^3 : y_3^2$$

font correspondre au point y *neuf* points x. Donc, *sous la condition* (3), *les courbes* (1) *et* (2) *se touchent en neuf points.* Or la courbe (1) est une cubique équianharmonique, la courbe (2) est une courbe de troisième classe, également équianharmonique ; ainsi *toute cubique équianharmonique est l'enveloppe d'un système de courbes de troisième classe, dont chacune la touche en neuf points.*

Cette propriété n'appartient pas aux autres cubiques ; pour le faire voir, je vais d'abord démontrer un lemme.

3. Lemme. — 1° *Par les neuf points de rebroussement d'une courbe de troisième classe* (α) *passe une et une seule courbe du troisième degré* (a).

2° *Si l'on donne* (a), *la courbe* (α) *de troisième classe assujettie à avoir ses neuf points de rebroussement sur* (a) *est déterminée de trois manières. Il y a exception dans le seul cas où* (a) *se compose de trois droites : s'il en est ainsi, il y a une infinité de courbes* (α) *et elles sont équianharmoniques.*

Soit la courbe (α) représentée par l'équation tangentielle

$$(4)\qquad \xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3+6\alpha\xi_1\xi_2\xi_3=0.$$

Désignons par ω une racine cubique de l'unité. Les coordonnées ponctuelles des neuf points de rebroussement s'obtiennent de la sorte : pour l'un d'eux on a

$$x_1 : \omega :: x_2 : \omega^2 :: x_3 : -2\alpha,$$

et l'on obtient tous les autres en permutant les indices 1, 2, 3 et en changeant la racine cubique ω. Par ces neuf points nous devons mener une courbe du troisième degré. Je partage les termes de l'équation de cette courbe en trois groupes P_0, P_1, P_2, comme il suit :

$$P_0=a_1x_1^3+a_2x_2^3+a_3x_3^3+6ax_1x_2x_3,$$
$$P_1=c_1x_2x_3^2+c_2x_3x_1^2+c_3x_1x_2^2,$$
$$P_2=d_1x_3x_2^2+d_2x_1x_3^2+d_3x_2x_1^2,$$

en sorte que

$$P_0+P_1+P_2=0$$

est une équation générale du troisième degré. La propriété qui distingue les trois groupes P_0, P_1, P_2 consiste en ce que, si l'on remplace x_1, x_2 par ωx_1 et $\omega^2 x_2$, chacun de ces groupes se reproduit multiplié par une puissance de ω dont l'exposant coïncide avec l'indice de ce groupe. Considérons donc successivement les trois points $(1, 1, -2a)$, $(\omega, \omega^2, -2a)$, $(\omega^2, \omega, -2a)$, où ω est maintenant imaginaire. Étant mises dans P_0, P_1, P_2 les coordonnées du premier point, nous avons les trois équations

$$P_0+P_1+P_2=0,$$
$$P_0+\omega P_1+\omega^2P_2=0,$$
$$P_0+\omega^2P_1+\omega P_2=0,$$

c'est-à-dire

$$P_0=0,\quad P_1=0,\quad P_2=0.$$

Les équations relatives aux autres points s'obtiennent par la permutation des indices dans ces dernières équations. De là résulte cette conséquence : P_1 et P_2 sont identiquement nuls, et P_0 a la forme

$$P_0=\alpha(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+(1-4\alpha^3)x_1x_2x_3.$$

Le seul cas d'exception où P_1 et P_2 ne sont pas identiquement nuls a lieu sous la condition $8\alpha^3 + 1 = 0$, qui caractérise la réduction de la courbe (4) à trois points. Ce cas écarté, nous trouvons pour unique solution la cubique

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{5}$$

dont le paramètre a est donné par la formule

$$a = \frac{1 - 4\alpha^3}{6\alpha}. \tag{6}$$

Ceci démontre la première partie du lemme. La seconde partie s'en déduit aisément. Effectivement les courbes (4) et (5) étant simultanément réduites aux équations canoniques, on voit que, si l'on donne l'équation (5) pour la courbe (a), on en conclura l'équation (4) pour la courbe (α), et le paramètre α, susceptible de trois déterminations, sera fourni par la relation (6).

Il y a toutefois exception pour le cas où l'équation (5) se réduit à son dernier terme, $x_1 x_2 x_3 = 0$. Ce cas provient de l'hypothèse $\alpha = 0$. S'il en est ainsi, la courbe (α) a une infinité de déterminations, dont la forme est

$$\mu_1 \xi_1^3 + \mu_2 \xi_2^3 + \mu_3 \xi_3^3 = 0,$$

et dans laquelle les coefficients μ sont entièrement arbitraires. On sait en effet que, pour une courbe de troisième classe équianharmonique, les points de rebroussement sont distribués sur trois droites.

C'est aussi le même cas d'exception qui s'offre si l'on suppose que l'équation (5), bien que complète, représente trois droites, c'est-à-dire si l'on suppose $8a^3 + 1 = 0$. Il est bien vrai que l'équation simultanée des trois droites, mise sous la forme (5), conduit de trois manières seulement à l'équation (4). Mais l'équation des trois droites peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (5). Les conclusions sont donc ici les mêmes que dans le cas précédent; la seconde partie du lemme est pleinement justifiée.

4. Au moyen de ce lemme, je peux maintenant prouver que *la cubique équianharmonique est la seule cubique qui soit tan-*

gente en neuf points à chacune des courbes de troisième classe faisant partie d'un système.

Soit (b) une cubique donnée, que je suppose être l'enveloppe de courbes (α) de troisième classe, touchant chacune (b) en neuf points. Envisageons une de ces courbes (α) et les neuf tangentes qu'elle a en commun avec (b). Ces tangentes lui sont aussi communes avec la courbe du système qui diffère infiniment peu de (α). Elles sont donc les pivots d'un faisceau tangentiel de courbes de troisième classe $\alpha + \mu\alpha' = 0$. La cubique (b) est tangente aux neuf pivots de ce faisceau. Son équation tangentielle est du sixième degré. Cette équation tangentielle a donc pour premier membre une forme quadratique homogène de α et α'. En désignant par β, β', β'' trois combinaisons linéaires convenables de α, α', je peux écrire l'équation tangentielle de (b) sous la forme

$$\beta'^2 - \beta\beta'' = 0.$$

J'en conclus que la cubique (b) est l'enveloppe des courbes du système défini par l'équation

$$(7) \qquad \lambda^2\beta + 2\lambda\beta' + \beta'' = 0.$$

Ces courbes, dont l'une est (α), sont de troisième classe, et touchent chacune (b) en neuf points. Le système (7) constitue soit la totalité, soit une partie du système supposé. C'est sur ce système (7) que je vais maintenant raisonner. D'après la forme de son équation, ce système a une caractéristique égale à 2 : c'est la caractéristique ν, nombre des courbes qui sont tangentes à une droite donnée arbitrairement. Mais par un point de (b), qui est l'enveloppe, passe une seule courbe du système, comptant deux fois. L'autre caractéristique μ, nombre des courbes qui passent par un point arbitraire, est donc aussi égale à 2. En conséquence, le système (7) constitue la coïncidence principale d'un connexe d'ordre 2 et de classe 2, connexe qui sera représenté par une équation doublement quadratique entre les coordonnées d'un point x et celle d'une droite ξ, $f(x, \xi) = 0$.

Envisageant les ξ comme des constantes, je forme l'équation tangentielle de la conique $f = 0$, et j'emploie les mêmes lettres ξ pour les coordonnées de la tangente. Je définis ainsi l'enveloppe des droites ξ qui jouissent de cette propriété : les deux points x

situés sur ξ et correspondant à ξ dans le connexe coïncident entre eux. D'après les hypothèses, la cubique (b) fait partie de cette enveloppe; mais cette enveloppe est de sixième classe comme (b). Donc (b) est toute cette enveloppe.

De même, les points x par chacun desquels passent deux droites lui correspondant dans le connexe et coïncidant entre elles ont un lieu du sixième degré, dont l'équation s'obtient d'une manière analogue. Or (b) fait partie de ce lieu. L'autre partie est donc une autre cubique (a), qui est nécessairement le lieu des points de rebroussement des courbes du système.

Ainsi, dans un système tel que (7), toutes les courbes de troisième classe qui le composent ont leurs points de rebroussement sur une cubique (a). Cela est en opposition avec le lemme, sauf le seul cas où ces courbes sont équianharmoniques, et où leurs équations sont toutes simultanément réduites à la forme

$$\mu_1 \xi_1^3 + \mu_2 \xi_2^3 + \mu_3 \xi_3^3 = 0. \tag{8}$$

Il en résulte immédiatement que la cubique (b) a nécessairement une équation de la forme

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0, \tag{9}$$

et l'on retrouve ainsi le seul cas possible, qui est celui dont l'existence a été prouvée au n° 2.

5. L'analyse précédente permet de tirer encore une autre conclusion, comme on va voir. Cette analyse découle de l'hypothèse que les neuf tangentes communes à (b) et à (α) sont les pivots d'un faisceau tangentiel $\alpha + \mu\alpha' = 0$. On voit ainsi que cette hypothèse est impossible, sauf le cas où (b) et (α) sont représentées simultanément par des équations telles que (9) et (8).

Écartant dorénavant le cas tout spécial traité dans le n° 2, je peux donc dire que, *si une courbe du troisième degré et une courbe de troisième classe ont neuf contacts, les neuf tangentes communes n'appartiennent à aucune autre courbe de troisième classe.*

A quoi j'ajoute le fait corrélatif : *les neuf points de contact n'appartiennent à aucune autre courbe du troisième degré.*

C'est cette dernière conséquence qui va me permettre d'achever la solution du problème ; je ferai maintenant intervenir la représentation des courbes cubiques par les fonctions elliptiques.

6. J'envisage un argument u ; les coordonnées d'un point de la cubique proposée (a) sont des fonctions uniformes de u, aux périodes ϖ, ϖ', ayant les mêmes infinis, au nombre de trois, dans le parallélogramme des périodes. J'ajoute encore la supposition habituelle que l'argument u est choisi de telle sorte qu'il soit nul pour un des points d'inflexion de (a).

Je cherche une courbe de troisième classe (α), tangente à (a) en neuf points. Soient $u_0, u_1, \ldots$ les arguments de ces neuf points. D'après un théorème bien connu, on aura entre ces arguments la relation

$$2(u_0 + u_1 + \ldots) = m\varpi + m'\varpi',$$

où m et m' seront deux nombres entiers. De là quatre cas à distinguer, savoir :

$$u_0 + u_1 + \ldots \equiv 0,$$

$$u_0 + u_1 + \ldots \equiv \frac{\varpi}{2},$$

$$u_0 + u_1 + \ldots \equiv \frac{\varpi'}{2},$$

$$u_0 + u_1 + \ldots \equiv \frac{\varpi + \varpi'}{2}.$$

Le premier de ces cas est celui où les neuf points appartiennent à une infinité de courbes du troisième degré. Il ne peut y correspondre aucune solution, comme je viens de le prouver au n° 5. Il reste donc à envisager les trois autres cas. Je vais montrer d'abord qu'à chacun de ces trois derniers correspond une solution et que ces trois solutions fournissent les trois cayleyennes. Je ferai voir ensuite qu'il n'existe aucune autre solution.

7. Soit h l'une quelconque des trois demi-périodes $\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi'}{2}, \frac{\varpi + \varpi'}{2}$.
Prenons les arguments $v_0, v_1, \ldots, v_9$ des neuf points d'inflexion et ajoutons h à chacun d'eux. Nous formons ainsi neuf arguments

$w_0, w_1, w_2, \ldots$, dont la forme générale est

$$w = \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3} + h,$$

m et m' étant des nombres entiers. J'ai, d'après cette forme,

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots \equiv h,$$

Ainsi ces neuf arguments w donnent pour somme une demi-période, comme il doit arriver pour les arguments des neuf points de contact de (a) et de la courbe cherchée (α). Je vais prouver qu'effectivement les arguments w déterminent neuf pareils points. Je prends les tangentes en ces neuf points, et je détermine la courbe de troisième classe (α) tangente à ces neuf droites. Il faudra montrer que (α) est tangente à (a) aux neuf points dont les arguments sont $w_0, w_1, w_2, \ldots$.

J'observe d'abord que le groupe $w_0, w_1, w_2, \ldots$ n'est pas altéré si l'on change w en $\pm w + \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3}$, m et m' étant deux entiers quelconques. Les dix-huit substitutions correspondantes ont une expression très simple quand la cubique est représentée en coordonnées ponctuelles par l'équation canonique. Elles ont pour effet d'échanger les indices 1, 2, 3 des coordonnées x et aussi de changer x_1, x_2, x_3 en $\omega x_1, \omega^2 x_2, x_3$, ω étant une racine cubique de l'unité. Les mêmes échanges ont simultanément lieu pour les coordonnées tangentielles. De là résulte, par une analyse toute semblable à celle du n° 3, que l'équation tangentielle de la courbe (α), déterminée par les neuf tangentes que j'ai choisies, est réduite à la forme canonique en même temps que l'équation ponctuelle de la courbe (a).

Les courbes (a) et (α) ont en commun neuf autres tangentes, qui touchent (a) en des points dont je désigne les arguments par $w'_0, w'_1, \ldots$. La somme des dix-huit arguments devant faire une période, j'ai aussi

$$(10) \qquad w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots \equiv h.$$

En outre, l'équation de (α) est réduite à la forme canonique en même temps que celle de (a). Donc la courbe (α) reste inaltérée par les dix-huit substitutions homographiques qui n'altèrent pas

(a). Ces substitutions conservent donc le groupe des dix-huit points $w_0, w_1, \ldots, w'_0, w'_1, \ldots$. Elles conservent déjà le premier groupe de neuf points; elles conservent donc aussi le second. En employant seulement les neuf substitutions qui changent w' en $w' + \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\omega'}{3}$, je peux représenter les neuf arguments $w'_0, w'_1, \ldots$ par l'expression générale $w'_0 + \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3}$. En employant une des neuf autres substitutions, je trouve que $-w'_0$ doit coïncider avec un des arguments précédents, ce qui me donne

$$w'_0 \equiv \frac{m\varpi}{6} + \frac{m'\varpi'}{6}.$$

Je peux écrire encore sous une autre forme

$$w'_0 \equiv \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3} + h',$$

h' étant, comme h, une des demi-périodes. Il s'ensuit

$$w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots \equiv h'.$$

Donc, à cause de (10), h' coïncide avec h et le groupe $w'_0, w'_1, \ldots$ avec le groupe $w_0, w_1, \ldots$. Donc *la courbe* (α) *est tangente à la cubique* (a) *en neuf points, comme il fallait le démontrer.*

8. La courbe (α) ainsi trouvée est réduite à la forme canonique en même temps que (a). Elle est choisie de trois manières différentes, suivant la demi-période h que l'on a employée. On voit aussi que les trois courbes (α) obtenues de la sorte sont les seules qui soient réduites à la forme canonique en même temps que (a). Cette propriété de réduction simultanée a lieu aussi pour les trois cayleyennes. Par suite, étant connu le théorème de M. Cremona, on peut conclure que *les trois courbes* (α) *sont les cayleyennes des trois réseaux dont* (a) *est la hessienne.* Je vais revenir sur la démonstration directe de ce fait; mais, pour le moment, j'ajoute cette conséquence immédiate de l'analyse précédente : *Les points de contact d'une cubique* (a) *avec les cayleyennes* (α), (α'), (α'') *des trois réseaux dont* (a) *est la hessienne sont des points sextactiques de* (a), *de* (α), (α') *et* (α'').

Les vingt-sept points sextactiques de (a) *se partagent en trois groupes de neuf points, chaque groupe se transformant en lui-même par les substitutions homographiques qui conservent cette cubique. Les points d'un même groupe sont les points de contact avec une même cayleyenne.*

La seule partie de cet énoncé dont la démonstration immédiate ne soit pas contenue dans l'analyse précédente consiste dans cette propriété : les points de contact sont sextactiques sur (α), (α'), (α''). Mais cela résulte par dualité de la propriété qui précède, puisque (a) et (α) jouent un rôle symétrique l'une par rapport à l'autre. On retrouve ainsi cette propriété si connue que *la liaison entre la hessienne et la cayleyenne d'un même réseau de coniques se conserve dans les transformations corrélatives.*

9. Pour la commodité du lecteur, je place ici une démonstration directe du théorème de M. Cremona.

En prenant pour point de départ une cubique

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

on a pour sa hessienne et sa cayleyenne les équations

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0, \\ \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + 6\alpha \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les paramètres a, α sont ainsi déterminés :

$$6a = -\frac{2\lambda^3 + 1}{\lambda^2}, \quad 6\alpha = \frac{1 - 4\lambda^3}{\lambda}.$$

La symétrie apparaît d'ailleurs si l'on pose

$$(12) \qquad 2\mu\lambda = -1.$$

On peut effectivement écrire, au lieu des précédentes, les équations

$$(13) \qquad 6a = -\frac{2\lambda^3 + 1}{\lambda^2}, \quad 6\alpha = -\frac{2\mu^3 + 1}{\mu^2}.$$

Ce sont ainsi les équations (12) et (13) qui caractérisent entre les courbes (11) la liaison dont il s'agit ici.

Prenons le point dont les coordonnées sont

$$x_1 = x_2 = \lambda, \quad x_3 = 1.$$

D'après (13), ce point est sur la cubique (a). De plus, la tangente de (a) en ce point a pour coordonnées

$$\xi_1 = \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = 1.$$

A cause de la symétrie des équations (13), il est manifeste que cette tangente touche aussi la courbe (α) et que le point de contact avec (α) est le même qu'avec (a). Les courbes (a) et (α) ont donc entre elles un contact; leurs équations étant toutes deux sous la forme canonique, je conclus que ces courbes ont entre elles neuf contacts : c'est ce qu'il fallait prouver.

10. J'arrive maintenant à la dernière partie du problème, celle qui m'a présenté le plus de difficultés. Il s'agit de reconnaître s'il existe d'autres solutions que les précédentes. Soit (β) une courbe de troisième classe, différente des trois cayleyennes, tangente à (a) en neuf points. Les arguments $u_0, u_1, \ldots$ des points de contact donnent (n° 6) pour somme l'une des trois demi-périodes h. Parmi les cayleyennes, il en est une qui touche aussi (a) en neuf points dont la somme des arguments est h. Soit (α) cette cayleyenne.

Par les mêmes lettres α, β, je désigne les premiers membres des équations tangentielles de ces courbes. Ce sont deux fonctions des coordonnées ξ, toutes deux du troisième degré. J'envisage la fonction $\frac{\beta}{\alpha}$ tout le long de la cubique (a). En d'autres termes, je considère la suite des valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ pour les diverses tangentes de (a). Au moyen de la représentation de (a) par les fonctions elliptiques, $\frac{\beta}{\alpha}$ devient une fonction doublement périodique de u; je désigne cette fonction par $f(u)$.

La fonction $f(u)$ a ses zéros et ses infinis doubles; les premiers correspondent aux contacts de (a) avec (β), les seconds aux contacts de (a) avec (α). Donc $f(u)$ est le carré d'une fonction uniforme. De plus, les zéros et les infinis, pris chacun une seule fois, ont la même somme h. Donc la racine carrée de $f(u)$ a aussi les périodes ϖ, ϖ' comme $f(u)$, ce qui n'arriverait pas si les deux sommes n'étaient pas égales entre elles. C'est sur cette racine carrée de $f(u)$ que je vais maintenant raisonner. Je la désigne par $\varphi(u)$.

La fonction $\varphi(u)$ a neuf infinis qui nous sont connus : ce sont les arguments w. Ses zéros ne nous sont pas connus. Mais l'origine de cette fonction nous conduit à reconnaître qu'elle doit jouir d'une propriété caractéristique : *La dérivée $\varphi'(u)$ a pour zéros les arguments v des neuf points d'inflexion.*

Soient, pour le prouver, α_ξ^3, β_ξ^3 les symboles de α et β. Pour considérer la fonction $\frac{\beta}{\alpha}$ le long de la cubique (a), il nous faut poser, en désignant par x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point de (a), qui sont des fonctions de u, et par x'_1, x'_2, x'_3 les dérivées de ces fonctions,

$$\xi_1 = x_2 x'_3 - x_3 x'_2, \quad \xi_2 = x_3 x'_1 - x_1 x'_3, \quad \xi_3 = x_1 x'_2 - x_2 x'_1.$$

Comme on le sait, on tire de là

$$\Delta x_1 = \xi_2 \xi'_3 - \xi_3 \xi'_2, \quad \Delta x_2 = \xi_3 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_3, \quad \Delta x_3 = \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix}.$$

J'ai maintenant

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)' = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha^2} = \frac{3}{\alpha^2} \alpha_\xi^2 \beta_\xi^2 (\alpha\beta x) \Delta.$$

Le numérateur de cette dérivée contient donc le facteur Δ. Or, on le sait, Δ s'évanouit en chacun des points d'inflexion. Il en est donc ainsi de la dérivée de $f(u)$, et par suite aussi de $\varphi'(u)$.

Si donc la courbe (β) existe, il existe aussi une fonction uniforme $\varphi(u)$, aux périodes ϖ, ϖ', ayant pour infinis simples les neuf arguments w et dont la dérivée a les neuf zéros v. L'existence d'une telle fonction peut déjà être considérée comme peu probable, eu égard aux nombres comparés des arbitraires et des conditions. Toutefois il est nécessaire de prouver effectivement la non-existence de cette fonction : c'est ce que je vais faire. La solution géométrique du problème est ici achevée, cette dernière recherche appartenant exclusivement à la théorie des fonctions elliptiques.

11. Je ferai usage des notations employées par M. Weierstrass, en introduisant la fonction $\wp(u)$. On pose

$$\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)=e_1,\quad \wp\left(\frac{\varpi+\varpi'}{2}\right)=e_2,\quad \wp\left(\frac{\varpi'}{2}\right)=e_3.$$

La somme de ces trois constantes est nulle :

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

On pose en outre

$$g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1),$$
$$g_3=4e_1e_2e_3,$$

et l'on a de la sorte

$$\wp'^2(u)=4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3. \tag{14}$$

L'équation dont dépend la division des périodes par 3 se trouve aisément de diverses manières. Il est tout naturel ici de la chercher par la propriété des points d'inflexion, en observant qu'une cubique est ainsi représentée :

$$\frac{x_1}{x_3}=\wp(u),\quad \frac{x_2}{x_3}=\wp'(u).$$

De là résulte pour le déterminant Δ l'expression

$$\Delta=\wp''^2(u)-\wp'(u)\wp'''(u).$$

De (14) on tire successivement

$$\wp''=6\wp^2-\frac{1}{2}g_2,$$
$$\wp'''=12\wp\wp'.$$

Substituant dans Δ et égalant à zéro le résultat, on a pour déterminer $\wp(v)$ l'équation du quatrième degré

$$F(x)=12x^4-6g_2x^2-12g_3x-\frac{1}{4}g_2^2=0. \tag{15}$$

Les quatre racines fournissent huit valeurs de v, égales et de signes opposés deux à deux, à quoi il faut joindre la neuvième valeur $v = 0$.

On remarquera que la dérivée du polynôme $F(x)$ est

$$(16)\qquad \begin{cases} F'(x) = 12(4x^3 - g_2 x - g_3) \\ \qquad = 48(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) = 12\wp'^2, \end{cases}$$

relation dont la raison est facile à trouver et qui va tout à l'heure être utile.

Je distinguerai les arguments v par de doubles indices, en posant

$$v_{m,n} = \frac{m\varpi}{3} + \frac{n\varpi'}{3}.$$

J'ai précédemment désigné par h une des trois demi-périodes; je conserve cette notation et je désigne par e celle des trois quantités e_1, e_2, e_3 qui correspond à la même demi-période, par e', e'' les deux autres.

Les arguments w sont définis comme la somme de h et d'un quelconque des arguments v. Je les distingue par les indices correspondants en posant

$$(17)\qquad w_{m,n} = v_{m,n} + h,$$

et, comme h est une demi-période, on a simultanément, pour

$$m + m' = 3, \quad n + n' = 3,$$

$$v_{m,n} \equiv - v_{m',n'}, \quad w_{m,n} \equiv - w_{m',n'}, \quad \wp(w_{m,n}) = \wp(w_{m',n'}).$$

Pour former $\wp(w)$ j'emploie, suivant la définition (17), la formule d'addition

$$\wp(v+u) = \frac{2\wp(v)\wp(u)[\wp(v)+\wp(u)] - \frac{1}{2}g_2[\wp(v)+\wp(u)] - g_3 - \wp'(v)\wp'(u)}{2[\wp(u)-\wp(v)]^2}.$$

Ici v sera l'un des arguments $v_{m,n}$, et $\wp(v)$ l'une des racines x de (15); u sera h, $\wp(u)$ sera e, et, suivant (14), $\wp'(u)$ sera nul. J'ai ainsi

$$\wp(w) = \frac{2e(x+e) - \frac{1}{2}g_2(x+e) - g_3}{2(x-e)^2},$$

expression qui se simplifie par suppression d'un facteur commun $(x - e)$ dans les deux termes de la fraction. J'écris donc

$$\wp(w) = \frac{2ex + \frac{1}{2}g_2 + \frac{g_3}{e}}{2(x-e)},$$

puis, multipliant les deux termes par $(x - e')(x - e'')$ et tenant compte de (16), j'obtiens

$$\wp(w) = 24\,\frac{(x-e')(x-e'')\left(2ex + \frac{1}{2}g_2 + \frac{g_3}{e}\right)}{F'(x)}.$$

J'envisage cette même expression pour les quatre racines x de $F(x)$ et je fais la somme

$$\Sigma\wp(w) = 4e.$$

Pour abréger, j'écris $p_{m,n}$ pour $\wp(w_{m,n})$, en sorte que cette dernière relation devient

$$(18) \qquad p_{10} + p_{01} + p_{11} + p_{12} = 4p_{00}.$$

Cette égalité (18) va me permettre de prouver la non-existence de la fonction $\varphi(u)$, à laquelle je reviens maintenant.

12. Désignons par $\zeta(u)$ la fonction qui sert d'élément simple et dont la dérivée est $-\wp(u)$. D'après sa définition, la fonction $\varphi(u)$ a la forme

$$\varphi(u) = C + \Sigma B_{m,n}\zeta(u - w_{m,n}),$$

où la somme des coefficients B doit être nulle. J'en déduis

$$-\varphi'(u) = \Sigma B_{m,n}\wp(u - w_{m,n}).$$

Faisant ici $u = v_{k,l}$, je dois, suivant les conditions imposées à $\varphi(u)$, avoir zéro pour résultat. J'obtiens ainsi neuf équations qui comprennent celle-ci, $\Sigma B = 0$. C'est donc en tout neuf équations homogènes entre neuf inconnues, et il me faut prouver qu'effectivement ces équations ne peuvent être satisfaites autrement qu'en faisant nulles les neuf inconnues.

Je désigne par (k, l) l'équation obtenue en égalant à zéro $\varphi'(v_{k,l})$. L'argument $w_{m,n} - v_{k,l}$ coïncide avec $w_{m-k,n-l}$. L'équation (k, l)

est donc

$$(k,\, l) \qquad o = \Sigma B_{m,n} p_{m-k,n-l}.$$

Posons pour un instant

$$\begin{array}{ll} z_1 = p_{00} + p_{01} + p_{02}, & y_1 = B_{00} + B_{01} + B_{02}, \\ z_2 = p_{10} + p_{11} + p_{12}, & y_2 = B_{10} + B_{11} + B_{12}, \\ z_3 = p_{20} + p_{21} + p_{22}, & y_3 = B_{20} + B_{21} + B_{22}. \end{array}$$

Ajoutons membre à membre les équations (00), (01), (02); ajoutons de même (20), (21), (22), et aussi (10), (11), (12). Nous avons ainsi le système

$$\begin{array}{l} z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 = o, \\ z_2 y_1 + z_3 y_2 + z_1 y_3 = o, \\ z_3 y_1 + z_1 y_2 + z_2 y_3 = o, \end{array}$$

à quoi nous pouvons joindre

$$y_1 + y_2 + y_3 = o.$$

Comme on le voit sans peine, ce système n'admet que la solution $y_1 = y_2 = y_3 = o$, sauf si l'on a, en prenant pour ω une racine cubique *imaginaire* de l'unité :

$$(19) \qquad z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = o.$$

D'ailleurs ici $z_2 = z_3$, et cette relation (19) devient

$$p_{00} + 2p_{01} - p_{10} - p_{11} - p_{12} = o,$$

qui ne peut avoir lieu. Effectivement, à cause de (18), elle se réduit à $p_{00} = p_{01}$, ce qui est certainement inexact. J'ai donc zéro pour chacun des y. Ainsi

$$(20) \qquad \begin{cases} B_{00} + B_{01} + B_{02} = o, \\ B_{10} + B_{11} + B_{12} = o, \\ B_{20} + B_{21} + B_{22} = o. \end{cases}$$

Il y a d'autres conséquences analogues; on les obtiendra par des combinaisons qu'il n'est pas nécessaire de rechercher. Il suffit d'échanger les périodes ϖ, ϖ', puis de changer le système de périodes ϖ, ϖ' en ces deux équivalents $(\varpi,\, \varpi + \varpi')$, $(\varpi,\, 2\varpi + \varpi')$.

Tous les autres changements conduisent aux mêmes équations :

$$(21)\qquad \begin{cases} B_{00}+B_{10}+B_{20}=0, \\ B_{01}+B_{11}+B_{21}=0, \\ B_{02}+B_{12}+B_{22}=0, \end{cases}$$

$$(22)\qquad \begin{cases} B_{00}+B_{11}+B_{22}=0, \\ B_{10}+B_{21}+B_{02}=0, \\ B_{20}+B_{01}+B_{12}=0, \end{cases}$$

$$(23)\qquad \begin{cases} B_{00}+B_{21}+B_{12}=0, \\ B_{10}+B_{01}+B_{22}=0, \\ B_{20}+B_{11}+B_{02}=0. \end{cases}$$

Ces douze équations se réduisent à neuf en tout, entièrement équivalentes aux neuf équations (k, l).

Des deux dernières (20) et de la première (22) je déduis

$$B_{10}+B_{20}+B_{12}+B_{21}-B_{00}=0,$$

et, à cause de la première (21),

$$B_{12}+B_{21}-2B_{00}=0.$$

Eu égard à la première équation (23), j'ai ainsi

$$B_{00}=0, \quad B_{12}+B_{21}=0.$$

Semblablement,

$$B_{11}+B_{22}=0, \quad B_{10}+B_{20}=0, \quad B_{01}+B_{02}=0.$$

L'élimination, devenue très facile, conduit ainsi à trouver nulles toutes les inconnues B.

Donc la fonction $\varphi(u)$ n'existe pas : c'est ce qu'il fallait définitivement prouver.