BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MICHEL BONY
JEAN-YVES CHEMIN

Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 1 (1994), p. 77-118
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_1_77_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 77–118.

ESPACES FONCTIONNELS ASSOCIÉS AU CALCUL DE WEYL-HÖRMANDER

PAR

JEAN-MICHEL BONY ET JEAN-YVES CHEMIN (*)

RÉSUMÉ. — Étant donnée une métrique de Hörmander g sur l'espace des phases, on associe à chaque poids M un espace de Hilbert $H(M,g)$ dont les propriétés généralisent celles des espaces de Sobolev classiques. On démontre pour tout M l'existence d'opérateurs pseudo-différentiels inversibles de poids M et on étudie les relations entre l'inversibilité en tant qu'opérateurs entre ces « espaces de Sobolev » et l'inversibilité au sens du calcul symbolique.

ABSTRACT. — Given a Hörmander metric g on the phase space, we define for each weight function M a Hilbert space $H(M,g)$ whose properties generalize those of the classical Sobolev spaces. We prove that invertible pseudo-differential operators of weight M exist for each M and we discuss relations between invertibility in the operator theorical sense and invertibility in the algebra of the pseudo-differential operators.

La quantification de Weyl permet d'associer un opérateur a^w, agissant dans $\mathbb{R}^n$ à une fonction a (le symbole de a^w) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^{2n}$. Pour des symboles appartenant aux classes très générales $S(M,g)$ introduites par Hörmander — classes associées à une métrique g et à un poids M sur l'espace des phases — les opérateurs correspondants jouissent de bonnes propriétés, de composition notamment, et on dispose d'un calcul symbolique très efficace décrit dans la section 18.5 de [Hö].

L'objet principal de cet article est d'associer aux mêmes données M et g des espaces de distributions $H(M,g)$ dans $\mathbb{R}^n$, dits *espaces de Sobolev*, dont les propriétés généralisent celles des espaces de Sobolev classiques : ces espaces sont hilbertiens et forment une famille stable par interpolation,

(*) Texte reçu le 24 septembre 1992, révisé le 1 mars 1993.
J.-M. BONY et J.-Y. CHEMIN, Centre de mathématiques, École Polytechnique, 91405 Palaiseau Cedex France.
Email : bony (resp. chemin) @orphee.polytechnique.fr..
Classification AMS : 35S05.

© Société mathématique de France

les opérateurs pseudo-différentiels de poids M appliquent $H(M_1, g)$ dans $H(M_1/M, g)$, une distribution tempérée u appartient à $H(M, g)$ si et seulement si $a^w u \in L^2 = H(1, g)$ pour tous les symboles $a \in S(M, g)$, etc.

Pour ce faire, nous aurons à étudier deux problèmes qui ont leur intérêt propre. Le premier est une caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels A de poids M ne faisant intervenir que le caractère borné sur L^2 de commutateurs localisés de A. Le second est l'existence pour chaque M d'opérateurs pseudo-différentiels inversibles de poids M.

Plusieurs travaux ont été déjà consacrés à ce problème. A. UNTERBERGER [Un], F. BRUYANT [Br] et N. LERNER [Lle] ont considéré le cas d'une métrique g symplectique (c'est-à-dire telle que $g = g^\sigma$, voir (4)), vérifiant en outre une propriété très voisine de la *tempérance forte* que nous introduisons dans la section 7. Ces auteurs obtiennent alors, par des méthodes exploitant systématiquement le caractère symplectique de la métrique, toutes les propriétés que nous démontrons dans cet article.

Un article de R. BEALS [Beals] considère le cas de métriques « presque » générales (où la condition de tempérance de Hörmander est toutefois légèrement renforcée). Malheureusement, un des arguments de sa démonstration (le LEMME 4.6) est incorrect, ce qui laisse une lacune dans la preuve d'une grande partie des résultats. Cela dit, ses démonstrations fournissent les résultats fondamentaux dans le cas symplectique. D'autre part, plusieurs idées sont très ingénieuses et, à plusieurs reprises, nous les reprendrons ou nous en inspirerons plus ou moins directement.

L'article est organisé de la façon suivante. La première section est consacrée à un minimum de rappels sur le calcul de Weyl-Hörmander : quantification de Weyl, opération # de composition des symboles, hypothèses faites sur la métrique et les poids, classes de symboles, etc.

Le concept de confinement des symboles, introduit dans [B&L], jouera un rôle crucial dans la suite. Dans la seconde section, nous définissons les espaces de symboles confinés dans une boule de la métrique g. Plus grands que les espaces de symboles à support dans la boule, ils jouissent de bien meilleures propriétés de stabilité par composition. Ils permettent de faire une étude aussi locale que possible dans l'espace des phases, compte tenu du principe d'incertitude.

Nous nous sommes efforcés de donner dans la section 2 un résumé des propriétés établies dans [B&L] que nous utiliserons, renvoyant bien entendu à cet article pour les démonstrations. Nous attirons l'attention du lecteur sur l'importance des arguments d'uniformité (par rapport à la boule et même par rapport à la métrique) dans la suite, ce qui exige de préciser avec soin de quelles quantités les « constantes » (ne) dépendent (pas).

Dans la section 3, nous démontrons qu'un symbole a confiné dans une boule peut se décomposer en une série rapidement convergente $a = \sum b_\nu \# c_\nu$ de produits de symboles confinés dans une boule homothétique (avec bien entendu un contrôle uniforme des semi-normes). Ce résultat jouera un rôle essentiel par la suite, en permettant notamment d'écrire le symbole 1 comme une intégrale, Y parcourant l'espace des phases, de (sommes de) produits $\psi_{Y,\nu} \# \theta_{Y,\nu}$ de symboles confinés dans des boules centrées en Y.

Nous introduisons les espaces de Sobolev dans la section 4. Une distribution tempérée u appartient à $H(M,g)$ si une intégrale à poids des $\|\theta_{Y,\nu}u\|_{L^2}^2$ est finie, cette définition rappelant la caractérisation classique des espaces H^s en théorie de Littlewood-Paley. En lisant les démonstrations de la PROPOSITION 4.3 et des THÉORÈMES 4.5 et 4.7, le lecteur se convaincra de l'importance des décompositions de l'identité en intégrale de produits de symboles confinés.

Nous démontrons dans cette section que la définition ne dépend pas du choix de la décomposition de l'identité, que $H(1,g) = L^2$ et que les opérateurs pseudo-différentiels de poids M appliquent $H(M_1,g)$ dans $H(M_1/M,g)$. Nous obtenons également un résultat d'inclusion des espaces $H(M,g)$ dans des espaces L^p à poids qui généralise les théorèmes d'inclusion de Sobolev. Par contre, le lecteur devra attendre le COROLLAIRE 6.7 pour savoir qu'une distribution tempérée u appartient à $H(M,g)$ si et seulement si $a^w u$ appartient à L^2 pour tout $a \in S(M,g)$, et pour savoir que le dual de $H(M,g)$ est $H(M^{-1},g)$.

Dans la section 5, nous caractérisons les opérateurs A de la forme a^w avec $a \in S(M,g)$ par la propriété suivante : les opérateurs localisés $\theta_{Y,\nu}^w \circ A$, ainsi que leurs commutateurs itérés avec les opérateurs dont le symbole est linéaire, sont bornés sur L^2 avec une norme convenablement majorée en fonction de Y. D'apparence plus compliquée que la caractérisation classique des opérateurs des classes $S^m_{\rho,0}$, la propriété ci-dessus s'avérera en fait très maniable. Grâce à la souplesse de la notion de confinement, la démonstration se ramène à une relecture — avec contrôle des constantes — de la démonstration de R. BEALS relative à la classe $S^0_{0,0}$.

La définition classique des espaces de Sobolev H^s fait appel aux opérateurs $(I-\Delta)^{s/2}$. Le résultat principal de la section 6 est l'existence, pour tout poids M, d'un groupe à un paramètre $t \mapsto b_t$ avec $b_t \in S(M^t,g)$. Ces groupes sont obtenus en résolvant l'équation différentielle $\mathrm{d}b_t/\mathrm{d}t = \alpha \# b_t$ où α est un symbole « comparable » à $\log M$ et la caractérisation de la section précédente joue un rôle essentiel. Cela implique notamment l'existence de $a \in S(M,g)$ et $a' \in S(M^{-1},g)$ avec $a \# a' = a' \# a = 1$. On en déduit très facilement les propriétés des espaces de Sobolev non encore démontrées dans la section 4.

La dernière section est consacrée au problème suivant : un opérateur pseudo-différentiel inversible en tant qu'opérateur entre espaces de Sobolev est-il inversible dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels ? Nous ne savons pas répondre en général à cette question, mais nous introduisons une condition portant sur la métrique qui garantit une réponse positive. Cette condition, plus forte que la tempérance, est notamment vérifiée dans le cas des métriques de type (ρ,δ).

On trouvera dans [C&C&X] une application des résultats ci-dessus à l'étude des parametrix des opérateurs sous-elliptiques.

1. Classes de symboles

La quantification de Weyl associe un opérateur a^w à une fonction $a(X)$, définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^{2n}_X = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, par la formule

$$a^w u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\big(\tfrac{1}{2}(x+y),\xi\big)u(y)\,\frac{dy\,d\xi}{(2\pi)^n}\cdot \tag{1}$$

On note $[X,Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$ la forme symplectique, et $\#$ l'opération de composition des symboles, définie par $(a\# b)^w = a^w\circ b^w$. On a :

$$a\# b(X) = \pi^{-2n}\iint e^{-2i[X-Y_1,X-Y_2]}a(Y_1)b(Y_2)\,dY_1\,dY_2. \tag{2}$$

Une *métrique de Hörmander* g est la donnée, pour chaque $X\in\mathbb{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\,\cdot\,)$ dépendant mesurablement de X et vérifiant les trois hypothèses ci-dessous.

- *Lenteur.* — Il existe $\overline{C}>0$ tel que l'on ait

$$g_X(X-Y)\le \frac{1}{\overline{C}} \implies \left(\frac{g_Y(\,\cdot\,)}{g_X(\,\cdot\,)}\right)^{\pm 1}\le \overline{C}. \tag{3}$$

- *Principe d'incertitude.* — On a $g_X(\,\cdot\,)\le g^\sigma_X(\,\cdot\,)$, où la métrique g^σ est définie par

$$g^\sigma_X(T) = \sup_{W\neq 0}\frac{[T,W]^2}{g_X(W)}\cdot \tag{4}$$

- *Tempérance.* — Il existe $\overline{C}>0$ et $\overline{N}\in\mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\left(\frac{g_Y(\,\cdot\,)}{g_X(\,\cdot\,)}\right)^{\pm 1}\le \overline{C}\big(1+g^\sigma_Y(Y-X)\big)^{\overline{N}}. \tag{5}$$

Un *poids admissible* pour g est une fonction M strictement positive définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant, pour $\widetilde{C}$ et $\widetilde{N}$ convenables :

$$\left(\frac{M(Y)}{M(X)}\right)^{\pm 1} \leq \widetilde{C} \quad \text{pour} \quad g_X(X-Y) \leq \frac{1}{\widetilde{C}}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{M(Y)}{M(X)}\right)^{\pm 1} \leq \widetilde{C}\big(1+g_Y^\sigma(Y-X)\big)^{\widetilde{N}}. \tag{7}$$

Nous pouvons maintenant définir les *classes de symboles* $S(M,g)$ associées à une métrique de Hörmander et à un poids admissible. Une fonction $a(X)$ appartient à $S(M,g)$ si a est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{2n}$ et si les semi-normes suivantes sont finies,

$$\|a\|_{k\,;\,S(M,g)} = \sup_{\substack{\ell\leq k\,;\,X\in\mathbb{R}^{2n}\\ g_X(T_j)\leq 1}} \frac{\big|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_\ell}a(X)\big|}{M(X)},$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a\mapsto\langle da,T\rangle$.

Les hypothèses précédentes garantissent que, pour $a\in S(M,g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même et, si $M=1$, de L^2 dans lui-même. En outre, l'adjoint formel de a^w est $\bar{a}^w$ et les classes $S(M,g)$ forment une algèbre graduée (par le groupe multiplicatif des poids M) pour l'opération $\#$. La remarque 2.8 ci-dessous précisera le caractère uniforme de ces résultats.

2. Confinement

Nous rappelons ici le concept de confinement et ses propriétés fondamentales pour lesquelles nous renvoyons aux quatre premières sections de [B&L]. La métrique de Hörmander g étant fixée, on note $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y-X)\leq r^2\}$. On supposera toujours $r^2<\overline{C}^{-1}$, où $\overline{C}$ est la constante de lenteur figurant dans (3).

DÉFINITION 2.1. — L'espace des *symboles confinés* dans $U_{Y,r}$, noté $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ (ou $\mathrm{Conf}(Y)$ lorsque le contexte est clair) est l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes suivantes

$$\|a\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)} = \sup_{\substack{\ell\leq k\,;\,X\in\mathbb{R}^{2n}\\ g_Y(T_j)\leq 1}} \big|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_\ell}a(X)\big|\big(1+g_Y^\sigma(X-U_{Y,r})\big)^{k/2}.$$

Une famille de symboles $(a_{Y,\lambda})$, indexée par Y et (éventuellement) par un autre paramètre λ, sera dite *uniformément confinée* dans les $U_{Y,r}$ si les $\|a_{Y,\lambda}\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y et de λ.

Par exemple, une famille de symboles (a_Y) à support dans $U_{Y,r}$ qui est bornée dans $S(1,g)$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$.

2.2 Décomposition intégrale des symboles.

Nous rappelons l'existence de *g-partitions de l'unité* [B&L, th. 3.1.3]. Il s'agit d'une famille bornée dans $S(1,g)$ de fonctions φ_Y à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi_Y |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y = 1, \tag{8}$$

en notant $|g_Y|$ le déterminant de la forme quadratique g_Y.

En posant $a_Y = M(Y)^{-1} a \varphi_Y$, pour $a \in S(M,g)$, on peut ainsi écrire a comme une intégrale

$$a(X) = \int M(Y) a_Y(X) |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y \tag{9}$$

où les a_Y sont uniformément confinés. Plus précisément, on a

$$\forall k,\ \exists C,\ \forall Y, \quad \|a_Y\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \le C \|a\|_{k\,;\,S(M,g)}. \tag{10}$$

Réciproquement, si a_Y est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (9) est convergente et définit un élément de $S(M,g)$. On a en outre :

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists \ell \quad \|a\|_{k\,;\,S(M,g)} \le C \sup_Y \|a_Y\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)}. \tag{11}$$

2.3. La fonction Δ_r.

Nous noterons $\Delta_r(X,Y)$ la quantité suivante, qui exprime l'éloignement (pour g^σ) de deux g-boules,

$$\Delta_r(X,Y) = 1 + \sup\Big\{ g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}),\, g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) \Big\}.$$

en posant :

$$g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf\Big\{ g_X^\sigma(X' - Y') \mid X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r} \Big\}.$$

Une conséquence facile de la tempérance est que Δ_r est logarithmiquement équivalente à la quantité obtenue en remplaçant sup par inf dans sa définition : il existe C et N tels que l'on ait

$$\Delta_r(X,Y) \le C\Big(1+\inf\{g_X^\sigma(U_{X,r}-U_{Y,r}), g_Y^\sigma(U_{X,r}-U_{Y,r})\}\Big)^N. \tag{12}$$

La métrique étant définie sur tout $\mathbb{R}^{2n}$, la fonction Δ_r est aussi logarithmiquement équivalente à la fonction $\delta_r(X,Y)$ introduite dans [B&L] (voir les formules (3.1.11) et (3.2.3) ainsi que la remarque 3.1.2), si bien que l'on a :

$$\exists C,\ \exists N,\ \forall X,\quad \int_{\mathbb{R}^{2n}} \Delta_r(X,Y)^{-N} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y \le C. \tag{13}$$

2.4. Remarque. — Il résulte de la lenteur et de la tempérance que l'on peut remplacer $(1+g_Y^\sigma(Y-X))$ par $\Delta_r(X,Y)$, quitte à modifier les constantes, dans les membres de droite de (5) et de (7).

2.5. Estimations de composition.

L'intérêt principal du concept de confinement est sa stabilité par composition, « avec gain de Δ_r », exprimée par le théorème suivant (voir [B&L, th. 3.2.1]).

THÉORÈME 2.6 (de biconfinement). — *On a l'estimation suivante, où X et Y appartiennent à $\mathbb{R}^{2n}$ et où a et b sont des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$:*

$$\begin{aligned}(14)\quad & \forall k,\ \forall N,\ \exists \ell,\ \exists C,\\ & \|a\#b\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)} + \|a\#b\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Z,r)}\\ &\qquad \le C\|a\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)}\|b\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(g,Z,r)}\Delta_r(Y,Z)^{-N}.\end{aligned}$$

En particulier, si (a_Y) et (b_Y) sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$, pour chaque entier N, la famille des $\Delta_r(Y,Z)^N a_Y \# b_Z$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

On a également les estimations suivantes sur le composé d'un élément de $S(M,g)$ avec un symbole confiné ou avec un élément de $S(M',g)$ (voir le théorème 4.2.2 (c) et la remarque 4.2.6 de [B&L]) :

$$\begin{aligned}(15)\quad & \forall k,\ \exists C,\ \exists \ell,\\ & \|a\#b\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \le CM(Y)\|a\|_{\ell\,;\,S(M,g)}\|b\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(16)\quad & \forall k,\ \exists C,\ \exists \ell,\\ & \|a\#b\|_{k\,;\,S(MM',g)} \le C\|a\|_{\ell\,;\,S(M,g)}\|b\|_{\ell\,;\,S(M',g)}.\end{aligned}$$

2.7. Estimations L^2.

Nous utiliserons enfin les propriétés suivantes (voir [B&L, prop. 2.4.1 et th. 4.2.2 (b)])

$$\exists C,\ \exists k,\quad \|a^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\|a\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)}, \tag{17}$$

$$\exists C,\ \exists k,\quad \|a^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C\|a\|_{k\,;\,S(1,g)}. \tag{18}$$

2.8. Remarque importante.

Les constantes intervenant dans (12), (13), (14), (17) et (18) ne dépendent de g que par l'intermédiaire des constantes $\overline{C}$ et $\overline{N}$ de (3) et (5). Cela résulte directement des énoncés de [B&L] où leurs expressions sont explicitées.

En particulier, pour la famille des métriques constantes (c'est-à-dire telles que les g_X ne dépendent pas de X), on a $\overline{C} = \overline{N} = 1$, et les constantes peuvent être choisies indépendamment de g.

De même, les constantes intervenant dans (10) (à condition de choisir la partition de l'unité définie par le procédé systématique du théorème 3.1.3 de [B&L]), dans (11), (15) et (16) ne dépendent que de $\overline{C}$, de $\overline{N}$ et des constantes $\widetilde{C}$ et $\widetilde{N}$ de (6) et (7) relatives aux poids qui y figurent.

3. Décomposition des symboles confinés

Un résultat de R. Beals [Be] assure que tout $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ peut se décomposer sous la forme $a = b \# c$, où b et c appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. En outre, dans le cas où la métrique g est symplectique ($g = g^\sigma$), on déduit facilement de sa démonstration un contrôle des semi-normes de confinement de b et c à partir de celles de a.

Nous allons dans le cas général, en précisant les arguments de [B&L, prop. 6.1.1], obtenir une décomposition des symboles confinés un peu plus compliquée, mais qui nous rendra les mêmes services.

Théorème 3.1. — *Il existe une constante C telle que, pour tout r assez petit et toute famille (a_Y) uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, il existe des fonctions $b_{Y,\nu}$ et $c_{Y,\nu}$ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$, pour $Y \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\nu \in \mathbb{N}$, telles que l'on ait*

$$a_Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{Y,\nu} \# c_{Y,\nu},$$

et que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les familles $(1+\nu)^N b_{Y,\nu}$ et $(1+\nu)^N c_{Y,\nu}$ soient uniformément confinées dans les $U_{Y,Cr}$.

On peut en fait prendre comme constante C n'importe quel nombre > 1 (voir la remarque 3.3).

En notant que les espaces $\mathrm{Conf}(g, Y, r)$ et $\mathrm{Conf}(g_Y, Y, r)$ sont identiques par définition, on voit qu'il suffit de démontrer un résultat de décomposition pour une métrique fixe ($\gamma = g_Y$) et une boule de cette métrique (que l'on pourra supposer centrée à l'origine), à condition d'avoir un contrôle des semi-normes indépendant de γ. C'est ce qu'exprime le lemme suivant.

LEMME 3.2. — *Il existe une constante $C > 1$ et, pour tout $r > 0$ et toute suite (M_k) de nombres positifs, des suites $M'_{k,N}$, $N \in \mathbb{N}$ telles que l'on ait la propriété suivante. Soit γ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $\gamma \leq \gamma^\sigma$ et soit $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ vérifiant $\|a\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} \leq M_k$ pour tout k. Il existe alors des b_ν et des c_ν appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ tels que l'on ait $a = \sum_\nu b_\nu \# c_\nu$ et*

$$(1+\nu)^N \|b_\nu\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,Cr)} \leq M'_{k,N},$$

$$(1+\nu)^N \|c_\nu\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,Cr)} \leq M'_{k,N}.$$

La formule (2) peut s'interpréter ainsi : l'application $\#$ qui au couple (b, c) fait correspondre $b \# c$ se décompose de la manière suivante

$$\# = \rho \circ V \circ \tau,$$

- où τ est l'application de produit tensoriel de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}))^2$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$,
- où V est l'opérateur unitaire appliquant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ dans lui-même défini par

$$Vf(X_1, X_2) = \pi^{-2n} \iint \mathrm{e}^{-2i[X_1 - Y_1, X_2 - Y_2]} f(Y_1, Y_2)\, \mathrm{d}Y_1\, \mathrm{d}Y_2,$$

- où ρ est l'application de restriction à la diagonale, appliquant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

La stratégie de démonstration du LEMME 3.2 est alors claire : le symbole a étant donné, on construit d'abord $g(X_1, X_2)$ tel que $g(X, X) = a(X)$, on pose ensuite $f = V^{-1}g = V^* g$ et il ne reste plus qu'à décomposer f sous la forme $f(X_1, X_2) = \sum_\nu b_\nu(X_1) c_\nu(X_2)$ pour avoir le résultat, en contrôlant bien entendu les semi-normes de confinement indépendamment de γ.

Première étape. — On choisit une fois pour toutes une fonction $\Phi(t)$ appartenant à $C_0^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $]-1, 1[$ et égale à 1 au voisinage de l'origine, et on pose :

$$g(X_1, X_2) = a\big(\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\big)\Phi\Big(\frac{\gamma(X_1 - X_2)}{r^2}\Big).$$

Il est facile de voir que pour $\ell \leq k$, l'on a des estimations du type suivant, avec $r' = 2r$,

$$\tag{19} \begin{aligned} &\left|\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} g(X_1, X_2)\right| \\ &\qquad \leq \overline{M}_k \big(1 + \gamma^\sigma(X_1 - U_{r'})\big)^{-k} \big(1 + \gamma^\sigma(X_2 - U_{r'})\big)^{-k} \end{aligned}$$

où les T_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}_{X_1}$ ou de $\mathbb{R}^{2n}_{X_2}$ vérifiant $\gamma(T_j) \leq 1$, les constantes $\overline{M}_k$ ne dépendant que de r et des M_k.

Seconde étape : l'opérateur V^* respecte les estimations (19). — On pose

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) &= V^* g(X_1, X_2) \\ &= \pi^{-2n} \iint e^{2i[X_1 - Y_1, X_2 - Y_2]} g(Y_1, Y_2)\, \mathrm{d}Y_1\, \mathrm{d}Y_2, \end{aligned}$$

et il faut montrer que f vérifie des estimations du type (19). Remarquons d'abord que $\partial_{T_j} V^* g = V^* \partial_{T_j} g$, et qu'il suffit donc d'établir ces estimations dans le cas $\ell = 0$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $\gamma(\theta) = 1$ et $[\theta, Y_1 - X_1] = \gamma^\sigma(Y_1 - X_1)^{1/2}$. En intégrant par parties par rapport à Y_2 dans la direction de θ, on obtient

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) = \pi^{-2n} \iint e^{2i[X_1 - Y_1, X_2 - Y_2]} & g^{(N)}(Y_1, Y_2) \\ & \big(1 + \gamma^\sigma(Y_1 - X_1)\big)^{-N/2} \mathrm{d}Y_1\, \mathrm{d}Y_2, \end{aligned}$$

où on a posé $g^{(N)} = (1 + \theta \cdot \partial_{Y_2}/2i)^N g$. On obtient donc les estimations suivantes, où pour chaque N la constante C_N ne dépend que de la suite des $\overline{M}_k$,

$$\begin{aligned} \left|f(X_1, X_2)\right| \leq C_N \iint \big(1 + \gamma^\sigma(Y_1 - X_1)\big)^{-N/2} & \big(1 + \gamma^\sigma(Y_1 - U_{r'})\big)^{-N/2} \\ & \big(1 + \gamma^\sigma(Y_2 - U_{r'})\big)^{-N/2} \mathrm{d}Y_1\ \mathrm{d}Y_2. \end{aligned}$$

En minorant $(1+\gamma^\sigma(Y_1 - U_{r'}))(1+\gamma^\sigma(Y_1 - X_1))$ par $\frac{1}{4}(1+\gamma^\sigma(X_1 - U_{r'}))$, en minorant γ^σ par γ et en choisissant $N = 4k + 2n + 2$, on en déduit :

$$\begin{aligned} &\left|f(X_1, X_2)\right| \leq C'_N \big(1 + \gamma^\sigma(X_1 - U_{r'})\big)^{-2k} \\ &\qquad \iint \big(1 + \gamma^\sigma(Y_1 - X_1)\big)^{-n-1} \big(1 + \gamma(Y_2 - U_{r'})\big)^{-n-1} \mathrm{d}Y_1\, \mathrm{d}Y_2. \end{aligned}$$

Les déterminants de γ et γ^σ étant inverses l'un de l'autre, l'intégrale ci-dessus est indépendante de γ et ne dépend que de r'.

En échangeant les rôles de X_1 et X_2, on obtient également une décroissance en $(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'}))^{-2k}$. En prenant la moyenne géométrique de ces estimations, il vient

$$|f(X_1,X_2)| \le \widetilde{M}_k\big(1+\gamma^\sigma(X_1-U_{r'})\big)^{-k}\big(1+\gamma^\sigma(X_2-U_{r'})\big)^{-k}, \tag{20}$$

où la suite des $\widetilde{M}_k$ dépend des M_k initiaux et de r, mais pas de γ.

Fin de la démonstration du lemme 3.2. — On choisira des coordonnées symplectiques de $\mathbb{R}^{2n}$ de telle sorte que l'on ait $\gamma = \sum_1^n \mathrm{d}x_i^2/a_i^2 + \mathrm{d}\xi_i^2/a_i^2$ avec $a_i \ge 1$. On notera A l'application $(x_i,\xi_i) \mapsto (x_i/a_i, \xi_i/a_i)$ qui applique isométriquement $\mathbb{R}^{2n}$ muni de γ sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$, on note $\widetilde{Q}_0$ le cube de demi-côté $2r'$ centré à l'origine et Δ le réseau $(2r'\mathbb{Z})^{2n}$. On fixe une partition de l'unité C^∞ de la forme $1 = \sum_{\delta\in\Delta}\widetilde{\varphi}(\,\cdot-\delta)$ où le support de $\widetilde{\varphi}$ est un compact de $\widetilde{Q}_0$. On se donne également $\widetilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ à support dans $\widetilde{Q}_0$ et égale à 1 sur le support de $\widetilde{\varphi}$. Pour $\delta \in \Delta$, on pose :

$$\widetilde{Q}_\delta = \widetilde{Q}_0 + \delta, \quad \widetilde{\varphi}_\delta(X) = \widetilde{\varphi}(X-\delta), \quad \widetilde{\psi}_\delta(X) = \widetilde{\psi}(X-\delta).$$

Dans l'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la métrique γ, on pose enfin

$$Q_\delta = A^{-1}(\widetilde{Q}_\delta), \quad \varphi_\delta = \widetilde{\varphi}_\delta \circ A, \quad \psi_\delta = \widetilde{\psi}_\delta \circ A.$$

Cela permet de décomposer la fonction f sous la forme

$$f = \sum_{\delta_1,\delta_2\in\Delta} h_{\delta_1,\delta_2}$$

avec $h_{\delta_1,\delta_2}(X_1,X_2) = f(X_1,X_2)\varphi_{\delta_1}(X_1)\varphi_{\delta_2}(X_2)$. Pour $\ell \le N$, on a les estimations suivantes, où les T_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}_{X_1}$ ou de $\mathbb{R}^{2n}_{X_2}$ vérifiant toujours la condition $\gamma(T_j) \le 1$,

$$\begin{aligned} &\big\|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_\ell} h_{\delta_1,\delta_2}\big\|_{L^\infty} \\ &\qquad \le C_N\big(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_1}-Q_0)\big)^{-N}\big(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_2}-Q_0)\big)^{-N} \end{aligned} \tag{21}$$

où les C_N dépendent de la suite des $\widetilde{M}_k$ et de r', mais pas de γ.

Il ne reste plus qu'à développer en série de Fourier les fonctions h_{δ_1,δ_2} qui sont à support dans $Q_{\delta_1}\times Q_{\delta_2}$. On a

$$\begin{aligned} h_{\delta_1,\delta_2}(X_1,X_2) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{Z}^{2n}} & p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{r'}\langle\lambda_1,AX_1\rangle} \\ & \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{r'}\langle\lambda_2,AX_2\rangle}\psi_{\delta_1}(X_1)\psi_{\delta_2}(X_2), \end{aligned} \tag{22}$$

et on déduit des formules intégrales exprimant les coefficients de Fourier et des estimations (21) les majorations suivantes

$$
(23)\quad \left|p_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}\right| \le C'_N\big(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_1}-Q_0)\big)^{-N}\big(1+\gamma^\sigma(Q_{\delta_2}-Q_0)\big)^{-N} \\ \big(1+|\lambda_1|\big)^{-N}\big(1+|\lambda_2|\big)^{-N},
$$

les C'_N étant toujours indépendantes de γ. En posant

$$
(24)\qquad b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X) = p^{1/2}_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{r'}\langle\lambda_1,AX\rangle}\psi_{\delta_1}(X),
$$

$$
(25)\qquad c_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X) = p^{1/2}_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{r'}\langle\lambda_2,AX\rangle}\psi_{\delta_2}(X),
$$

il suffira ensuite de réindexer l'ensemble d'indices $\mathbb{Z}^{8n}$ par $\mathbb{N}$ pour obtenir $f=\sum_{\nu\in\mathbb{N}} b_\nu c_\nu$. Il reste à vérifier les estimations de confinement dans une boule centrée à l'origine pour ces fonctions.

Pour X et X' appartenant à Q_δ et $Y'\in Q_0$, on a $X'-Y'=X-Y$ avec $Y\in 3Q_0$. On a donc $\gamma^\sigma(Q_\delta-Q_0)\ge\gamma^\sigma(X-3Q_0)\ge\gamma^\sigma(X-U_{r''})$ pour $r''=6r'\sqrt{2n}$. D'autre part, les dérivées directionnelles ∂_T, pour $\gamma(T)\le 1$, de ψ_δ et de l'exponentielle dans (24) ne font apparaître que des constantes indépendantes de γ. On déduit donc de (23), en minorant γ^σ par γ, les estimations

$$
\big(1+\gamma^\sigma(X-U_{r''})\big)^p\big|\partial_{T_1}\cdots\partial_{T_\ell}b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}(X)\big| \\ \le C_{p,q}\big(1+\gamma(Q_{\delta_1}-Q_0)\big)^{-q}\big(1+\gamma(Q_{\delta_2}-Q_0)\big)^{-q} \\ \big(1+|\lambda_1|\big)^{-q}\big(1+|\lambda_2|\big)^{-q},
$$

pour $\ell\le p$ et $\gamma(T_j)\le 1$, les constantes $C_{p,q}$ étant toujours indépendantes de γ. Le membre de gauche exprime les semi-normes de confinement de $b_\nu=b_{\delta_1,\delta_2,\lambda_1,\lambda_2}$ dans la boule U_{Cr} avec $C=12\sqrt{2n}$. Quant au membre de droite, il exprime les propriétés de décroissance voulues en ν, une fois remarqué que l'on a, par l'isométrie A :

$$
1+\gamma(Q_{\delta_1}-Q_0)=1+\big|\widetilde{Q}_{\delta_1}-\widetilde{Q}_0\big|^2\sim(1+|\delta_1|)^2.
$$

Les estimations des c_ν étant identiques, cela achève la démonstration du LEMME 3.2.

3.3. Remarque. — En ce qui concerne la perte sur le rayon de confinement, la démonstration précédente a fourni la constante $C=12\sqrt{2n}$, mais cette valeur peut être remplacée par n'importe quelle constante $C' > 1$. En effet, on peut de manière canonique décomposer un symbole a confiné dans $U_{Y,r}$ en une somme finie de symboles a_j confinés dans des boules de rayon ε centrées en des points de $U_{Y,r}$ (voir [B&L, lemme 2.1.2]). La décomposition précédente $a_j = \sum b_{j,\nu} \# c_{j,\nu}$ fait apparaître des symboles confinés dans des boules de rayon $C\varepsilon$ centrées en ces mêmes points, et donc confinés dans $U_{Y,C'r}$ pourvu que ε soit assez petit devant r.

4. Espaces de Sobolev

Nous allons donner ici une définition « à la Littlewood-Paley » des espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander g, ainsi que leurs premières propriétés. Nous en donnerons plus loin, dans le COROLLAIRE 6.7, des caractérisations en termes d'image de L^2 par les opérateurs pseudo-différentiels.

Soit (φ_Y) une g-partition de l'unité (voir (8)) à support dans des boules de rayon r/C, et soient $\varphi_Y = \sum_\nu \psi_{Y,\nu} \# \theta_{Y,\nu}$ les décompositions en symboles confinés dans les $U_{Y,r}$ fournies par le THÉORÈME 3.1.

DÉFINITION 4.1. — Soit M un poids admissible. L'*espace de Sobolev* noté $H(M,g)$ (ou $H(M)$ lorsque le contexte est clair) est l'espace des $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vérifiant :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 \, \|\theta^w_{Y,\nu} u\|^2_{L^2} \, |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y < \infty.$$

C'est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u \mid v)_{H(M)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 (\theta^w_{Y,\nu} u \mid \theta^w_{Y,\nu} v)_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y < \infty.$$

4.2. Remarque. — Si M_0 et M_1 sont des poids admissibles, l'interpolé complexe $[H(M_0), H(M_1)]_\theta$ est égal à $H(M_\theta)$ avec $M_\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta$. En effet, l'interpolation entre espaces L^2 à poids est bien connue et, par définition, l'espace $H(M)$ est l'image réciproque, par l'application $u \mapsto \big(\theta^w_{Y,\nu} u\big)_{Y,\nu}$, de l'espace des fonctions de carré sommable sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^{2n}_Y \times \mathbb{N}$ muni de la mesure $\mathrm{d}x \otimes (M(Y)^2 |g_Y|^{1/2} \, \mathrm{d}Y) \otimes \mu_{\mathbb{N}}$, en notant $\mu_{\mathbb{N}}$ la mesure canonique de $\mathbb{N}$.

La proposition suivante montre que la définition des $H(M)$ ne dépend pas des choix des $\varphi_Y, \psi_{Y,\nu}, \theta_{Y,\nu}$.

PROPOSITION 4.3. — *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Pour que u appartienne à $H(M)$, il faut et il suffit que pour toute famille $(a_{Y,\nu})$ de symboles indexée par $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{N}$ qui vérifie pour tout k*

$$\sup_Y \sum_\nu \|a_{Y,\nu}\|^2_{k\,;\,\mathrm{Conf}(Y)} < \infty, \tag{26}$$

on ait :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int M(Y)^2 \, \|a^w_{Y,\nu} u\|^2_{L^2} \, |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y < \infty. \tag{27}$$

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. En écrivant u comme l'intégrale des $\varphi^w_S u$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|a^w_{Y,\nu} u\|^2_{L^2} &= \sum_\mu \sum_\lambda \iint (a^w_{Y,\nu} \psi^w_{S,\lambda} \theta^w_{S,\lambda} u \mid a^w_{Y,\nu} \psi^w_{T,\mu} \theta^w_{T,\mu} u)_{L^2} \\ &\qquad\qquad |g_S|^{1/2} \,\mathrm{d}S |g_T|^{1/2} \,\mathrm{d}T \\ &\le \sum_\mu \sum_\lambda \iint \|\bar{\psi}^w_{T,\mu} \bar{a}^w_{Y,\nu} a^w_{Y,\nu} \psi^w_{S,\lambda}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\theta^w_{S,\lambda} u\|_{L^2} \\ &\qquad\qquad \|\theta^w_{T,\mu} u\|_{L^2} |g_S|^{1/2} \,\mathrm{d}S |g_T|^{1/2} \,\mathrm{d}T. \end{aligned} \tag{28}$$

La norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de a^w étant majorée d'après (17) par

$$C_0 \|a\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)}$$

avec des constantes C_0 et k universelles, le terme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ ci-dessus est majoré, d'après le THÉORÈME 2.6, par

$$C \Delta_r(S,Y)^{-N} \Delta_r(T,Y)^{-N} (1+\lambda)^{-N} (1+\mu)^{-N} \|a_{Y,\nu}\|^2_{p\,;\,\mathrm{Conf}(Y)}, \tag{29}$$

pour tout N avec $p = p(N)$ et $C = C(N)$.

En notant R le membre de gauche de (27), on déduit donc de (28) et de (29)

$$\begin{aligned} R \le \sum_\mu \sum_\lambda \iint K(S,\lambda;T,\mu) M(S) \|\theta^w_{S,\lambda} u\|_{L^2} \\ M(T) \|\theta^w_{T,\mu} u\|_{L^2} |g_S|^{1/2} \,\mathrm{d}S |g_T|^{1/2} \,\mathrm{d}T, \end{aligned}$$

où l'on a l'estimation :

$$\begin{aligned} K(S,\lambda;T,\mu) \le C' \sum_\nu \int M(Y)^2 M(S)^{-1} M(T)^{-1} \Delta_r(S,Y)^{-N} \\ \Delta_r(T,Y)^{-N} (1+\lambda)^{-N} (1+\mu)^{-N} \\ \|a_{Y,\nu}\|^2_{p\,;\,\mathrm{Conf}(Y)} |g_Y|^{1/2} \,\mathrm{d}Y. \end{aligned} \tag{30}$$

D'après le lemme de Schur appliqué à l'espace mesuré $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{N}$ muni du produit tensoriel de $|g_S|^{1/2}\,\mathrm{d}S$ par la mesure canonique de $\mathbb{N}$, il suffit de prouver que l'on a la relation

$$\sup_{S,\lambda} \sum_{\mu} \int K(S,\lambda;T,\mu)|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T < \infty \tag{31}$$

ainsi que la relation symétrique pour obtenir l'estimation

$$R \leq \mathrm{C^{te}} \sum_{\mu} \int M(T)^2 \|\theta^w_{T,\mu}u\|^2_{L^2}|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T = \mathrm{C^{te}}\|u\|^2_{H(M)} < \infty.$$

La relation (30) entraîne facilement (31) pourvu que l'on ait choisi $N = P + Q$ assez grand pour que $M(Y)M^{-1}(S)\Delta_r^{-P}$ soit borné (voir la remarque 2.4) et que Δ_r^{-Q} soit sommable (voir (13)). Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 4.4. — *Soient M et M_1 des poids admissibles. Pour tout $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.*

Il s'agit de prouver que l'on a

$$R = \sum_{\nu} \int M_1(Y)^2/M(Y)^2 \|\theta^w_{Y,\nu}a^w u\|^2_{L^2}|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y < \infty.$$

D'après (15), l'application $b \mapsto M(Y)^{-1}b \,\#\, a$ est continue de $\mathrm{Conf}(g,Y,r)$ dans lui-même avec des semi-normes indépendantes de Y. La famille des $b_{Y,\nu} = M(Y)^{-1}\theta_{Y,\nu} \,\#\, a$ vérifie donc la condition (26), et la finitude de

$$R = \sum_{\nu} \int M_1(Y)^2 \|b^w_{Y,\nu}u\|^2_{L^2}|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$$

résulte de la PROPOSITION 4.3.

THÉORÈME 4.5. — *L'espace $H(1)$ est identique à l'espace L^2.*

Le symbole $a = \sum_\nu \int \bar{\theta}_{Y,\nu} \,\#\, \theta_{Y,\nu}|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$ appartient à $S(1,g)$, et l'opérateur a^w est donc borné sur L^2. Si u appartient à L^2, on a donc :

$$\|u\|^2_{H(1)} = (a^w u \mid u)_{L^2} < \infty.$$

Réciproquement, supposons $u \in H(1)$. On a

$$\|u\|^2_{L^2} = \sum_{\lambda}\sum_{\mu} \iint (\bar{\psi}^w_{T,\mu}\psi^w_{S,\lambda}\theta^w_{S,\lambda}u \mid \theta^w_{T,\mu}u)_{L^2}|g_S|^{1/2}\,\mathrm{d}S|g_T|^{1/2}\,\mathrm{d}T$$

et donc, en posant $K(S,\lambda;T,\mu) = \|\bar{\psi}^w_{T,\mu}\psi^w_{S,\lambda}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$:

$$\|u\|^2_{L^2} \leq \sum_\lambda \sum_\mu \iint K(S,\lambda;T,\mu)\|\theta^w_{S,\lambda}u\|_{L^2}\|\theta^w_{T,\mu}u\|_{L^2}|g_S|^{1/2}\mathrm{d}S|g_T|^{1/2}\mathrm{d}T.$$

On conclut en utilisant le lemme de Schur comme à la fin de la PROPOSITION 4.3.

4.6. Inclusion dans les espaces L^p.

Nous dirons que la métrique g est *scindée* si on a $g_X(t,\tau) = g_X(t,-\tau)$, ce qui équivaut à dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $g_X(t,\tau) = g_{1,X}(t) + g_{2,X}(\tau)$. Pour de telles métriques, on peut énoncer l'analogue des théorèmes d'inclusion de Sobolev.

Nous admettrons provisoirement, ce qui sera démontré plus tard dans le COROLLAIRE 6.7, que l'espace $\mathcal{S}$ est dense dans $H(M)$ pour tout poids admissible M.

THÉORÈME 4.7. — *Supposons la métrique g scindée. Soient M un poids admissible et $p \in\,]2,+\infty]$. Nous noterons Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la quantité suivante soit finie :*

$$h_p(x) = \|M^{-1}(x,\xi)\|_{L^{2p/(p-2)}(\mathrm{d}\xi)}. \tag{32}$$

(a) *Pour tout $x \in \Omega_\infty$, l'application $u \mapsto u(x)$ définie sur $\mathcal{S}$ se prolonge en une application linéaire continue, notée encore $u \mapsto u(x)$, définie sur $H(M)$, et on a*

$$\big|u(x)\big| \leq C\|u\|_{H(M)}h_\infty(x), \tag{33}$$

la constante C ne dépendant pas de $x \in \Omega_\infty$. En outre, dans tout ouvert $\omega \subset \Omega_\infty$ où la fonction h_∞ est localement bornée, la restriction d'une distribution $u \in H(M)$ est une fonction continue.

(b) *Soit $2 < p < \infty$ et supposons que la mesure de Ω_p soit > 0. Alors l'application $u \mapsto h_p^{-1}u_{|\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ qui vérifie*

$$\Big\|\frac{u}{h_p}\Big\|_{L^p(\Omega_p)} \leq \mathrm{C^{te}}\|u\|_{H(M)}.$$

En particulier, dans tout ouvert ω où la fonction h_p est localement bornée, la restriction d'une distribution $u \in H(M)$ est une fonction de $L^p_{\mathrm{loc}}(\omega)$.

La condition obtenue ne dépend que du poids M et non de la métrique, ce qui est à rapprocher du THÉORÈME 6.9 ci-dessous. Dans le cas où $M(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$, on retrouve, en dehors du cas limite, les inclusions de Sobolev classiques.

Le point essentiel de la démonstration sera à nouveau un lemme relatif à une métrique fixe.

LEMME 4.8. — *Pour tout $r > 0$ et tout entier N, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait la propriété suivante. Pour toute fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ et toute forme quadratique scindée $\gamma = \gamma_1(\mathrm{d}x^2) + \gamma_2(\mathrm{d}\xi^2)$ vérifiant $\gamma \le \gamma^\sigma$, on a*

$$\big(1 + \gamma_2^{-1}(x - U_1)\big)^N |\theta^w u(x)| \le C\|\theta\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} |\gamma_2|^{-1/4} \|u\|_{L^2},$$

en notant U_1 (resp. U_2) la boule de $\mathbb{R}^n$ définie par $\gamma_1(x) \le r^2$ (resp. la boule $\gamma_2(\xi) \le r^2$) et en notant γ_2^{-1} la forme quadratique définie par $\gamma_2^{-1}(x) = \sup_{\xi\neq 0}(x\cdot\xi)^2/\gamma_2(\xi)$.

La relation $\gamma \le \gamma^\sigma$ se traduit ici par $\gamma_1 \le \gamma_2^{-1}$ ou par $\gamma_2 \le \gamma_1^{-1}$. Soit T_j une base orthonormale pour γ_2 et posons $L = I - \sum \partial_{T_j}^2$. On a :

$$\big(1 + \gamma_2^{-1}(x - y)\big)^{-K} L_\eta^K \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\eta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\eta}.$$

En intégrant par parties dans la formule de quantification (1), on obtient donc :

$$\theta^w u(x) = \int \mathrm{e}^{i(x-y)\cdot\eta}\big(1 + \gamma_2^{-1}(x - y)\big)^{-K} L_\eta^K \theta\big(\tfrac12(x+y),\eta\big)u(y)\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta}{(2\pi)^n}\cdot$$

Les dérivations figurant dans L étant relatives à des vecteurs de γ_2-longueur 1, on a avec une constante ne dépendant que de K (on peut prendre $(n+1)^{2K}$) :

$$\begin{aligned}|\theta^w u(x)| \le \mathrm{C^{te}}\|\theta\|_{2K\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} &\int \big(1 + \gamma_2^{-1}(x - y)\big)^{-K}\big(1 + \gamma_1^{-1}(\eta - U_2)\big)^{-K} \\ &\qquad \big(1 + \gamma_2^{-1}\big(\tfrac12(x+y) - U_1\big)\big)^{-K} u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

En remarquant que l'on a

$$\gamma_2^{-1}(x - U_1) \le \tfrac12\gamma_2^{-1}(x-y) + 2\gamma_2^{-1}\big(\tfrac12(x+y) - U_1\big),$$

en minorant $\gamma_1^{-1}(\eta - U_2)$ par $\gamma_2(\eta - U_2)$, en prenant $K = N + n$ et en intégrant en η, on obtient

$$\begin{aligned}
&\big(1+\gamma_2^{-1}(x-U_1)\big)^N |\theta^w u(x)| \\
&\quad \le C|\gamma_2|^{-1/2}\, \|\theta\|_{2K\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} \int \big(1+\gamma_2^{-1}(x-y)\big)^{-n} u(y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad \le C'|\gamma_2|^{-1/4}\, \|\theta\|_{2K\,;\,\mathrm{Conf}(\gamma,0,r)} \|u\|_{L^2},
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

4.9. Démonstration du théorème 4.7 dans le cas $p = +\infty$.

Nous utiliserons la décomposition suivante :

$$u = \sum_\nu \int \psi_{Y,\nu}^w \theta_{Y,\nu}^w u\, |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

D'après le lemme ci-dessus, pour tout N, on a

$$\big(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y})\big)^N |\psi_{Y,\nu}^w \theta_{Y,\nu}^w u(x)| \le \mathrm{C^{te}} |g_{2,Y}|^{-1/4} (1+\nu)^{-1} \|\theta_{Y,\nu}^w u\|_{L^2},$$

en notant $U_{1,Y}$ la $g_{1,Y}$ boule de rayon r centrée en y. On a donc :

$$\begin{aligned}
|u(x)| \le \mathrm{C^{te}} \sum_\nu \int &\big(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y})\big)^{-N} (1+\nu)^{-1} M(Y)^{-1} \\
&M(Y) \|\theta_{Y,\nu}^w u\|_{L^2} |g_{2,Y}|^{1/4} |g_{1,Y}|^{1/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la mesure $|g_{1,Y}|^{1/2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}\eta \otimes \mu_{\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(34)\quad |u(x)|^2 \le \mathrm{C^{te}} \Big\{ \sum_\nu \int &(1+\nu)^{-2} M(Y)^{-2} \big(1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y})\big)^{-2N} \\
&\qquad |g_{1,Y}|^{1/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\eta \Big\} \\
\Big\{ \sum_\nu \int &M(Y)^2 \|\theta_{Y,\nu}^w u\|_{L^2}^2 |g_{1,Y}|^{1/2} |g_{2,Y}|^{1/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\eta \Big\}.
\end{aligned}$$

On reconnaît $\|u\|_{H(M)}^2$ dans la seconde accolade. D'autre part, on a

$$1 + g_{2,Y}^{-1}(x - U_{1,Y}) \ge 1 + g_{1,Y}(x - U_{1,Y}) \ge \mathrm{C^{te}}\big(1 + g_{1,Y}(x-y)\big),$$

et, en posant $2N = N_1 + n + 1$, on a d'après (34) :

$$(35)\quad |u(x)|^2 \leq \mathrm{C^{te}} \|u\|^2_{H(M)} \int M(Y)^{-2}\big(1 + g^{-1}_{2,Y}(x - U_{1,Y})\big)^{-N_1} \big(1 + g_{1,Y}(x-y)\big)^{-n-1} |g_{1,Y}|^{1/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\eta.$$

Introduisons le point $Z = (x, \eta)$ et remarquons que, en vertu de la tempérance, les quantités $(M(Y)/M(Z))^{\pm 1}$ et $(g_Y/g_Z)^{\pm 1}$ peuvent être majorées par $\mathrm{C^{te}}(1 + g^{-1}_{2,Y}(x - U_{1,Y}))^{N'}$. L'estimation (35) avec N_1 suffisamment grand entraîne alors la majoration suivante :

$$\big|u(x)\big|^2 \leq \mathrm{C^{te}} \|u\|^2_{H(M)} \int M(Z)^{-2}\big(1 + g_{1,Z}(x-y)\big)^{-n-1} |g_{1,Z}|^{1/2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\eta.$$

En intégrant par rapport à y, on obtient l'estimation

$$|u(x)|^2 \leq \mathrm{C^{te}} \|u\|^2_{H(M)} \int M(x,\eta)^{-2}\, \mathrm{d}\eta,$$

et on reconnaît dans l'intégrale du membre de droite, pour $x \in \Omega_\infty$, la quantité $h_\infty(x)^2$ définie par (32). Cela montre donc l'existence des valeurs ponctuelles en tout point $x \in \Omega_\infty$. En outre, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_\infty$ dans lequel la fonction h_∞ est localement bornée, tout élément de $H(M)$ est limite localement uniforme d'éléments de $\mathcal{S}$ et est donc une fonction continue. Cela achève la démonstration du théorème dans le cas $p = \infty$.

4.10. Démonstration du théorème 4.7 pour $2 < p < \infty$.

Soient donc Ω_p et h_p définis par (32). Introduisons également le poids $\widetilde{M} = M^{p/(p-2)}$, ainsi que l'ouvert $\widetilde{\Omega}_\infty$ et la fonction $\tilde{h}_\infty$ qui lui sont associés. On voit facilement que l'on a $\Omega_p = \widetilde{\Omega}_\infty$ et $h_p = \tilde{h}_\infty^{(p-2)/p}$. Posons enfin $A_N = \{x \mid h_p(x) \leq N\}$.

Soit T_N l'opérateur qui à u fait correspondre la restriction à A_N de $u/\tilde{h}_\infty$. Il est clair que cet opérateur applique $H(1) = L^2$ dans $L^2(A_N; \tilde{h}^2_\infty dx)$ avec une norme ≤ 1 et, d'après l'étude du cas $p = \infty$, il applique $H(\widetilde{M})$ dans $L^\infty(A_N; \tilde{h}^2_\infty dx)$ avec une norme indépendante de N. Par interpolation complexe d'exposant $\theta = 2/p$ (voir la remarque 4.2), l'opérateur T_N applique donc $H(M)$ dans $L^p(A_N; \tilde{h}^2_\infty\, \mathrm{d}x)$ avec une norme indépendante de N. Cela signifie que, pour $u \in H(M)$, on a :

$$\int_{A_N} \big|u(x)\big|^p\, \tilde{h}^{2-p}_\infty\, \mathrm{d}x = \int_{A_N} \big|u(x)\big|^p\, h_p(x)^{-p}\, \mathrm{d}x \leq C\|u\|^p_{H(M)}.$$

L'intégrale sur Ω_p entier vérifie donc la même majoration, ce qui achève la démonstration du théorème.

4.11. Remarque. — D'après l'exemple 4.1.2 de [B&L], en notant e_i la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la fonction

$$m(X) = 1 + \sum |\xi_i| + \sum g_{2,X}^{-1}(e_i)$$

est un poids admissible et on a $\partial/\partial x_i \in \operatorname{Op} S(m,g)$. Nous laissons au lecteur le soin d'en déduire par interpolation, à partir de l'inclusion de $H(Mm^k)$ dans un espace $W^{k,p}$ à poids, des théorèmes d'inclusion dans les espaces de Hölder ou de Besov.

5. Caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels

Le résultat le plus important de cette section est le THÉORÈME 5.5 qui caractérise les opérateurs pseudo-différentiels a^w en termes de norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de commutateurs de localisés de a^w. L'essentiel de la démonstration réside dans le LEMME 5.2 et consiste en l'étude du cas d'une métrique constante γ, c'est-à-dire d'une forme quadratique définie positive vérifiant $\gamma \le \gamma^\sigma$.

Pour un γ donné, la partie (a) du LEMME 5.2 se réduit à la caractérisation classique des opérateurs de la classe $S^0_{0,0}$ due à R. Beals (voir par exemple [He, p. 52]), et nous reprendrons la démonstration de celui-ci, le point important étant le contrôle de l'uniformité en γ.

Dans le même esprit, des caractérisations des opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole appartient à $S^0_{1/2,1/2}$ ou à $S^0_{\rho,\rho}$ ont été données respectivement dans [C&M] et [Ue].

DÉFINITION 5.1. — *On note* $\operatorname{Op} S(1,\gamma)$ *l'espace des opérateurs* A *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *pour lesquels les semi-normes suivantes sont finies :*

$$|||A|||_{k\,;\gamma} = \sup_{p\le k\,;\,\gamma(T_j)\le 1} \big\|(\operatorname{ad} L_1)\circ\cdots\circ(\operatorname{ad} L_p)\cdot A\big\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

où les opérateurs L_j *sont les quantifiés de Weyl des formes linéaires* $X \mapsto [T_j, X]$.

On a utilisé la notation classique $\operatorname{ad} L\cdot A$ du commutateur $[L,A]$. Remarquons que l'on a $\operatorname{ad} L_j \cdot a^w = (\partial_{T_j} a)^w$.

Il est clair que $a \in S(1,\gamma)$ entraîne $a^w \in \operatorname{Op} S(1,\gamma)$, et il résulte facilement de (18) et de la remarque 2.8 que l'on a un contrôle uniforme en γ des semi-normes de a^w à partir de celles de a. La réciproque est exprimée par le lemme suivant.

LEMME 5.2.

(a) *Un opérateur A appartient à* $\operatorname{Op} S(1,\gamma)$ *si et seulement si on a* $A = a^w$ *avec* $a \in S(1,\gamma)$. *En outre, pour tout entier k, il existe C et ℓ indépendants de γ tels que l'on ait :*

$$\|a\|_{k\,;\,S(1,\gamma)} \leq C |||a^w|||_{\ell\,;\,\gamma}.$$

(b) *Quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $\theta \in\,]0,1[$, il existe C et ℓ indépendants de γ tels que l'on ait :*

$$\|a\|_{k\,;\,S(1,\gamma)} \leq C \|A\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^2)} |||A|||^{1-\theta}_{\ell\,;\,\gamma}.$$

Rappelons (voir par exemple le théorème 18.5.9 de [Hö]) qu'à toute transformation linéaire symplectique χ de $\mathbb{R}^{2n}$, on peut associer un opérateur unitaire U sur L^2 tel que $(a \circ \chi)^w = U^{-1} a^w U$. L'énoncé du lemme étant invariant par de telles transformations, cela nous permettra de supposer que l'on a

$$\gamma = \sum \frac{1}{a_j^2} (\mathrm{d}x_j^2 + \mathrm{d}\xi_j^2),$$

où l'hypothèse $\gamma \leq \gamma^\sigma$ se traduit par $a_j \geq 1$. Nous noterons

$$\gamma_1 = \sum \mathrm{d}x_j^2 / a_j^2$$

la composante selon $\mathbb{R}^n$ de γ.

A partir de A, nous allons calculer d'abord un «symbole-noyau» $b(x,y,\eta)$ de cet opérateur, à partir duquel nous retrouverons ensuite le symbole de Weyl a. On fixe une fonction $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\alpha(0) = 1$, et on introduit les fonctions suivantes (pour $Y = (y,\eta)$) :

$$\mathrm{e}_\eta(x) = \mathrm{e}^{ix\cdot\eta}, \quad \Pi_Y(x) = \mathrm{e}_\eta(x)\, \alpha\big(\gamma_1(x-y)\big).$$

On vérifie facilement (voir [He]) que l'on a, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$u(x) = \iint \mathrm{e}^{-iy\cdot\eta} u(y) \Pi_Y(x) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta}{(2\pi)^n}.$$

Il en résulte que l'on a

$$Au(x) = \iint \mathrm{e}^{-iy\cdot\eta} u(y) A\Pi_Y(x) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta}{(2\pi)^n}$$

et donc

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\eta} b(x,y,\eta)u(y)\frac{dy\,d\eta}{(2\pi)^n},$$

où on a posé

$$b(x,Y) = e_{-\eta}(x)A\Pi_Y(x). \tag{36}$$

5.3. Estimation des dérivées du symbole-noyau b.

Nous noterons $D_{x_j} = -ia_j\partial/\partial x_j$ l'opérateur de symbole $a_j\xi_j$ et M_{x_j} l'opérateur de multiplication de symbole a_jx_j . Ces opérateurs joueront le rôle des opérateurs L_j de la définition 5.1. Nous poserons également $D_{\eta_j} = -ia_j\partial/\partial\eta_j$

Nous utiliserons, pour s entier, les espaces de Sobolev usuels en la variable x munis de la norme définie par

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\gamma_1)} = \sup_{|\lambda|\le s}\int \left|D_x^\lambda u(x)\right|^2 |\gamma_1|^{1/2}\,dx,$$

avec les notations usuelles pour les multiindices.

L'application $x \mapsto (x_i/a_i)$ réalisant une isométrie de $\mathcal{H}^s(\gamma_1)$ sur l'espace correspondant à la métrique canonique de $\mathbb{R}^n$, il résulte des inégalités de Sobolev classiques que l'on a, avec des constantes $C_{k,s}$ indépendantes de γ_1,

$$\sup_{\lambda\le k}\left\|D_x^\lambda u\right\|_{L^\infty} \le C_{k,s}\|u\|_{\mathcal{H}^s(\gamma_1)} \qquad \text{pour } s > k + \tfrac{1}{2}n. \tag{37}$$

Nous allons obtenir des estimations L^∞ des dérivées en Y de b à valeur dans les espaces de Sobolev en x. Remarquons d'abord, pour une fonction u définie dans $\mathbb{R}^n$, que l'on a les identités suivantes :

$$D_{x_j}\big(e_{-\eta}A(e_\eta u)\big) = e_{-\eta}\left[D_{x_j},A\right](e_\eta u) + e_{-\eta}A(e_\eta D_{x_j}u), \tag{38}$$

$$D_{\eta_j}\big(e_{-\eta}A(e_\eta u)\big) = e_{-\eta}\left[M_{x_j},A\right](e_\eta u). \tag{39}$$

En appliquant ces identités à l'expression (36) de b, on obtient :

$$D_x^\lambda D_y^\mu D_\eta^\nu b(x,y,\eta) = \sum_{\lambda'\le\lambda}\binom{\lambda}{\lambda'} e_{-\eta}(x)(\operatorname{ad} D_x)^{\lambda'}(\operatorname{ad} M_x)^\nu \, A\Big\{e_\eta D_x^{\lambda-\lambda'}D_y^\mu\Big(\alpha\big(\gamma_1(\cdot-y)\big)\Big)\Big\}(x). \tag{40}$$

Les fonctions $D_x^{\lambda-\lambda'} D_y^{\mu}(\alpha(\gamma_1(\cdot - y)))$ qui apparaissent peuvent se mettre sous la forme $\psi(\ldots,(x_j - y_j)/a_j,\ldots)$ où la fonction ψ dépend des multiindices, mais pas de γ. Leur norme dans l'espace $\mathcal{H}^0(\gamma_1)$ est donc indépendante de γ. En évaluant la norme du membre de gauche de (40) dans $\mathcal{H}^0(\gamma_1)$, et en remarquant que la norme d'un opérateur dans $\mathcal{L}(L^2)$ est égale à sa norme dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}^0(\gamma_1))$, on obtient

$$\|D_y^{\mu} D_\eta^{\nu} b(\cdot, y, \eta)\|_{\mathcal{H}^s(\gamma_1)} \leq C_{\mu,\nu,s} |||A|||_{\mu+s\,;\,\gamma}, \tag{41}$$

avec des constantes $C_{\mu,\nu,s}$ indépendantes de γ.

La norme $|||\cdot|||_{0\,;\,\gamma}$ n'est autre que la norme de $\mathcal{L}(L^2)$. Par interpolation, on peut majorer le membre de gauche de (41) par

$$\Big\{\|b(\cdot, y, \eta)\|_{\mathcal{H}^0(\gamma_1)}\Big\}^{\theta} \Big\{\sup_{\substack{\mu' \leq \mu_1 \\ \eta' \leq \eta_1}} \|D_y^{\mu'} D_\eta^{\nu'} b(\cdot, y, \eta)\|_{\mathcal{H}^{s_1}(\gamma_1)}\Big\}^{1-\theta}$$

où μ_1, η_1, s_1 ne dépendent que de (μ, ν, s, θ), et donc par

$$C\|A\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{\theta} |||A|||_{\ell\,;\,\gamma}^{1-\theta}$$

où C et ℓ ne dépendent que de (μ, ν, s, θ). Enfin, d'après les inégalités de Sobolev (37), on en déduit l'estimation uniforme des dérivées de b à partir des normes d'opérateur des commutateurs de A

$$\begin{aligned} &\forall k,\ \forall \theta \in\,]0,1[,\ \exists C,\ \exists \ell,\ \forall \gamma, \\ &\sup_{|\lambda|+|\mu|+|\nu| \leq k} \|D_x^{\lambda} D_y^{\mu} D_\eta^{\nu} b(x, y, \eta)\|_{L^\infty} \leq C\|A\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{\theta} |||A|||_{\ell\,;\,\gamma}^{1-\theta}. \end{aligned} \tag{42}$$

5.4 Estimation des dérivées du symbole de Weyl a.

D'après les relations (18.5.1) et (18.5.4) de [Hö], on retrouve le symbole de Weyl a de A à partir du symbole-noyau b par la formule

$$a(x, \xi) = \iint \mathrm{e}^{iz\cdot(\zeta-\xi)} c(x, z, \zeta) \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\zeta}{(2\pi)^n}$$

avec $c(x, z, \zeta) = b\big(\frac{1}{2}(x+z), \frac{1}{2}(x-z), \zeta\big)$, d'où l'on déduit :

$$D_x^{\lambda} D_\xi^{\mu} a(x, \xi) = \iint \mathrm{e}^{iz\cdot(\zeta-\xi)} D_x^{\lambda} D_\zeta^{\mu} c(x, z, \zeta) \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\zeta}{(2\pi)^n}.$$

Nous allons procéder à des intégrations par parties dans la formule précédente, en utilisant le Laplacien canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. En posant $L = I - \sum(\partial/\partial z_j)^2 - \sum(\partial/\partial\zeta_j)^2$, on a :

$$L\big(\mathrm{e}^{iz\cdot(\zeta-\xi)}\big) = \big(1+|z|^2+|\zeta-\xi|^2\big)\,\mathrm{e}^{iz\cdot(\zeta-\xi)}.$$

On déduit donc de (43) :

$$D_x^\lambda D_\xi^\mu a(x,\xi) = \iint \mathrm{e}^{iz\cdot(\zeta-\xi)} L^{n+1} D_x^\lambda D_\zeta^\mu c(x,z,\zeta) \big(1+|z|^2+|\zeta-\xi|^2\big)^{-n-1}\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\zeta}{(2\pi)^n}. \tag{44}$$

Il reste à remarquer que les dérivations intervenant dans L sont, avec nos notations, iD_{x_j}/a_j et iD_{ξ_j}/a_j avec $a_j \geq 1$. En majorant les dérivées de c intervenant dans (44) par (42), on obtient finalement

$$\forall k,\ \forall\theta\in]0,1[,\ \exists C,\ \exists\ell,\ \forall\gamma,\qquad \sup_{|\lambda|+|\mu|\leq k}\big\|D_x^\lambda D_\xi^\mu a(x,\xi)\big\|_{L^\infty} \leq C\|A\|^\theta_{\mathcal{L}(L^2)}|||A|||^{1-\theta}_{\ell\,;\gamma},$$

ce qui achève la démonstration du LEMME 5.2.

Nous revenons maintenant au cas d'une métrique de Hörmander g. On notera toujours $\varphi_Y = \sum_\nu \psi_{Y,\nu} \,\#\, \theta_{Y,\nu}$ la décomposition introduite dans la section 4 d'une g-partition de l'unité, et M désignera un poids admissible.

THÉORÈME 5.5.

(a) *Pour qu'un opérateur A de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ soit de la forme $A = a^w$ avec $a \in S(M,g)$, il faut et il suffit que, pour toute famille b_Y uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, les quantités*

$$M(Y)^{-1}\big\|(\operatorname{ad}L_1)\circ\cdots\circ(\operatorname{ad}L_p)\cdot(b_Y^w\circ A)\big\|_{\mathcal{L}(L^2)},\qquad p\leq k,$$

soient majorées par des constantes C_k indépendantes de Y et des L_j lorsque les opérateurs L_j sont les quantifiés de Weyl de formes linéaires $X\mapsto[T_j,X]$ avec $g_Y(T_j)\leq 1$.

(b) *Plus précisément, posons*

$$\begin{aligned} &|||A|||_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)} \\ &\qquad = \sup_{\substack{p\leq k\,;\,Y,\nu\\ g_Y(T_j)\leq 1}} M(Y)^{-1}\|(\operatorname{ad}L_1)\circ\cdots\circ(\operatorname{ad}L_p)\cdot(\theta^w_{Y,\nu}\circ A)\|_{\mathcal{L}(L^2)}, \end{aligned} \tag{45}$$

où les opérateurs L_j sont comme ci-dessus. L'opérateur A est de la forme a^w avec $a \in S(M, g)$ si et seulement si ces semi-normes sont finies, et on a les relations

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists \ell, \quad \|a\|_{k\,;\,S(M,g)} \leq C |||a^w|||_{\ell\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)},$$

$$\forall k,\ \forall \theta \in]0,1[,\ \exists C,\ \exists \ell, \\ \|a\|_{k\,;\,S(M,g)} \leq C |||a^w|||^{\theta}_{0\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)} |||a^w|||^{1-\theta}_{\ell\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)}.$$

Il est clair qu'il suffit de démontrer la partie (b) du théorème, l'hypothèse de (a) relative aux familles b_Y uniformément confinées (qui peut s'écrire uniquement en termes de semi-normes) entraînant facilement la propriété analogue pour les familles $b_{Y,\nu}$ uniformément confinées.

Sous l'hypothèse (b), il résulte du lemme 5.2, appliqué à la métrique fixe g_Y, que l'on a $M(Y)^{-1}\theta^w_{Y,\nu} \circ A = b^w_{Y,\nu}$ avec

$$\forall k,\ \forall \theta \in]0,1[,\ \exists C,\ \exists \ell,\ \forall Y,\ \forall \nu, \\ \|b_{Y,\nu}\|_{k\,;\,S(1,g_Y)} \leq C |||A|||^{\theta}_{0\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)} |||A|||^{1-\theta}_{\ell\,;\,\mathrm{Op}\,S(M,g)}.$$

Posons maintenant $c_{Y,\nu} = (1+\nu)^2 \psi_{Y,\nu} \,\#\, b_{Y,\nu}$. La famille des $(1+\nu)^2\psi_{Y,\nu}$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ (pour g ou g_Y, ce qui est équivalent par définition). En utilisant l'estimation (15) *pour la métrique fixe* g_Y, la remarque 2.8 garantissant que les constantes ne dépendent pas de g_Y, on obtient :

$$\forall k,\ \exists C,\ \exists \ell,\ \forall Y,\ \forall \nu, \quad \|c_{Y,\nu}\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(g,Y,r)} \leq C \|b_{Y,\nu}\|_{\ell\,;\,S(1,g_Y)}.$$

Il ne reste plus qu'à écrire $A = a^w$ avec

$$a = \sum_{\nu} (1+\nu)^{-2} \int M(Y) c_{Y,\nu} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$$

et (11) entraîne le résultat.

5.6. Remarque. — Le théorème précédent permet d'interpoler entre les semi-normes de a dans $S(1,g)$ et la norme de a^w dans $\mathcal{L}(L^2)$: quels que soient k et θ, il existe C et ℓ avec

$$\|a\|_{k\,;\,S(1,g)} \leq C \|a^w\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^2)} \|a\|^{\theta}_{\ell\,;\,S(1,g)}.$$

Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe de ce résultat.

Signalons sans démonstration — car nous ne les utiliserons pas dans la suite — l'existence de deux systèmes équivalents de semi-normes sur $\operatorname{Op} S(M,g)$. Le premier est défini par

$$\mathcal{M}_k(A) = \sup_{\substack{|J|\le k\,;\,Y,\nu \\ g_Y(T_j)\le 1}} M(Y)^{-1} \Big\| \theta^w_{Y,\nu} \circ \Big(\prod_{j\in J} \operatorname{ad} L_j \cdot A \Big) \Big\|_{\mathcal{L}(L^2)},$$

et le second, qui jouit de bonnes propriétés de composition, par

$$\mathcal{N}_k(A) = \sup_{\substack{|J|\le k\,;\,Y,\nu \\ g_Y(T_j)\le 1}} M(Y)^{-1} \sum_\lambda \int \Big\| \theta^w_{Y,\nu} \Big(\prod_{j\in J} \operatorname{ad} L_j \cdot A \Big) \psi^w_{S,\lambda} \Big\|_{\mathcal{L}(L^2)} |g_S|^{1/2}\, \mathrm{d}S.$$

Il est également possible de donner des caractérisations non localisées, en termes d'action des commutateurs dans les espaces de Sobolev, mais l'intérêt est plus apparent que réel, l'expression des normes dans ces espaces faisant réapparaître les partitions de l'unité dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Par exemple, dans le cas particulier où la métrique g est diagonalisable dans une base fixe (et plus généralement lorsqu'il existe $k > 0$ et un nombre fini de directions $D_1, \dots, D_N$ de $\mathbb{R}^{2n}$ telles que l'enveloppe convexe des vecteurs de g_Y-longueur 1 parallèles aux D_j contienne la g_Y-boule de rayon k), on a la caractérisation suivante. Un opérateur A appartient à $\operatorname{Op} S(M,g)$ si, pour toute famille finie (T_j) d'éléments de $\mathbb{R}^{2n}$, en notant L_j les opérateurs associés, les commutateurs $\prod_{j\in J} \operatorname{ad} L_j \cdot A$ appliquent continûment L^2 dans $H(M)$, avec $M(X) = \prod_{j\in J} g_X(T_j)$.

Lorsque l'hypothèse portant sur la métrique n'est pas réalisée, il faut exiger de plus que la norme du commutateur, en tant qu'opérateur de L^2 dans $H(M)$, est bornée par une quantité ne dépendant que du nombre d'éléments de J. Dans les deux cas, les hypothèses entrainent facilement la finitude des semi-normes $\mathcal{M}_k(A)$ ci-dessus et donc le résultat.

6. Groupes à un paramètre d'opérateurs elliptiques

Nous allons démontrer, pour tout poids admissible M, l'existence d'un groupe à un paramètre de symboles $b_t \in S(M^t, g)$, ce qui implique l'existence de symboles inversibles de tout ordre. On pourrait noter ce groupe $b_t = \mathrm{e}^{\# t\alpha}$, le générateur infinitésimal α étant un symbole du type défini ci-dessous.

DÉFINITION 6.1. — On dit qu'une fonction α de classe C^∞ définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ est un *symbole comparable* à $\log M$ si on a

$$\sup_X \bigl|\alpha(X) - \log M(X)\bigr| < \infty, \tag{46}$$

$$\sup_{X,T_j} \bigl|\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_k} \alpha(X)\bigr| < \infty, \tag{47}$$

pour chaque $k \geq 1$, les vecteurs T_j vérifiant $g_X(T_j) \leq 1$.

On voit facilement qu'une telle fonction appartient à $S(L, g)$, où L est le poids admissible $L(X) = 1 + |\log M(X)|$, et que deux fonctions comparables à $\log M$ diffèrent d'un élément de $S(1, g)$.

6.2. Exemples. — Il est bien connu qu'il existe des $a \in S(M, g)$ équivalents à M, c'est-à-dire vérifiant $(M(Y)/a(Y))^{\pm 1} \leq \mathrm{C^{te}}$ (on dit que a est un poids régulier). On peut prendre par exemple

$$a = \int M(Y) \varphi_Y |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$$

où (φ_Y) est une g-partition de l'unité. La fonction $\log a$ est alors comparable à $\log M$. On peut aussi poser

$$\alpha(X) = \int \log\bigl(M(Z)\bigr) \varphi_Z(X) |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z. \tag{48}$$

On a en effet pour tout Y :

$$\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell}\bigl(\alpha(X) - \log M(Y)\bigr) = \int \log \frac{M(Z)}{M(Y)} \partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} \varphi_Z(X) |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

On a $|\log M(Z) - \log M(Y)| \leq \log(C\Delta_r(Y,Z)^{N_0}) \leq \mathrm{C^{te}}\Delta_r(Y,Z)$ d'après la remarque 2.4. D'autre part, si $g_Y(T_j) \leq 1$, on a

$$\bigl|\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} \varphi_Z(X)\bigr| \leq \mathrm{C^{te}} \Delta_r(Y,Z)^{N_1} \bigl(1 + g_Z^\sigma(X - Z)\bigr)^{-N},$$

où N_1 ne dépend que de ℓ et où N est arbitraire. En choisissant $X = Y$ et N assez grand, on obtient par intégration les bornes voulues sur $\alpha - \log M(X)$ et sur les dérivées de α.

PROPOSITION 6.3. — *Soit α un symbole comparable à* $\log M$ *et posons*

$$\rho_Y(X) = \alpha(X) - \log M(Y).$$

Alors, pour toute famille $(c_{Y,\nu})$ uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, la famille des $c_{Y,\nu} \# \rho_Y$ est également uniformément confinée.

Il sufit de démontrer la propriété pour un symbole comparable à $\log M$, par exemple celui défini par (48), la propriété étant conservée par l'addition d'un élément de $S(1, g)$. On a alors :

$$c_{Y,\nu} \# \rho_Y = \int \log \frac{M(Z)}{M(Y)} c_{Y,\nu} \# \varphi_Z |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

Nous venons de voir que l'on peut estimer $|\log M(Z) - \log M(Y)|$ par $\mathrm{C^{te}}\Delta_r(Y, Z)$. D'autre part, pour tout N, la famille des $\Delta_r(Y, Z)^N c_{Y,\nu} \# \varphi_Z$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$. Il suffit de choisir N assez grand pour que $\Delta_r(Y, Z)^{-N+1}$ soit sommable (voir (13)) et on obtient le résultat par intégration.

THÉORÈME 6.4. — *Soit M un poids admissible et α comparable à* $\log M$.

(a) *Soit m un poids admissible et $b_0 \in S(m, g)$. Il existe une unique application $(t, X) \mapsto b_t(X)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$, égale à b_0 pour $t = 0$, telle que l'on ait $b_t \in S(mM^t, g)$ pour tout t et*

$$\frac{\partial b_t}{\partial t} = \alpha \# b_t. \tag{49}$$

(b) *Dans le cas $m = b_0 = 1$, l'unique solution de* (49) *vérifie également $\partial b_t / \partial t = b_t \# \alpha$ et on a*

$$b_t \# b_s = b_{t+s}, \qquad b_t \in S(M^t, g),$$

quels que soient s et t.

(i) *Première étape.* — Supposons d'abord l'existence d'une solution b_t vérifiant les conditions de la partie (a). Nous avons vu que α appartient à $S(1 + |\log M|)$, et il résulte alors facilement de l'équation (49) que l'application $t \mapsto b_t$ est de classe C^1 sur l'intervalle $[-T, T]$ à valeur dans l'espace de Fréchet $S(\widetilde{M}, g)$ avec $\widetilde{M} = m(1 + |\log M|)(M + M^{-1})^T$. Posons :

$$c_{t,Y,\mu} = m(Y)^{-1} M(Y)^{-t} \theta_{Y,\mu} \# b_t.$$

Les $c_{t,Y,\mu}$ constituent une famille uniformément confinée pour chaque t, sont de classe C^1 par rapport à t, et vérifient l'équation

$$\frac{\partial c_{t,Y,\mu}}{\partial t} = m(Y)^{-1} M(Y)^{-t} \theta_{Y,\mu} \# \big(\alpha - \log M(Y)\big) \# b_t.$$

En intercalant une partition de l'unité, on obtient le système

$$\frac{\partial c_{t,Y,\mu}}{\partial t} = \sum_{\nu} \int K_{t,Y,\mu,Z,\nu} \# c_{t,Z,\nu} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z, \tag{50}$$

en posant

$$K_{t,Y,\mu,Z,\nu} = \frac{m(Z)M(Z)^t}{m(Y)M(Y)^t} \theta_{Y,\mu} \# \big(\alpha - \log M(Y)\big) \# \psi_{Z,\nu}, \tag{51}$$

et avec comme conditions initiales

$$c_{0,Y,\mu} = m(Y)^{-1} \theta_{Y,\mu} \# b_0. \tag{52}$$

La démonstration de l'existence nous amènera à considérer le système analogue portant sur une famille de symboles $\gamma_{t,Y,\mu}$

$$\frac{\partial \gamma_{t,Y,\mu}}{\partial t} = \sum_{\nu} \int L_{t,Y,\mu,Z,\nu} \# \gamma_{t,Z,\nu} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z, \tag{53}$$

avec

$$L_{t,Y,\mu,Z,\nu} = \frac{m(Z)M(Z)^t}{m(Y)M(Y)^t} \theta_{Y,\mu} \# \big(\alpha - \log M(Z)\big) \# \psi_{Z,\nu}, \tag{54}$$

et

$$\gamma_{0,Y,\mu} = m(Y)^{-1} \theta_{Y,\mu} \# b_0.$$

(ii) *Résolution des équations (50) et (53).* — Le traitement de ces deux équations est tout à fait analogue et nous allons détailler le cas de la première. Nous allons montrer l'existence et l'unicité d'une solution dans l'espace des familles $(c_{Y,\mu})$ appartenant (uniformément en (Y,μ)) à $S(1, g_Y)$. Pour chaque entier k, introduisons l'espace E_k des applications $c : (Y,\mu) \mapsto c_{Y,\mu}$ vérifiant

$$\|c\|_{E_k} = \sup_{Y,\mu} |||c^w_{Y,\mu}|||_{k\,;\,g_Y} < \infty,$$

les semi-normes $|||\cdot|||_{k\,;\,g_Y}$ de $\operatorname{Op} S(1,g_Y)$ étant celles de la définition 5.1. L'équation (50) peut se reformuler $\partial c/\partial t = \mathcal{K}_t c$ avec

$$(\mathcal{K}_t c)_{Y,\mu} = \sum_{\nu} \int K_{t,Y,\mu,Z,\nu} \# c_{Z,\nu} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

Les données de Cauchy (52) appartiennent à E_k et nous allons montrer que $\mathcal{K}_t$ est un opérateur borné dans E_k, uniformément pour $t \in [-T,+T]$.

Soient donc $(T_j)_{j\in J}$ une famille d'au plus k vecteurs vérifiant la condition $g_Y(T_j) \le 1$ et L_j les opérateurs de symbole $[T_j, X]$. Il s'agit d'estimer la norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ de $(\operatorname{ad} L)^J (\mathcal{K}_t c)^w_{Y,\mu}$, qui s'écrit comme somme finie de termes du type

$$\sum_{\nu} \int \big\|(\operatorname{ad} L)^{J_1} K^w_{t,Y,\mu,Z,\nu}\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \big\|(\operatorname{ad} L)^{J_2} c^w_{Z,\nu}\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} |g_Z|^{1/2}\, \mathrm{d}Z \tag{55}$$

où (J_1, J_2) est une partition de J. On a :

$$\big\|(\operatorname{ad} L)^{J_2} c^w_{Z,\nu}\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le \|c\|_{E_k} \prod_{j\in J_2} \big(g_Y(T_j)/g_Z(T_j)\big)^{1/2}. \tag{56}$$

D'autre part, les $\theta_{Y,\mu} \# (\alpha - \log M(Y))$ sont uniformément confinés dans les $U_{Y,r}$ d'après la PROPOSITION 6.3. D'après le théorème de biconfinement, les $\Delta_r(Y,Z)^N \theta_{Y,\mu} \# (\alpha - \log M(Y)) \# \psi_{Z,\nu}$ sont également, pour tout entier N, uniformément confinés[1] dans les $U_{Y,r}$ et il en est encore de même de leurs dérivées directionnelles selon les T_j avec $j \in J_1$. Il en résulte donc de (17) que, pour tout N, on a une estimation :

$$\big\|(\operatorname{ad} L)^{J_1} K^w_{t,Y,\mu,Z,\nu}\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le C_N \frac{m(Z)M(Z)^t}{m(Y)M(Y)^t} \Delta_r(Y,Z)^{-N}. \tag{57}$$

En reportant les estimations (56) et (57) dans l'expression (55) de $\|\mathcal{K}_t c\|_{E_k}$, il ne reste qu'à choisir N suffisamment grand pour que $\Delta_r(Y,Z)^{-N}$ d'une part absorbe les rapports $(g_Y/g_Z)^k$, $m(Z)/m(Y)$ et $(M(Z)/M(Y))^{\pm T}$ et d'autre part rende l'intégrale convergente. On obtient :

$$\forall T,\ \forall k,\ \exists C,\ \forall t \in [-T,T], \quad \|\mathcal{K}_t c\|_{E_k} \le C \|c\|_{E_k}.$$

[1] Pour l'équation (53), le remplacement de $K_{t,Y,\mu,Z,\nu}$ par $L_{t,Y,\mu,Z,\nu}$ conduit à ajouter le terme $\Delta_r(Y,Z)^N (\log(M(Y)/M(Z)))\theta_{Y,\mu} \# \psi_{Z,\nu}$ qui possède les mêmes estimations de confinement, le facteur $\log(M(Y)/M(Z))$ étant dominé, comme nous l'avons vu, par $\Delta_r(Y,Z)$.

On a donc, quels que soient k et T, existence et unicité d'une solution appartenant à E_k de $\partial c/\partial t = \mathcal{K}_t c$ définie sur l'intervalle $[-T, T]$ et vérifiant (52), et donc l'existence et l'unicité pour $t \in \mathbb{R}$ d'une solution $(c_{t,Y,\mu})$ de (50), avec toujours les mêmes données de Cauchy, où les $c_{t,Y,\mu}$ appartiennent à $S(1, g_Y)$ uniformément en Y, μ et localement uniformément en t. La conclusion est identique pour l'équation (53).

(iii) *Démonstration du théorème 6.4 (a).* — La première étape a montré que si b_t est une solution, les $c_{t,Y,\mu} = m^{-1}(Y)M^{-t}(Y)\theta_{Y,\mu} \# b_t$ sont solution du système (50) et vérifient (52). Ils sont alors, d'après ce qui précède, déterminés de façon unique, et il en est donc de même de

$$b_t = \sum \int m(Y)M(Y)^t \psi_{Y,\mu} \# c_{t,Y,\mu} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

Réciproquement, soit $(\gamma_{t,Y,\mu})$ la solution de (53) déterminée ci-dessus. Posons

$$b_t = \sum \int m(Y)M(Y)^t \psi_{Y,\mu} \# \gamma_{t,Y,\mu} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

Les symboles $(1+\mu)^2 \psi_{Y,\mu} \# \gamma_{t,Y,\mu}$ sont uniformément confinés dans les $U_{Y,r}$ (pour g ou g_Y ce qui est équivalent par définition) et les b_t appartiennent donc à $S(mM^t, g)$. On a d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_t}{\partial t} &= \sum_\mu \int \log M(Y) m(Y) M(Y)^t \psi_{Y,\mu} \# \gamma_{t,Y,\mu} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y \\ &\quad + \sum_{\mu,\nu} \iint m(Z)M(Z)^t \psi_{Y,\mu} \# \theta_{Y,\mu} \# \left(\alpha - \log M(Z)\right) \\ &\qquad\qquad \# \psi_{Z,\nu} \# \gamma_{t,Z,\nu} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y\, |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.\end{aligned}$$

En sommant d'abord le second terme en (Y, μ), on obtient $\partial b_t/\partial t = \alpha \# b_t$. Enfin, pour $t = 0$, la valeur de b_t devient $\sum \int \psi_{Y,\mu} \# \theta_{Y,\mu} \# b_0 |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$ et est donc égale à la donnée b_0.

(iv) *Démonstration du théorème 6.4 (b).* — Soit donc b_t la solution relative à $b_0 = 1$ et considérons, pour s fixé, les applications $t \mapsto b_{t+s}$ et $t \mapsto b_t \# b_s$. Ce sont deux solutions de (49) prenant la valeur b_s pour $t = 0$ et l'unicité précédemment démontrée, en choisissant $m = M^s$, assure que l'on a $b_t \# b_s = b_{t+s}$. On a en particulier $b_t \# b_{-t} = 1$ et, en dérivant, $\alpha \# b_t \# b_{-t} - b_t \# \alpha \# b_{-t} = 0$. On a donc $b_t \# \alpha \# b_{-t} = \alpha$ ce qui assure que α et b_t commutent. Cela achève la démonstration du THÉORÈME 6.4.

6.5 Remarque. — En fait, on a un résultat d'unicité plus fort que le résultat ci-dessus et qui peut s'énoncer indépendamment de la métrique.

Considérons une application $t \mapsto B_t$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans lui-même telle que, pour tout $u \in \mathcal{S}$, l'application $t \mapsto B_t u$ soit de classe C^1 à valeurs dans $\mathcal{S}$ et vérifie $\partial_t(B_t u) = \alpha^w \circ B_t u$. On a alors nécessairement $B_t = b_t^w \circ B_0$, où b_t est le groupe construit précédemment. Il est en effet immédiat de vérifier que, pour $u \in \mathcal{S}$, l'application $t \mapsto b_{-t}^w \circ B_t u$ a une dérivée nulle.

COROLLAIRE 6.6. — *Quel que soit le poids admissible M, il existe $a \in S(M,g)$ et $a' \in S(M^{-1},g)$ vérifiant $a \# a' = a' \# a = 1$. Pour tout poids M_1, l'opérateur a^w est un isomorphisme de $H(M_1)$ sur $H(M_1/M)$, d'inverse ${a'}^w$*

Il suffit en effet de poser $a = b_1$ et $a' = b_{-1}$, où b_t est le groupe à un paramètre associé par le THÉORÈME 6.4 à n'importe quel symbole α comparable à $\log M$.

COROLLAIRE 6.7.

(a) *Soient M un poids admissible et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $u \in H(M,g)$;

(ii) *pour tout $a \in S(M,g)$, on a $a^w u \in L^2$;*

(iii) *il existe $a' \in S(M^{-1},g)$ et $v \in L^2$ tels que $u = {a'}^w v$*

(b) *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H(M,g)$.*

(c) *Le dual de $H(M,g)$ s'identifie naturellement à $H(M^{-1},g)$.*

On sait déjà que (i) implique (ii) et la réciproque résulte de l'existence d'un opérateur a^w inversible. De même, on sait que (iii) implique (i) et on obtient la réciproque en posant $u = {a'}^w(a^w u)$ où a et a' sont fournis par le COROLLAIRE 6.6.

L'isomorphisme ${a'}^w$ applique $\mathcal{S}$ qui est dense dans L^2 sur ${a'}^w(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ qui est donc dense dans $H(M,g)$.

Enfin, l'expression $(a^w u \mid a^w v)_{L^2}$ est un produit scalaire sur $H(M,g)$ et l'opérateur $\bar{a}^w a^w$ réalise donc un isomorphisme de $H(M,g)$ sur son dual. Cet opérateur étant bijectif de $H(M,g)$ sur $H(M^{-1},g)$, cela achève la démonstration.

6.8. Dépendance des $H(M,g)$ vis à vis de la métrique.

Rappelons qu'un poids M admissible pour une métrique de Hörmander g est dit *régulier* si on a $M \in S(M,g)$. Nous avons vu (exemple 6.2) que tout poids admissible est équivalent à un poids M régulier et que la fonction $\alpha = \log M$ est alors un symbole comparable à $\log M$.

THÉORÈME 6.9. — *Soit M un poids régulier par rapport à deux métriques de Hörmander g_1 et g_2. Alors $H(M,g_1) = H(M,g_2)$.*

En effet, la remarque 6.5 montre que le groupe à un paramètre b_t de générateur infinitésimal $\alpha = \log M$ est défini indépendamment du choix de la métrique g_1 ou g_2. Le même opérateur b_1^w est donc bijectif de $H(M,g_1)$ sur L^2 et de $H(M,g_2)$ sur L^2, ce qui entraîne le résultat.

En particulier, si $g_1 \leq g_2$ et si M est un poids admissible pour les deux métriques, un régularisé de M pour g_1 sera aussi régulier pour g_2, et on a donc $H(M,g_1) = H(M,g_2)$.

Si un même poids M est admissible par rapport à deux métriques de Hörmander, nous ne savons pas si les espaces $H(M,g_1)$ et $H(M,g_2)$ sont toujours identiques : le poids M est équivalent à un poids M_1 régulier pour g_1 et à un poids M_2 régulier pour g_2 mais n'est pas en général équivalent à un poids régulier pour les deux métriques.

7. Opérateurs inversibles et symboles inversibles

Nous ignorons si, pour une métrique de Hörmander générale, un symbole a est inversible au sens du calcul symbolique dès que a^w est inversible en tant qu'opérateur entre espaces de Sobolev. Nous donnons ci-dessous deux conditions portant sur la métrique g pour qu'il en soit bien ainsi. La première d'entre elles remédie au fait que la fonction $\Delta_r(Y,Z)$, qui mesure dans tout le calcul l'éloignement de Y et Z, ne satisfait pas à l'inégalité triangulaire.

DÉFINITION 7.1.

(a) On dit que la métrique g est *fortement tempérée* s'il existe une fonction positive $(X,Y) \mapsto d(X,Y)$, définie sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, vérifiant l'inégalité triangulaire, telle qu'il existe $C > 0$, $N \geq 0$ et $r > 0$ avec

$$\left(\frac{g_X}{g_Y}\right)^{\pm 1} \leq C\big(1 + d(X,Y)\big)^N, \tag{58}$$

$$1 + d(X,Y) \leq C\Delta_r(X,Y)^N. \tag{59}$$

(b) On dit que la métrique g est *dominée par une métrique fortement tempérée* si il existe une métrique de Hörmander fortement tempérée $\tilde{g}$ telle que l'on ait

$$g_X(\,\cdot\,) \leq \tilde{g}_X(\,\cdot\,), \tag{60}$$

$$\left(\frac{g_Y(\,\cdot\,)}{g_Z(\,\cdot\,)}\right)^{\pm 1} \leq C\big(1 + \tilde{g}_Y^\sigma(Y - Z)\big)^N. \tag{61}$$

7.2. Remarque. — La majoration (59) par $\Delta_r(X,Y)$ et non pas par $g^\sigma_X(X-Y)$ est plus restrictive qu'il ne paraît : pour $g_X(X-Y)\le r$ cela impose $d(X,Y)\le \mathrm{C^{te}}$, et la distance d doit donc être majorée, à une constante près, par la distance géodésique pour g. Dans le cas d'une métrique symplectique, la condition de forte température coïncide essentiellement avec l'hypothèse faite dans [Un], [Br] et [Le].

7.3 Exemple : métriques de type (ρ,δ). — Ces métriques, définies par

$$g_X = \langle\xi\rangle^{2\delta}\mathrm{d}x^2 + \langle\xi\rangle^{-2\rho}\mathrm{d}\xi^2, \quad \langle\xi\rangle = \big(1+|\xi|^2\big)^{1/2},$$

sont des métriques de Hörmander pour $0\le\delta\le\rho\le 1$, $\delta<1$. On a les deux résultats suivants.

(a) *Pour* $0\le\delta\le\rho<1$*, la métrique* g *est fortement tempérée.*

On posera

$$d(X,Y) = |\langle\xi\rangle^{1-\rho} - \langle\eta\rangle^{1-\rho}|.$$

Il est facile de montrer, en supposant $|\xi|\ge|\eta|$ (ce qui est loisible), que l'on a :

$$\Big(\frac{g_X}{g_Y}\Big)^{\pm 1} \le \frac{\langle\xi\rangle^{2\rho}}{\langle\eta\rangle^{2\rho}} \le \mathrm{C^{te}}\big(1+\langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}\big)^{2\rho/(1-\rho)}.$$

Le lecteur vérifiera aisément la seconde inégalité en séparant les cas $\langle\xi\rangle\le 2\langle\eta\rangle$ et $\langle\xi\rangle\ge 2\langle\eta\rangle$.

Pour majorer d par Δ_r, en choisissant $r<1$, on distinguera les cas $\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho\le\langle\eta\rangle\le\langle\xi\rangle$ et $\langle\eta\rangle\le\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho$. Dans le premier cas, on a

$$d(X,Y)\le\langle\xi\rangle^{1-\rho} - \big(\langle\xi\rangle-3\langle\xi\rangle^\rho\big)^{1-\rho}\le\mathrm{C^{te}},$$

ce qui, compte tenu de l'inégalité $\Delta_r\ge 1$, fournit l'estimation voulue. Dans le second cas, on a

$$\Delta_r(X,Y)\ge\langle\xi\rangle^{-2\delta}\big(\tfrac13\{\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle\}\big)^2,$$

et donc

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= \langle\xi\rangle^{1-\rho}-\langle\eta\rangle^{1-\rho}\\ &\le \big\{\langle\xi\rangle^{-2\delta}\{\langle\xi\rangle-\langle\eta\rangle\}^2\big\}^{\frac{1-\rho}{2(1-\delta)}}\\ &\le 9\Delta_r(X,Y)^{\frac{1-\rho}{2(1-\delta)}}, \end{aligned}$$

la vérification de l'inégalité centrale se ramenant, pour $t \in [0,1]$, à celle de

$$1-t^{1-\rho} \leq (1-t)^{(1-\rho)/(1-\delta)}.$$

(b) *Dans le cas général* ($0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$ *et* $\delta < 1$), *la métrique est dominée par une métrique fortement tempérée*, la métrique de type (δ, δ) par exemple.

Notre premier objectif est d'obtenir, pour g (dominée par une métrique) fortement tempérée, l'inversibilité dans $S(1,g)$ de $(1-b)$ lorsque $\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1$. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants pour estimer les semi-normes de la série de Neumann.

LEMME 7.4. — *On a*

$$\begin{aligned}
(62)\qquad & \forall n_0,\ \exists C_0,\ \exists k_0,\ \forall n_1,\ \exists C_1,\ \exists k_1,\\
& \forall p,\ \forall J \subset \{0,\dots,p-1\},\ \forall (c_j),\ \forall (Y_j),\\
& \big\|(c_0 \# c_1 \# \cdots \# c_p)^w\big\|_{\mathcal{L}(L^2)}\\
& \quad \leq C_0^{p-|J|} C_1^{|J|+1} \|c_0\|_{k_1\,;\,\mathrm{Conf}(Y_0)}\\
& \qquad \Big(\sup_{\substack{j \notin K\\ j \neq 0}} \|c_j\|_{k_0\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}\Big)^{p-|J|} \Big(\sup_{\substack{j \in K\\ j \neq 0}} \|c_j\|_{k_1\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}\Big)^{|J|}\\
& \qquad\qquad \prod_{0}^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_0} \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1},
\end{aligned}$$

où les c_j *appartiennent à* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ *et les* Y_j *à* $\mathbb{R}^{2n}$, *où* $|J|$ *désigne le cardinal de* J *et où on a posé* $K = \{j \in \{0,\dots,p\} \mid j \in J$ ou $j-1 \in J\}$.

Nous utiliserons les deux écritures suivantes, en notant $\mathcal{A}$ le membre de gauche de (62) :

$$\mathcal{A} \leq \big\|(c_0 \# c_1)^w\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \big\|(c_2 \# c_3)^w\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \cdots,$$

$$\mathcal{A} \leq \big\|c_0^w\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \big\|(c_1 \# c_2)^w\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \cdots.$$

Les termes $\|c_0\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ et $\|c_p\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ sont majorés directement par (17). Quant au terme $\|(c_j \# c_{j+1})^w\|_{\mathcal{L}(L^2)}$, il se majore d'après (17) par $C\|c_j \# c_{j+1}\|_{k\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}$, que l'on majore à son tour, en utilisant le théorème de biconfinement 2.6, par

$$C_0 \|c_j\|_{k_0\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)} \|c_{j+1}\|_{k_0\,;\,\mathrm{Conf}(Y_{j+1})} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-2n_0} \qquad \text{pour } j \notin J,$$

$$C_1 \|c_j\|_{k_1\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)} \|c_{j+1}\|_{k_1\,;\,\mathrm{Conf}(Y_{j+1})} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-2n_0-2n_1} \qquad \text{pour } j \in J,$$

où $C_0 \geq 1$ et k_0 ne dépendent que de n_0 tandis que $C_1 \geq C_0$ et $k_1 \geq k_0$ dépendent aussi de n_1. Il suffit ensuite de prendre la moyenne géométrique des deux majorations de $\mathcal{A}$ pour obtenir (62).

LEMME 7.5. — *On suppose la métrique g fortement tempérée. Il existe des constantes C_0 et k_0 ne dépendant que de g, et pour chaque k des constantes C_1, k_1 et N_1 telles que l'on ait, pour $b \in S(1,g)$,*

$$\left\|\left|(b^w)^p\right|\right\|_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq C_1(p+1)^{N_1}\Big(C_0\|b\|_{k_0\,;\,S(1,g)}\Big)^{p-2k}\Big(C_1\|b\|_{k_1\,;\,S(1,g)}\Big)^{2k}$$

On décomposera b en $\int b_Y|g_Y|^{1/2}\mathrm{d}Y$. Par définition des semi-normes de $\mathrm{Op}\,S(1,g)$, on a

$$\left\|\left|(b^{\#p})^w\right|\right\|_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq \sup_{Y_0,\nu}\int \|\mathcal{T}(Y_0,\nu;Y_1,\dots,Y_p)\|_{\mathcal{L}(L^2)} |g_{Y_1}|^{1/2}\,\mathrm{d}Y_1\cdots|g_{Y_p}|^{1/2}\,\mathrm{d}Y_p, \tag{63}$$

en posant

$$\mathcal{T}(Y_0,\nu;Y_1,\dots,Y_p) = (\mathrm{ad}\,L_1)\circ\cdots\circ(\mathrm{ad}\,L_{k'})\cdot\Big(\theta^w_{Y_0,\nu}\circ b^w_{Y_1}\circ\ldots\circ b^w_{Y_p}\Big),$$

où $k' \leq k$ et où les L_α sont les quantifiés de Weyl de formes linéaires $X \mapsto [T_\alpha, X]$ avec $g_{Y_0}(T_\alpha) \leq 1$, en choisissant pour chaque (Y_0,ν) les L_α qui rendent maximum la norme du membre de droite.

En utilisant la relation $(\mathrm{ad}\,L)\cdot(a^w\circ b^w) = (\partial_T a)^w\circ b^w + a^w\circ(\partial_T b)^w$, on peut écrire $\mathcal{T}(Y_0,\nu;Y_1,\dots,Y_p)$ comme une somme d'au plus $(p+1)^k$ termes du type suivant

$$\mathcal{U} = (c_0 \# c_1 \# \cdots \# c_p)^w,$$

où (en convenant de remplacer b_{Y_0} par $\theta_{Y_0,\nu}$) on a

$$c_j = \Big(\prod_{\alpha\in A_j}\partial_{T_\alpha}\Big)b_{Y_j}, \tag{64}$$

les A_j étant des sous-ensembles disjoints, éventuellement vides (auquel cas $c_j = b_{Y_j}$), de $\{1,\dots,k\}$. En notant $J = \{j \mid A_j \neq \emptyset\}$, on a $|J| \leq k$. Nous poserons :

$$d_j = \begin{cases} c_j = b_{Y_j} & \text{pour } j \notin J,\\ \prod_{\alpha\in A_j} g_{Y_j}(T_\alpha)^{-1/2}c_j & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a d'après (58)

$$g_{Y_j}(T_\alpha) \leq C\big(1 + d(Y_0, Y_j)\big)^N \leq C(p+1)^{N-1} \sum_{l=0}^{j-1} \big(1 + d(Y_l, Y_{l+1})\big)^N,$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire et une inégalité classique.

En majorant $(1+d)^N$ par $\Delta_r^{N^2}$, il résulte de la relation ci-dessus que chaque terme $\mathcal{U}$ s'écrit comme somme d'au plus $(p+1)^k$ termes du type suivant

$$\mathcal{V} = V(d_0 \# d_1 \# \cdots \# d_p)^w$$

avec

$$|V| \leq C'^k (p+1)^{kN/2} \prod \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{m_j N^2}$$

où C' ne dépend que de g et où on a $\sum m_j \leq k$. L'ensemble J' des j tels que $m_j \neq 0$ vérifie $|J'| \leq k$.

Pour n_0 et n_1 à choisir ultérieurement, le LEMME 7.4 appliqué à l'ensemble J' nous fournit C_0, k_0 (dépendant de n_0), $C_1 \geq C_0$ et $k_1 \geq k_0$ dépendant aussi de n_1 tels que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq{} & C_0^{p-k} (C'C_1)^{k+1} C_2 (p+1)^{kN/2} \\ & \Big(\sup_{\substack{j \notin K' \\ j \neq 0}} \|d_j\|_{k_0\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}\Big)^{p-k} \Big(\sup_{\substack{j \in K' \\ j \neq 0}} \|d_j\|_{k_1\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}\Big)^k \\ & \prod_0^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_0} \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1 + kN^2} \end{aligned}$$

avec $|K'| \leq 2k$, la constante C_2, qui dépend de k, majorant les semi-normes de confinement des $\theta_{Y,\nu}$.

Posons $B_\ell = \sup_Y \|b_Y\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(Y)}$, ces quantités ne dépendant que des semi-normes de b dans $S(1, g)$. Il reste à remarquer que

$$\|d_j\|_{\ell\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)} \leq \|b_{Y_j}\|_{\ell+k\,;\,\mathrm{Conf}(Y_j)}$$

pour $j \in J$. En posant $k_2 = k_1 + k$, le cardinal de J étant au plus égal à k, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq{} & C_0^{p-k} (C'C_1)^{k+1} C_2 (p+1)^{kN/2} B_{k_0}^{p-2k} B_{k_2}^{2k} \\ & \prod_0^{p-1} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_0} \prod_{j \in J} \Delta_r(Y_j, Y_{j+1})^{-n_1 + kN^2}. \end{aligned}$$

Choisissons n_0 indépendamment de k, ce qui détermine C_0 et k_0, pour que (voir (13)) :

$$\sup_Y \int \Delta_r(Y,Z)^{-n_0}|g_Z|^{1/2}\mathrm{d}Z = C_3 < \infty.$$

Pour chaque valeur de k, choisissons $n_1(k) = kN^2$, ce qui détermine $C_1(k)$, $C_2(k)$ et $k_2(k)$. En intégrant successivement par rapport à $Y_p,\dots,Y_1$, on obtient :

$$\int \|\mathcal{V}\|_{\mathcal{L}(L^2)}|g_{Y_1}|^{1/2}\,\mathrm{d}Y_1\cdots|g_{Y_p}|^{1/2}\,\mathrm{d}Y_p \\ \leq C'C_1C_2(C_0C_3B_{k_0})^{p-2k}(C'C_1C_3B_{k_2})^{2k}(p+1)^{kN/2}.$$

En revenant à (63), avec $\mathcal{T} = \sum\mathcal{U} = \sum\sum\mathcal{V}$, on obtient

$$|||(b^{\# p})^w|||_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} \\ \leq C'C_1C_2(C_0C_3B_{k_0})^{p-2k}(C'C_1C_3B_{k_2})^{2k}(p+1)^{k(2+N/2)},$$

où C_0, k_0 et C_3 ne dépendent pas de k. Il ne reste qu'à majorer les B_l par les semi-normes de b dans $S(1,g)$ et à changer le nom des constantes pour achever la démonstration du LEMME 7.5.

THÉORÈME 7.6. — *Supposons que g soit (dominée par une métrique) fortement tempérée. Soit $a \in S(1,g)$ tel que $(a^w)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(L^2)$. Il existe alors $a' \in S(1,g)$ tel que $a \# a' = a' \# a = 1$.*

Plaçons nous d'abord dans le cas où g est fortement tempérée, et démontrons que $(1-b)$ est inversible dans $S(1,g)$ lorsque $b \in S(1,g)$ avec $\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1$. Pour chaque entier k, et pour un $\theta < 1$ à déterminer ultérieurement, il existe d'après le THÉORÈME 5.5 (b) des constantes C et κ telles que

$$|||(b^w)^p|||_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq C|||(b^w)^p|||^{1-\theta}_{0\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)}|||(b^w)^p|||^{\theta}_{\kappa\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)}.$$

En majorant $|||(b^w)^p|||_{\kappa\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)}$ grâce au LEMME 7.5 et en utilisant la relation

$$|||(b^w)^p|||_{0\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} = \sup\big\|\theta^w_{Y,\nu}(b^w)^p\big\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C'\|b^w\|^p_{\mathcal{L}(L^2)},$$

on obtient :

$$|||(b^w)^p|||_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)} \leq CC'^{1-\theta}C_1^{\theta}(p+1)^{N_1\theta}\big(C_0\|b\|_{k_0\,;\,S(1,g)}\big)^{(p-2\kappa)\theta} \\ \big(C_1\|b\|_{k_1\,;\,S(1,g)}\big)^{2\kappa\theta}\|b^w\|^{p(1-\theta)}_{\mathcal{L}(L^2)}.$$

Nous pouvons maintenant choisir θ assez petit pour que l'on ait

$$\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)}^{(1-\theta)}\Big(C_0\|b\|_{k_0\,;\,S(1,g)}\Big)^{\theta} < 1,$$

ce choix ne dépendant que de C_0 et k_0 et pouvant donc être fait indépendamment de k. La série de terme général $|||(b^w)^p|||_{k\,;\,\mathrm{Op}\,S(1,g)}$ converge alors pour tout k. La série $\sum b^{\# p}$ converge donc dans $S(1,g)$, ce qui montre que $(1-b)$ est inversible dans $S(1,g)$.

Si maintenant $a \in S(1,g)$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$, il suffit de montrer l'inversibilité dans $S(1,g)$ de $\bar{a} \# a$. L'opérateur $\mathcal{A} = \bar{a}^w a^w$ est autoadjoint, inversible et positif dans L^2 et, avec $0 < c < C$, on a donc :

$$c\|u\|_{L^2}^2 \leq (\mathcal{A}u \mid u)_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}^2.$$

On peut écrire $\mathcal{A} = C(I - b^w)$ avec $\|b^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq (C-c)/C$ et on est ramené au cas précédent. Cela achève la démonstration du théorème dans le cas où g est fortement tempérée.

Dans le cas où g est dominée par une métrique fortement tempérée $\tilde{g}$, la démonstration du théorème est une pure question de calcul symbolique pour $\tilde{g}$. Soit donc $a \in S(1,g) \subset S(1,\tilde{g})$ inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$. D'après ce qui précède, il existe $a' \in S(1,\tilde{g})$ tel que $a \# a' = a' \# a = 1$.

Pour P et T appartenant à $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $g_P(T) \leq 1$, nous poserons $M_{P,T}(Y) = g_Y(T)^{1/2}$. Il résulte de l'hypothèse (61) que les $M_{P,T}$ constituent une famille de poids pour la métrique $\tilde{g}$, dont les constantes de lenteur et de tempérance sont uniformes en P et T. D'autre part, la fonction $\partial_T a$ appartient à $S(M_{P,T}, g) \subset S(M_{P,T}, \tilde{g})$ avec des semi-normes majorées uniformément en P et T.

Appliquons (16), assorti de la remarque 2.8, à la formule

$$\partial_T a' = -a' \# \partial_T a \# a'.$$

Il en résulte que les $\|\partial_T a'\|_{k\,;\,S(M_{P,T},\tilde{g})}$ sont majorés par des constantes C_k indépendantes de P et T. En particulier, pour $k = 0$, on obtient la majoration $|\partial_T a'(P)| \leq C_0$ dès que $g_P(T) \leq 1$, ce qui prouve que l'on a $\|a'\|_{1\,;\,S(1,g)} < \infty$.

On raisonne de même à partir de la formule

$$\begin{aligned}\partial_{T_1}\partial_{T_2} a' = a' \# \partial_{T_1} a \# a' \# \partial_{T_2} a \# a' \\ - a' \# (\partial_{T_1}\partial_{T_2} a) \# a' + a' \# \partial_{T_2} a \# a' \# \partial_{T_1} a \# a',\end{aligned}$$

avec $g_P(T_j) \leq 1$, pour montrer que le membre de gauche appartient à $S(M_{P,T_1} M_{P,T_2}, \tilde{g})$ uniformément en P, T_1, T_2, et donc que $\|a'\|_{2\,;\,S(1,g)} < \infty$. On conclut par récurrence.

COROLLAIRE 7.7. — *On suppose la métrique g (dominée par une métrique) fortement tempérée. Soient M un poids admissible et a un élément de $S(M,g)$. Pour qu'il existe $a' \in S(M^{-1},g)$ avec $a \# a' = a' \# a = 1$, il suffit que pour un poids admissible M_1, l'opérateur a^w soit inversible en tant qu'opérateur de $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.*

En effet, en introduisant des symboles inversibles $b \in S(M_1^{-1},g)$ et $c \in S(M_1/M,g)$, l'opérateur de symbole $b \# a \# c$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$, et d'après le théorème précédent, il possède un inverse d^w appartenant à $\operatorname{Op} S(1,g)$. Le symbole $c \# d \# b$ appartient à $S(M^{-1},g)$ et est inverse de a.

Les hypothèses de cette section permettent de donner des espaces de Sobolev une définition « à la Littlewood-Paley » plus agréable que celle que nous avons donnée dans la section 4.

THÉORÈME 7.8. — *Supposons la métrique g (dominée par une métrique) fortement tempérée, et soit φ_Y une g-partition de l'unité à support dans les $U_{Y,r}$.*

(a) *Il existe une famille ψ_Y uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ telle que l'on ait :*

$$\int \psi_Y \# \varphi_Y |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y = 1.$$

(b) *Pour que u appartienne à $H(M)$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int M(Y)^2 \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y < \infty.$$

Il est clair que (a) entraîne (b), le premier membre de la relation ci-dessus étant un cas particulier de la définition 4.1 de $\|u\|_{H(M)}^2$, en choisissant $\psi_{Y,0} = \psi_Y$, $\theta_{Y,0} = \varphi_Y$ et $\psi_{Y,\nu} = \theta_{Y,\nu} = 0$ pour $\nu \geq 1$. La démonstration de la partie (a) résultera du lemme suivant.

LEMME 7.9. — *L'opérateur $A = \int (\varphi_Y^w)^2 |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2)$.*

Admettons provisoirement ce lemme. D'après le THÉORÈME 7.6, l'inverse de A est de la forme c^w avec $c \in S(1,g)$. On a donc

$$1 = \int c \# \varphi_Y \# \varphi_Y |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y.$$

Il suffit de poser $\psi_Y = c \# \varphi_Y$, cette famille étant uniformément confinée d'après (15), pour achever la démonstration du théorème.

7.10. Démonstration du lemme 7.9.

Soit $D = \{(Y,Z) \mid \sup(g_Y(Y-Z), g_Z(Y-Z)) \leq R^2\}$, où R sera déterminé ultérieurement. Les fonctions φ_Y étant réelles, les opérateurs φ_Y^w sont autoadjoints et on a donc

$$\|u\|_{L^2}^2 = (Bu \mid u)_{L^2} + (Cu \mid u)_{L^2}, \tag{65}$$

en posant

$$B = \iint_{(Y,Z)\in D} \varphi_Z^w \varphi_Y^w |g_Y|^{1/2} dY |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z,$$

$$C = \iint_{(Y,Z)\notin D} \varphi_Z^w \varphi_Y^w |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

D'après le lemme de Cotlar, on a

$$\|C\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 \leq \sup_{(S,T)\notin D} \iint_{(Y,Z)\notin D} \|\varphi_S^w \varphi_T^w \varphi_Z^w \varphi_Y^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

En utilisant (17) et le THÉORÈME 2.6, on a donc pour tout N :

$$\|C\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 \leq \mathrm{C^{te}} \sup_{S,T} \iint_{(Y,Z)\notin D} \Delta_r(S,T)^{-N} \Delta_r(T,Z)^{-N} \Delta_r(Z,Y)^{-N} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z.$$

En utilisant la majoration $1 + g_Z(Y-Z) \leq C_0 \Delta_r(Y,Z)^{N_0}$ (voir la relation (3.2.5) de [B&L]) et la relation symétrique, on voit que l'on a l'inégalité $\Delta_r(Z,Y)^{-1} \leq \mathrm{C^{te}} R^{-2/N_0}$ sur le domaine d'intégration. En choisissant N assez grand pour que Δ_r^{-N+1} soit sommable, l'intégrale ci-dessus est majorée par $\mathrm{C^{te}} R^{-2/N_0}$ et on peut donc fixer R pour que $\|C\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \frac{1}{2}$. D'après (65), on a donc :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq 2\left|(Bu \mid u)_{L^2}\right| \leq 2 \iint_{(Y,Z)\in D} \|\varphi_Y^w u\|_{L^2} \|\varphi_Z^w u\|_{L^2} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z. \tag{66}$$

Les deux quantités $\sup_Y \int_{(Y,Z)\in D} |g_Z|^{1/2} \mathrm{d}Z$ et $\sup_Z \int_{(Y,Z)\in D} |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y$ étant finies, en majorant $\|\varphi_Y^w u\|_{L^2} \|\varphi_Z^w u\|_{L^2}$ par $\|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 + \|\varphi_Z^w u\|_{L^2}^2$ dans l'intégrale de droite de (66), on obtient

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \mathrm{C^{te}} \int \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} \mathrm{d}Y = \mathrm{C^{te}} (Au \mid u)_{L^2},$$

ce qui achève la démonstration du LEMME 7.9.

BIBLIOGRAPHIE

[Be] BEALS (R.). — *Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators*, J. An. Math., t. **39**, 1981, p. 130–187.

[B&L] BONY (J.-M.) et LERNER (N.). — *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. **22**, 1989, p. 377–433.

[Br] BRUYANT (F.). — *Estimations pour la composition d'un grand nombre d'opérateurs pseudo-différentiels et applications*, Thèse Univ. Reims, 1979.

]&C&X] CANCELIER (C.), CHEMIN (J.-Y.) et XU (C.-J.). — *Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques*, Prépublication École Polytechnique, **1045**, 1992.

[C&M] COIFMAN (R.R.) et MEYER (Y.). — *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, Soc. Math. France, t. **57**, 1978.

[He] HELFFER (B.). — *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Astérisque, Soc. Math. France, t. **112**, 1984.

[Hö] HÖRMANDER (L.). — *The analysis of linear partial differential operators*. — Springer-Verlag, 1985.

[Le] LERNER (N.). — *Sur les espaces de Sobolev généraux associés aux classes récentes d'opérateurs pseudo-différentiels*, C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, t. **289**, 1979, p. 663–666.

[Ue] UEBERBERG (J.). — *Zur Spektralinvarianz von Algebren von Pseudodifferentialoperatoren in der L^p-Theorie*, Manuscripta Mathematica, t. **61**, 1988, p. 459–475.

[Un] UNTERBERGER (A.). — *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels*, Ann. Inst. Fourier, t. **29-3**, 1979, p. 201–221.