BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY WALLET

Singularité analytique et perturbation singulière en dimension 2

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 2 (1994), p. 185-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_2_185_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 185–208.

SINGULARITÉ ANALYTIQUE ET PERTURBATION SINGULIÈRE EN DIMENSION 2

PAR

GUY WALLET

RÉSUMÉ. — Étant donnée une famille d'équations différentielles $(\mathcal{E}_\alpha)$: $\varepsilon \mathrm{d}u/\mathrm{d}z = f(z,u,\alpha)$ dans $\mathbb{C}^2$ avec un petit paramètre ε et un paramètre de contrôle α, on s'intéresse à l'existence locale d'un couple (α_*, u_*) possédant un développement asymptotique en puissances de ε et tel que u_* soit une solution de $(\mathcal{E}_{\alpha_*})$. Le résultat principal de cette étude établit un lien entre l'existence d'un tel couple et une propriété d'un déploiement de la singularité de la première approximation de f.

ABSTRACT. — Given a family of ordinary differential equations $(\mathcal{E}_\alpha)$: $\varepsilon \mathrm{d}u/\mathrm{d}z = f(z,u,\alpha)$ in $\mathbb{C}^2$ with a small parameter ε and a control parameter α, we are interested in the local existence of a pair (α_*, u_*) which have an asymptotic expansion in power of ε and such that u_* is a solution of $(\mathcal{E}_{\alpha_*})$. The main result of our study establishes a main connection between the existence of such a pair and a property of an unfolding of the singularity of the first approximation of the function f.

1. Introduction

Un problème habituel de perturbation singulière consiste à prouver l'existence de solutions ayant un comportement asymptotique donné, pour une équation différentielle

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = f(z,u,\varepsilon)$$

ou une famille de telles équations, lorsque ε est un petit paramètre.

Par exemple, on peut s'intéresser à l'existence locale de solutions qui possèdent un développement selon une échelle asymptotique imposée.

(*) Texte reçu le 7 septembre 1992.
G. WALLET, Université de la Rochelle, Département de Mathématiques, Pôle Sciences et Technologie, avenue Marillac, 17042 La Rochelle CEDEX 1.
Classification AMS : 26 E 35, 34 D 15, 34 E 15.

Inversement, on peut chercher l'éventuelle échelle permettant de développer les solutions satisfaisant une condition limite fixée. Cette problématique est très fréquente et a conduit l'analyse asymptotique [16], [17], [26] à distinguer de nombreuses classes de solutions. C'est le cas des solutions canards dans le plan réel [1], [2], [27] et des solutions surstables dans le champ complexe [24], [25]. Des études faites sur ce sujet [9], [14], [15] et [24], il se dégage l'idée que les conditions d'existence de telles solutions doivent être en rapport avec la nature de la singularité locale que présente la partie principale de la fonction f.

L'objet de ce travail est, en réponse à une question de J.-P. RAMIS, de tirer au clair cette correspondance pour une large classe d'équations différentielles analytiques complexe, lorsque l'échelle imposée est $\{\varepsilon^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et que la variable u est de dimension complexe un. Pour cela, il est particulièrement commode de poser ce problème asymptotique dans le langage des germes de fonctions qui permet habituellement, avec ses aspects algébriques et géométriques, la description et et la classification des singularités des applications différentiables. Le principal résultat que l'on se propose d'obtenir est d'établir un lien entre l'existence de ces solutions et une propriété d'un déploiement (ou d'un jet) d'une fonction associée à la singularité.

Enfin, le cadre choisi est celui de l'asymptotique non standard [13], [20] et [23] qui offre le réel confort « d'économiser » un paramètre, dans un problème généralement multi-paramétré, en fixant ε à une valeur infiniment petite. Autre avantage, on doit à A. ROBINSON — créateur de l'analyse non standard — une manière très efficace d'énoncer les propriétés semi-locales des fonctions analytiques complexes ([21, chap. 6], [4]). Cet outil se révèle particulièrement intéressant pour traiter les problèmes d'ordre de grandeur des fonctions holomorphes [4], [5], [6], [24].

2. Quelques notions asymptotiques dans les algèbres de germes

2.1. Deux ordres de grandeur pour les germes. — On considère une fois pour toute un nombre complexe ε infiniment petit et non nul. Dans les définitions suivantes, n désigne un entier standard et a un élément standard de $\mathbb{C}^n$.

L'ensemble des germes en a des fonctions analytiques de $(\mathbb{C}^n, a)$ dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{O}_a$. Un élément φ de $\mathcal{O}_a$ s'identifie à une série convergente $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha(z-a)^\alpha$ à coefficients complexes. Pour ce qui est des notations, on ne distinguera pas un germe de l'une quelconque des fonctions locales qui le représentent.

DÉFINITION 1.

• Un élément φ de $\mathcal{O}_a$ est *petit* s'il admet un représentant défini sur une boule $B(a,R)$ de rayon standard R strictement positif de sorte que :

$$\forall z \in B(a,R), \quad \varphi(z) \simeq 0.$$

On note $\emptyset$ un petit germe quelconque et on dit que φ est une *perturbation* de ψ si $\varphi - \psi = \emptyset$.

• Un élément φ de $\mathcal{O}_a$ est *ε-exponentiellement petit* s'il existe des nombres réels standard strictement positifs R et A tels que φ possède un représentant défini sur $B(a,R)$ de sorte que :

$$\forall z \in B(a,R), \quad \left|\varphi(z)\right| \leq \exp\Bigl(-\frac{A}{|\varepsilon|}\Bigr).$$

Ces propriétés doivent pouvoir se lire sur la suite des coefficients de la série entière qui code un germe donné. Ainsi, lorsque la dimension n est égale à 1, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1.

• *Le germe $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(z-a)^k$ est petit dans $\mathcal{O}_a$ si et seulement s'il existe un nombre réel standard $R > 0$ tel que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k|R^k \simeq 0.$$

• *Le germe $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(z-a)^k$ est ε-exponentiellement petit dans $\mathcal{O}_a$ si et seulement s'il existe des nombres réels standard $R > 0$ et $A > 0$ tels que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k|R^k \leq \exp\Bigl(-\frac{A}{|\varepsilon|}\Bigr).$$

Démonstration. — La nécessité de ces caractérisations découle de la formule de Cauchy. Elles sont suffisantes par comparaison de la somme de la série entière avec une série géométrique sur une boule $B(a,r)$ avec r standard tel que $0 < r < R$. □

On peut remarquer que ces deux caractérisations conduisent naturellement à associer à tout germe $\varphi(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(z-a)^k$ dans $\mathcal{O}_a$, par analogie avec son rayon de convergence R_c, deux éléments standard positifs R_p et R_e de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que, pour tout nombre réel standard R, la relation $0 \leq R < R_p$ soit équivalente à

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k|R^k \simeq 0$$

et que la relation $0 \leq R < R_e$ soit équivalente à l'existence d'un nombre réel standard $A > 0$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k| R^k \leq \exp\Bigl(-\frac{A}{|\varepsilon|}\Bigr).$$

On a bien sûr $0 \leq R_e \leq R_p \leq R_c$ et le germe φ est petit (resp. ε-exponentiellement petit) si et seulement si $R_p > 0$ (resp. $R_e > 0$). Ainsi, R_p (resp. R_e) est la borne supérieur de l'ensemble standard dont les éléments standard R sont tels que φ possède un représentant sur $B(a,R)$ vérifiant

$$\forall z \in B(a,R), \quad \varphi(z) \simeq 0$$

(resp. il existe un nombre standard $A > 0$ pour lequel

$$\forall z \in B(a,R), \quad \bigl|\varphi(z)\bigr| \leq \exp\Bigl(-\frac{A}{|\varepsilon|}\Bigr).$$

Pour le germe en 0 de $\exp(z/\varepsilon)$, on a $R_p = R_e = 0$, alors que pour celui de $\exp(\varepsilon z) - 1$ on a $R_e = 0$ et $R_p = +\infty$. Sur le bord du disque de centre a et de rayon R_p, la fonction φ manifeste en général un comportement assez «sauvage» : elle passe brutalement de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

PROPOSITION 2. — *Dans le cas où $0 \ll R_p \ll R_c$, il existe un nombre complexe z tel que $|z - a| \simeq R_p$ pour lequel $\varphi(z)$ est infiniment grand (où $x \ll y$ signifie $x < y$ et $x \not\simeq y$).*

Démonstration. — Elle découle du théorème de Robinson [21], [4] selon lequel une fonction holomorphe f définie sur un domaine contenant le halo d'un point z_0 telle que $f(z_0)$ soit limité ne possède que deux comportements possibles :

- ou bien elle est limitée sur le halo de z_0 et alors elle admet une ombre analytique sur un voisinage standard de z_0 ;

- ou bien elle prend au moins une fois une valeur non limitée dans le halo de z_0 et alors l'image du halo de z_0 contient tous les nombres complexes limités sauf sauf éventuellement une partie du halo d'un point. □

2.2. L'algèbre des germes ε-développables.

DÉFINITION 2.

• Un élément φ de $\mathcal{O}_a$ est *ε-développable* s'il existe une suite standard $(\varphi_{[n]})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{O}_a$ telle que, pour tout nombre entier standard n

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \varphi_{[k]} + \varepsilon^n \emptyset.$$

Une telle suite est unique. Le germe standard $\varphi_{[0]}$ est appelé l'*ombre* de φ.

• Un nombre complexe z est *ε-développable* si le germe de valeur constante z l'est, c'est-à-dire s'il existe une suite standard $(z_{[n]})_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que, pour tout nombre entier standard n

$$z = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k z_{[k]} + \varepsilon^n \emptyset.$$

Ces notions constituent la version non standard des développements asymptotiques selon l'échelle $\{\varepsilon^n\}_{n\geq 0}$ et ils ont été introduits par F. DIENER [10] lors des études sur les canards.

On désigne par $\mathbb{C}_\varepsilon$ le système des nombres complexes ε-développables. Le terme *système* est ici utilisé pour qualifier un type d'entités qui n'est pas nécessairement identifiable à un ensemble formel. Que certains systèmes produits par l'asymptotique non standard ne soient pas des ensembles ne présente aucun inconvénient pour les calculs qui vont suivre. Ces derniers dépendent d'une structure algébrique intéressante (c'est-à-dire de la donnée de règles de calculs précises et riches) dont l'existence ne nécessite pas un support strictement ensembliste. Ainsi, pour les lois induites par celles de $\mathbb{C}$, le système $\mathbb{C}_\varepsilon$ est un anneau local d'idéal maximal (ε) engendré par ε.

Le système des éléments de $\mathcal{O}_a$ qui sont ε-développables est noté $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$. C'est une $\mathbb{C}_\varepsilon$-algèbre locale d'idéal maximal :

$$\mathcal{M}_{a,\varepsilon} = \big(z_1 - a_1, \dots, z_n - a_n, \varepsilon\big) = \big\{\varphi \in \mathcal{O}_{a,\varepsilon} \mid \varphi(a) \simeq 0\big\}.$$

En fait, $\mathcal{M}_{a,\varepsilon}$ est l'image réciproque de (ε) par le morphisme d'évaluation en a de $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ dans $\mathbb{C}_\varepsilon$. Le système $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ et son idéal (ε) engendré par ε sont stables par dérivation du fait des inégalités de Cauchy. Enfin on remarque que dans $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$, la relation $\varphi = \emptyset$ est équivalente à $\varphi \in (\varepsilon)$.

Si un élément φ de $\mathcal{O}_a$ est ε-exponentiellement petit, il est ε-développable et son développement est plat (c'est-à-dire réduit à la suite nulle). Cependant, il existe des germes ε-développables qui sont plats bien que non ε-exponentiellement petits : par exemple le germe constant de valeur ε^ω où ω est un nombre entier infiniment grand choisi de sorte que $\omega|\varepsilon|\ln(|\varepsilon|)$ soit infiniment petit. Le système des éléments de $\mathcal{O}_a$ qui sont ε-exponentiellement petits est noté $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}^{\exp}$; c'est un idéal de $\mathcal{O}_{a,\varepsilon}$ qui est stable par dérivation.

Pour des germes ε-développables, il existe une notion de composition plus générale que la classique : $\varphi(\varphi_1(z),\dots,\varphi_m(z))$ est bien défini dans $\mathcal{O}_{b,\varepsilon}$ lorsque φ est dans $\mathcal{O}_{c,\varepsilon}$ avec $c=(c_1,\dots,c_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ et que chaque φ_k appartient à $\mathcal{O}_{b,\varepsilon}$ et vérifie $\varphi_k(b)\simeq c_k$.

3. Un problème de perturbation singulière

Les données du problème sont :

- un nombre standard $N\in\mathbb{N}$;
- un élément standard $a_0=(z_0,u_0,\alpha_0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^N$; on note b_0 le point (z_0,u_0) de $\mathbb{C}^2$, c_0 le point (z_0,α_0) de $\mathbb{C}^{N+1}$;
- un germe ε-développable $f\in\mathcal{O}_{a_0,\varepsilon}$ dont l'ombre $f_{[0]}$ est non nulle mais vérifie $f_{[0]}(a_0)=0$.

On désigne par $(\mathcal{E})$ la famille dans $\mathcal{O}_{a_0}$ d'équations différentielles à N paramètres suivante :

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=f(z,u,\alpha).$$

Le «temps» z est complexe et le paramètre est α. Il faut noter que, privilège de l'asymptotique non standard, ε n'est pas un paramètre mais une constante. Puisque ε est infiniment petit, on est dans une situation de perturbation singulière et l'intérêt se porte sur les solutions qui sont des germes ε-développables.

Définition 3. — Une *solution surstable* de $(\mathcal{E})$ est la donnée d'un élément α^* de $\mathbb{C}_\varepsilon^N$ et d'un germe φ^* dans $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}$ tels que :

- $\alpha^*\simeq\alpha_0$, c'est-à-dire $\alpha^*_{[0]}=\alpha_0$;
- $\varphi^*(z_0)\simeq u_0$, c'est-à-dire $\varphi^*_{[0]}(z_0)=u_0$;
- $\varepsilon\mathrm{d}\varphi^*/\mathrm{d}z(z)=f(z,\varphi^*(z),\alpha^*)$ dans $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}$.

On dit aussi que α^* est une *valeur de surstabilité* de $(\mathcal{E})$ et que (α^*,φ^*) est une *solution surstable* de $(\mathcal{E})$.

Si (α^*, φ^*) est une solution surstable, la considération des termes de degré zéro en ε dans l'équation conduit à l'identité $f_{[0]}(z, \varphi^*_{[0]}(z), \alpha_0) = 0$ dans $\mathcal{O}_{z_0}$. Ainsi, le graphe de l'ombre de φ^* apparaît comme une branche lisse d'un ensemble analytique associé à l'équation différentielle. Cela suggère d'introduire les notions suivantes.

DÉFINITION 4.

• L'*ensemble lent* de $(\mathcal{E})$ est le germe au point $b_0 = (z_0, u_0)$ de $\mathbb{C}^2$ de l'ensemble analytique standard

$$\mathcal{Z}_0 = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid f_{[0]}(z, u, \alpha_0) = 0\}.$$

• Une *courbe lente* $\mathcal{C}_0$ de $(\mathcal{E})$ est une partie lisse de l'ensemble lent qui est le graphe d'un élément φ_0 de $\mathcal{O}_{z_0}$. Le germe φ_0 est nécessairement standard et vérifie $\varphi_0(z_0) = u_0$.

• Une solution surstable (α^*, φ^*) est dite *subordonnée à la courbe lente* $\mathcal{C}_0$ si φ^* est une perturbation du germe φ_0 dont $\mathcal{C}_0$ est le graphe. En d'autres termes, on a $\varphi^*_{[0]} = \varphi_0$, ce qui signifie qu'en première approximation, le graphe de la solution φ^* se confond avec la courbe lente.

Étant donnée une solution surstable (α^*, φ^*) subordonnée à la courbe lente $\mathcal{C}_0$, il est naturel d'appeler *rayon de surstabilité* de cette solution le nombre R_p associé au petit germe $(\varphi^* - \varphi_0)$ par le procédé de la partie 2.1. La détermination du rayon de surstabilité est un substitut analytique complexe au calcul de la butée pour les canards des systèmes dynamiques à « temps réel » réels [3], [12], [19].

Le problème que l'on se pose est celui de l'existence des solutions surstables subordonnées à une courbe lente donnée $\mathcal{C}_0$ *elle-même graphe d'un germe* φ_0.

Il apparaît que la difficulté à obtenir de telles solutions (ou encore leur caractère fugace) est intimement lié à la nature de la singularité b_0 de l'ensemble lent $\mathcal{Z}_0$. Deux cas ont été principalement étudiés en fonction de $\partial f_{[0]}/\partial u(z, u, \alpha_0)$.

Cas 1 : $\dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial u}(a_0) \neq 0$. (Voir [18], [19] et [22].)

Dans ce cas, l'ensemble lent $\mathcal{Z}_0$ n'a pas de réelle singularité en b_0 et il est égal à la courbe lente $\mathcal{C}_0$. Alors, tout α_* dans $\mathbb{C}^N_\varepsilon$ d'ombre α_0 est une valeur de surstabilité ; on dit que le phénomène de surstabilité est *robuste.* Aucune restriction sur la dimension de l'espace des paramètres n'est nécessaire ; en particulier, les solutions surstables existent même lorsque N est nul, c'est-à-dire en l'absence de paramètre.

Cas 2 : $\dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial u}(a_0) = 0$ *et le point* b_0 *est un zéro simple de la fonction holomorphe restriction à* $\mathcal{C}_0$ *de* $\partial f_{[0]}/\partial u(z, u, \alpha_0)$. (Voir [7] et [24].)

Cette fois, le point b_0 est bien une singularité de $\mathcal{Z}_0$: c'est un point de Morse et l'ensemble lent est le croisement de deux branches lisses dont l'une est la courbe lente $\mathcal{C}_0$. Dans ce cas, sous une hypothèse de transversalité *ad hoc*, on démontre l'existence de solutions surstables. On remarque que la dimension N de l'espace des paramètres doit être supérieure ou égale à 1 et il semble que les valeurs de surstabilité soient très localisées ; on dit que le phénomène de surstabilité est *fugace.*

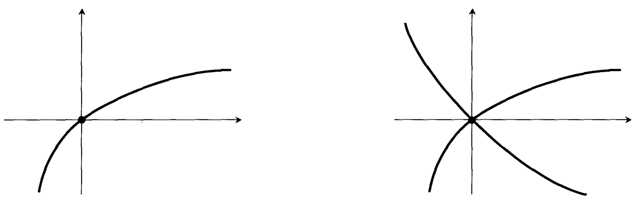

Figure 1. *L'ensemble lent* $\mathcal{Z}_0$ *des cas* 1 *et* 2.

4. Hypothèse sur la singularité et résultat principal

4.1. Nature de la singularité envisagée.

A partir de maintenant, on suppose que le germe en b_0 *de la fonction holomorphe restriction à* $\mathcal{C}_0$ *de* $\partial f_{[0]}/\partial u(z, u, \alpha_0)$ *est non nul.*

Alors, en tant que zéro de cette fonction holomorphe, le point b_0 possède une multiplicité p. Dans les cas 1 et 2 précédents, p prenait les valeurs 0 et 1. Ce nombre est un invariant associé à la courbe lente $\mathcal{C}_0$; il est stable par tout *changement de variable admissible* (un changement de variable de la forme $v = g(z, u, \alpha)$ avec $g \in \mathcal{O}_{a_0,\varepsilon}$ et $\partial g_{[0]}/\partial u(a_0) \neq 0$). Anticipant sur le résultat final de cette étude, on peut proposer la terminologie suivante.

DÉFINITION 5. — Le nombre entier p est appelé *indice de fugacité* des solutions surstables subordonnées à la courbe lente $\mathcal{C}_0$.

EXEMPLE 1. — On considère le cas où $f_{[0]}(z,u,\alpha_0) = u(u-z)(u+z)$ avec $b_0 = 0$ et l'axe Oz pour courbe lente. L'indice de fugacité prend alors la valeur 2.

EXEMPLE 2. — Si $f_{[0]}(z,u,\alpha_0) = u(u^2 - z^3)$ avec toujours $b_0 = 0$ et l'axe Oz pour courbe lente, l'indice de fugacité est égal à 3.

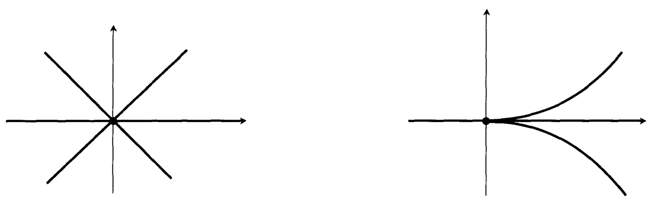

Figure 2. L'ensemble lent $\mathcal{Z}_0$ des exemples 1 et 2.

4.2. Interprétation algébrique de l'indice de fugacité.

Notons $\mathcal{O}_{b_0}(\mathcal{C}_0)$ l'algèbre des germes en b_0 des fonctions analytiques de $\mathcal{C}_0$ dans $\mathbb{C}$. Alors, l'indice de fugacité p est égal à la dimension sur $\mathbb{C}$ du quotient de $\mathcal{O}_{b_0}(\mathcal{C}_0)$ par l'idéal $(\partial f_{[0]}/\partial u(z,u,\alpha_0))$. Puisque $\mathcal{C}_0$ est le graphe de φ_0, on a les isomorphismes suivants

$$\frac{\mathcal{O}_{b_0}(\mathcal{C}_0)}{(\partial f_{[0]}/\partial u(z,u,\alpha_0))} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_{z_0}}{(\partial f_{[0]}/\partial u(z,\varphi_0(z),\alpha_0))} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_{z_0}}{((z-z_0)^p)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[z-z_0]_{p-1}$$

où $\mathbb{C}[z-z_0]_{p-1}$ désigne l'algèbre des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à p.

4.3. Interprétation géométrique de l'indice de fugacité.

Puisque le germe $f_{[0]}(z,\varphi_0(z),\alpha_0)$ est nul, on a une factorisation $f_{[0]}(z,u,\alpha_0) = (u-\varphi_0)g_0(z,u)$ où g_0 désigne une fonction standard. L'hypothèse faite sur $f_{[0]}$ est équivalente à la non nullité de $g_0(z,\varphi_0(z))$. Ainsi, la branche lisse $\mathcal{C}_0$ est de multiplicité un dans $\mathcal{Z}_0$.

Pour obtenir une description plus complète de $\mathcal{Z}_0$, on considère la restriction Π à $\mathcal{Z}_0$ de la projection :

$$\begin{aligned}(\mathbb{C}^2, b_0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0)\\ (z,u) &\longmapsto u - \varphi_0(z).\end{aligned}$$

Alors, $\Pi^{-1}(0) = \mathcal{C}_0$ et $\Pi^{-1}(\mathbb{C} - \{0\}) = \mathcal{Z}_0 - \mathcal{C}_0$.

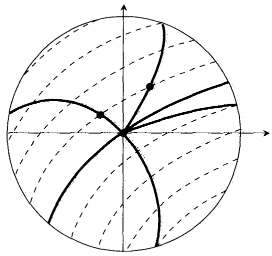

Figure 3. *L'ensemble lent* $\mathcal{Z}_0$ *et les courbes de niveau de* Π.

Pour tout η non nul mais infiniment petit dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\Pi^{-1}(\eta)$ est l'ensemble des zéros de la fonction analytique $f_{[0]}(z, \varphi_0(z) + \eta, \alpha_0)$.

PROPOSITION 3. — *La fonction* $f_{[0]}(z, \varphi_0(z) + \eta, \alpha_0)$ *possède* p *zéros* (*comptés avec leur multiplicité*) *infiniment proches de* z_0.

Démonstration. — Puisque η est non nul, les zéros de la fonction $f_{[0]}(z, \varphi_0(z) + \eta, \alpha_0)$ sont ceux de $g_0(z, \varphi_0(z) + \eta)$. Cette dernière est une perturbation de $g_0(z, \varphi_0(z))$ fonction standard admettant z_0 comme zéro d'ordre p. Le résultat découle du théorème de Rouché. $\square$

4.4. Une condition pour l'existence des solutions surstables.

Maintenant, il est possible d'énoncer une condition de transversalité naturelle pour l'existence des solutions surstables. Comme il est normal en théorie des singularités, cette propriété porte sur un déploiement d'une fonction associée à la singularité.

THÉORÈME 1. — *Pour que* $(\mathcal{E})$ *admette une solution surstable subordonnée à* $\mathcal{C}_0$, *il suffit que l'application*

$$\begin{aligned}(\mathbb{C}^N, \alpha_0) &\longrightarrow \mathcal{O}_{z_0}\\ \alpha &\longmapsto f_{[0]}\big(z, \varphi_0(z), \alpha\big)\end{aligned}$$

soit transverse en α_0 *à l'idéal* $((z - z_0)^p)$ *engendré par* $\dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial u(z, \varphi_0(z), \alpha_0)}$.

Pour vérifier cette condition de transversalité, il suffit de considérer la partie polynomiale de degré strictement inférieur à p de l'ombre de la fonction $f(z, \varphi_0(z), \alpha)$

$$f_{[0]}\big(z, \varphi_0(z), \alpha\big) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k(\alpha)(z - z_0)^k \quad \text{modulo } (z - z_0)^p$$

et de montrer que la différentielle de l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ \alpha &\longmapsto \big(a_0(\alpha), ..., a_{p-1}(\alpha)\big) \end{aligned}$$

est de rang p en α_0. En fait, pour chaque k, on a

$$a_k(\alpha) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k h_0}{\partial z^k}(z_0, \alpha)$$

où l'on a posé $h_0(z,\alpha) = f_{[0]}(z, \varphi_0(z), \alpha_0)$. En conséquence, si l'on introduit le jet d'ordre $(p-1)$ par rapport à z de la fonction h_0

$$j_{p-1}(h_0)(z,\alpha) = \Big(h_0(z,\alpha), \frac{\partial h_0}{\partial z}(z,\alpha), \dots, \frac{\partial^{p-1} h_0}{\partial z^{p-1}}(z,\alpha)\Big)$$

on peut reformuler le théorème de la manière qui suit : *pour que* $(\mathcal{E})$ *admette une solution surstable subordonnée à* $\mathcal{C}_0$*, il suffit que l'application*

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^N, \alpha_0) &\longrightarrow \mathbb{C}^p \\ \alpha &\longmapsto j_{p-1}(h_0)(z_0, \alpha) \end{aligned}$$

soit une submersion en α_0.

En particulier, pour que cette condition soit satisfaite, il est nécessaire que la dimension N de l'espace des paramètres soit supérieure ou égal à l'indice de fugacité p. Donc, plus l'indice de fugacité est grand, plus « il faut de paramètres numériques » pour obtenir des solutions surstables. En ce sens, l'indice de fugacité est bien une mesure de la fugacité du phénomène. La démonstration de ce résultat est exposée dans le paragraphe 6.

5. Réduction du problème

Dans ce paragraphe et seulement dans lui, on suppose que l'ombre $f_{[0]}$ *est indépendante du paramètre* α. Cette hypothèse est peu restrictive car on peut toujours s'y ramener en remplaçant α par $\alpha_0 + \varepsilon\alpha$.

5.1. L'écart d'une perturbation de φ_0.

DÉFINITION 6. — Étant donnée une perturbation ψ de φ_0 dans $\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$, l'*écart* de ψ est l'élément $E\psi$ de $\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ défini par

$$E\psi(z,\alpha) = f\big(z, \psi(z,\alpha), \alpha\big) - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,\alpha).$$

L'hypothèse faite sur $f_{[0]}$ implique que $f(z, \psi(z,\alpha), \alpha)$ appartient à l'idéal engendré par ε. Donc, l'écart de toute perturbation de φ_0 est un petit germe.

Soit $\alpha^* \in \mathbb{C}_\varepsilon^N$ infiniment proche de α_0. Par construction, $(\alpha^*, \psi(\cdot\,,\alpha^*))$ est une solution surstable de $(\mathcal{E})$ (subordonnée à la courbe lente $\mathcal{C}_0$) si et seulement si $E\psi(\cdot\,,\alpha^*)$ est le germe nul de $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}$. En fait, on peut améliorer cette caractérisation.

PROPOSITION 4. — *Soit $\alpha^* \in \mathbb{C}_\varepsilon^N$ infiniment proche de α_0. Alors, il existe φ^* dans la classe de $\psi(\cdot\,,\alpha^*)$ modulo $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}^{\exp}$ tel que (α^*,φ^*) soit une solution surstable si et seulement si $E\psi(\cdot\,,\alpha^*) \in \mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}^{\exp}$.*

Démonstration. — Si $E\psi(z,\alpha^*)$ appartient à $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}^{\exp}$, il résulte du lemme de Gronwall que la solution maximale φ^* du problème de Cauchy

$$\varepsilon\frac{du}{dz} = f(z,u,\alpha^*), \quad u(z_0) = \psi(z_0,\alpha^*)$$

est définie au moins sur une boule $B(z_0,r)$ avec $r > 0$ standard et elle y est telle que $\varphi^*(z) - \psi(z,\alpha^*) \in \mathcal{O}_{z_0}^{\exp}$.

Inversement, on considère φ^* telle que (α^*,φ^*) soit une solution surstable et que $e(z) = \psi(z,\alpha^*) - \varphi^*(z)$ soit ε-exponentiellement petit. Alors

$$E\psi(z,\alpha^*) = \big(f(z,\psi(z,\alpha^*),\alpha^*) - f\big(z,\varphi^*(z),\alpha^*\big)\big) - \varepsilon\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}z}(z)$$

et on remarque que $f(z,\psi(z,\alpha^*),\alpha^*) - f(z,\varphi^*(z),\alpha^*)$ appartient à l'idéal de $\mathcal{O}_{z_0,\varepsilon}$ engendré par e. $\square$

5.2. Forme réduite de l'écart.

D'après la PROPOSITION 3, l'existence d'une solution surstable est ramenée à celle d'une perturbation ψ de φ_0 dont l'écart possède des valeurs ε-exponentiellement petite. Pour utiliser ce résultat, il faut pouvoir choisir une perturbation dont l'écart est d'une certaine manière minimale. C'est ce que permet le théorème fondamental suivant dont la démonstration est donnée dans le paragraphe 7. Avant d'énoncer ce résultat, on introduit la notation suivante : étant donnée une fonction analytique $\psi(z,\alpha)$, on désigne par $T\psi(z,\alpha)$, lorsque cela a un sens, le développement de Taylor de ψ d'ordre $(p-1)$ par rapport à la première variable en z_0

$$(T\psi)(z,\alpha) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!}\,\frac{\partial^k\psi}{\partial z^k}(z_0,\alpha)$$

où p désigne l'indice de fugacité des solutions surstables subordonnées à $\mathcal{C}_0$.

THÉORÈME 2. — *Il existe dans* $\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ *une perturbation* Φ *de* φ_0 *dont l'écart* $E\Phi$ *est égal modulo* $\mathcal{O}^{\exp}_{c_0,\varepsilon}$ *à son développement de Taylor* $T(E\Phi)$.

Donc, $E\Phi$ appartient modulo $\mathcal{O}^{\exp}_{c_0,\varepsilon}$ à $\mathcal{O}_{\alpha_0,\varepsilon}[z - z_0]_{p-1}$, c'est-à-dire à l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $(p - 1)$ et à coefficients dans l'algèbre $\mathcal{O}_{\alpha_0,\varepsilon}$ des germes ε-développables des fonctions analytiques de $(\mathbb{C}^N, \alpha_0)$ dans $\mathbb{C}$.

COROLLAIRE 1. — *Pour que* $(\mathcal{E})$ *admette une solution surstable subordonnée à* $\mathcal{C}_0$, *il suffit qu'il existe* $\alpha^* \in \mathbb{C}^N_\varepsilon$ *infiniment proche de* α_0 *tel que* $T(E\Phi)(\cdot\,, \alpha^*) \in \mathcal{O}^{\exp}_{z_0,\varepsilon}$.

D'après la PROPOSITION 1, la condition $T(E\Phi)(\cdot\,, \alpha^*) \in \mathcal{O}^{\exp}_{z_0,\varepsilon}$ signifie que les coefficients du polynôme $T(E\Phi)$ sont ε-exponentiellement petits. L'esprit de la démonstration du THÉORÈME 2 ainsi que la PROPOSITION 4 énoncée plus loin rendent raisonnables les conjectures qui suivent.

CONJECTURE 1. — *Le germe* $\Phi \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ *du théorème précédent est unique modulo* $\mathcal{O}^{\exp}_{c_0,\varepsilon}$.

CONJECTURE 2. — *Si* α^* *est une valeur de surstabilité associée à une solution surstable subordonnée à la courbe lente* $\mathcal{C}_0$, *alors* $T(E\Phi)(\cdot\,, \alpha^*)$ *appartient à* $\mathcal{O}^{\exp}_{z_0,\varepsilon}$.

De même, les résultats [3], [7] et [22] obtenus lorsque l'indice de fugacité est égal à 0 ou 1 suggère la conjecture ci-après, sous l'hypothèse supplémentaire d'une dépendance analytique du petit paramètre (c'est-à-dire qu'il existe un germe standard analytique F tel que $f(z, u, \alpha) = F(z, u, \alpha, \varepsilon)$).

CONJECTURE 3. — *La série formelle associée au développement de* Φ *en puissances de* ε *est Gevrey et peut être resommée par le procédé de Borel-Laplace.*

5.3. Un modèle local de l'équation $(\mathcal{E})$.

On peut aussi déduire du THÉORÈME 2 un modèle local pour notre problème de perturbation singulière. Pour cela, il suffit d'effectuer préalablement un changement de temps qui permet de se ramener au cas où

$$\frac{\partial f_{[0]}}{\partial u}\big(z, \varphi_0(z), \alpha_0\big) = (z - z_0)^p.$$

COROLLAIRE 2. — *Il existe un changement de temps et de variables transformant* (z_0, u_0) *en* $(0, 0)$, *qui donne à l'équation différentielle* $(\mathcal{E})$ *la* *forme* $(\mathcal{N})$ *suivante*

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = uz^p + r(\alpha)(z) \quad \textit{modulo } (\varepsilon u, u^2, \mathcal{O}^{\exp}_{c,\varepsilon})$$

où $r(\alpha)$ *désigne un polynôme de degré inférieur à* $(p-1)$ *à coefficients dans* $\mathcal{O}_{\alpha_0,\varepsilon}$ *et qui transforme les solutions surstables de* $(\mathcal{E})$ *subordonnées à la courbe lente* $\mathcal{C}_0$ *en les petites solutions de* $(\mathcal{N})$.

Un cas particulier simple est celui de l'équation différentielle linéaire suivante $(\mathcal{M})$ dans $\mathbb{C}^2$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = uz^p + \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{p-1}z^{p-1}.$$

Pour cette équation, on peut démontrer une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions surstables qui rend encore plus vraisemblable la CONJECTURE 2.

PROPOSITION 5. — *L'équation* $(\mathcal{M})$ *admet une solution dont le germe en* 0 *est petit si et seulement si les nombres complexes* α_k *sont tous* ε-*exponentiellement petits.*

Démonstration. — On cherche une solution de $(\mathcal{M})$ sous la forme $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. On obtient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$a_{k(p+1)} = \frac{a_0}{\varepsilon^k (p+1)^k\, k\,!}$$

et pour $r = 1, 2, ..., p$

$$a_{k(p+1)+r} = \frac{\alpha_{r-1}}{\varepsilon^{k+1} r(p+1+r)\cdots(k(p+1)+r)}.$$

On peut décomposer u en la somme de $p+1$ germes

$$u(z) = \sum_{r=0}^{p}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k(p+1)+r} z^{k(p+1)+r}\Big)$$

et, d'après la proposition précédente, u est petit si et seulement si chacun de ces germes l'est.

Soient r un nombre entier tel que $0 \le r \le p$ et R un nombre réel standard strictement positif. On vérifie que la suite de terme général

$u_k = |a_{k(p+1)+r}|R^{k(p+1)+r}$ atteint son maximum en k_0 infiniment grand dont l'ordre de grandeur est donné par

$$k_0 = \frac{R^{p+1}}{(p+1)|\varepsilon|}(1+\text{ø}).$$

A l'aide de la formule de Stirling, on obtient

$$\frac{R^{k_0(p+1)+r}}{(p+1)^{k_0}|\varepsilon|^{k_0}\,k_0\,!} = \exp\Big[\frac{R^{p+1}}{(p+1)|\varepsilon|}(1+\text{ø})\Big]$$

et puisque pour $r > 0$

$$\frac{\alpha_{r-1}R^{k_0(p+1)+r}}{r(p+1)^{k_0}|\varepsilon|^{k_0+1}(k_0+1)\,!} \\ \leq \big|a_{k_0(p+1)+r}\big|R^{k_0(p+1)+r} \leq \frac{\alpha_{r-1}R^{k_0(p+1)+r}}{r(p+1)^{k_0}|\varepsilon|^{k_0+1}k_0\,!},$$

on en déduit finalement les estimations

$$\big|a_{k_0(p+1)+r}\big|R^{k_0(p+1)+r} = \alpha_{r-1}\exp\Big[\frac{R^{p+1}}{(p+1)|\varepsilon|}(1+\text{ø})\Big]$$

avec la convention $\alpha_{-1} = a_0$. D'après la proposition précédente, la solution u est petite si et seulement s'il existe un nombre réel standard $R > 0$ tel que chaque $|a_{k_0(p+1)+r}|R^{k_0(p+1)+r}$ soit infiniment petit. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que chaque α_r soit ε-exponentiellement petit. ▯

REMARQUE. — Le lecteur familier de la théorie des canards peut penser que cette proposition n'est que la généralisation au cas analytique complexe d'une propriété bien connue selon laquelle les valeurs à canards occupent une plage ε-exponentiellement étroite de l'espace des paramètres. Mais lorsque $p > 1$, une équation du type de $(\mathcal{M})$ dans le domaine réel peut posséder des canards dont les prolongements analytiques complexes ne sont pas des petits germes. Considérons l'exemple suivant

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = yx^3 + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

avec ε infiniment petit strictement positif et α_0, α_1, α_2 réels infiniment petits. La solution générale de cette équation est de la forme

$$y(x) = \Big(y_0 + \alpha_0 I_{0,4}(x,4\varepsilon) + \alpha_1 I_{1,4}(x,4\varepsilon) + \alpha_2 I_{2,4}(x,4\varepsilon)\Big)\exp\Big(\frac{x^4}{4\varepsilon}\Big)$$

où $I_{p,q}(a,\eta)$ désigne l'intégrale de Laplace

$$I_{p,q}(a,\eta) = \int_0^a t^p \exp\Big(-\frac{t^q}{\eta}\Big)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque a est standard, η infiniment petit, p et q entiers standard avec $0 < a$, $0 < \eta$, $0 < p+1 < q$, un calcul asymptotique classique donne l'estimation

$$I_{p,q}(a,\eta) = A_{p,q}\eta^{(p+1)/q} + \mathcal{L}\eta\exp(-\frac{a^q}{\eta})$$

où $A_{p,q}$ désigne $\int_0^{+\infty} t^p\,\mathrm{e}^{-t^q}\,\mathrm{d}t$ et $\mathcal{L}$ un nombre limité. On peut choisir pour les paramètres α_i des valeurs qui, bien que non ε-exponentiellement petites, font disparaître par compensation mutuelle les parties principales des intégrales $I_{0,4}(x,4\varepsilon)$, $I_{1,4}(x,4\varepsilon)$ et $I_{2,4}(x,4\varepsilon)$. Par exemple, lorsque y_0 et α_1 sont nuls et que $\alpha_0 = -A_{2,4}(4\varepsilon)^{3/4}$, $\alpha_2 = A_{0,4}(4\varepsilon)^{1/4}$, on obtient une solution $y(x)$ de l'équation différentielle qui est telle que pour tout standard $x > 0$, $y(x)$ est égal à $y(-x)$ et est infiniment petit. Cette solution est un canard puisqu'elle longe successivement les parties attractives et répulsives de l'axe $y = 0$; pourtant elle est obtenue pour des valeurs non ε-exponentiellement petites des paramètres. Cet exemple montre que le résultat de la PROPOSITION 2 est spécifique au domaine analytique complexe.

6. Démonstration du théorème 1

Soit F_0 l'application standard

$$(\mathbb{C}^N,\alpha_0) \longrightarrow (\mathbb{C}[z-z_0]_{p-1},0)$$

qui à α fait correspondre le développement de Taylor Th_0 avec $h_0(z,\alpha) = f_{[0]}(z,\varphi_0(z),\alpha)$. D'après l'hypothèse de transversalité du théorème, F_0 est une submersion en α_0. Donc, il existe un standard $\alpha_1 \in \mathbb{C}^N$ tel que

$$DF_0(\alpha_0)\cdot\alpha_1 = T\Big(\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}z}(z) - f_{[1]}\big(z,\varphi_0(z),\alpha\big)\Big)$$

(où $DF_0(\alpha_0)\cdot\alpha_1$ est la différentielle de F_0 en α_0 appliquée à α_1).

On considère la nouvelle équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ définie par

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = f(z,u,\alpha_0+\varepsilon\alpha)$$

au voisinage de (z_0,u_0,α_1) et soit c_1 le point (z_0,α_1) de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^N$.

L'hypothèse initiale du paragraphe précédent est vérifiée par $(\mathcal{E}_1)$ et d'après le THÉORÈME 2, il existe dans $\mathcal{O}_{c_1,\varepsilon}$ une perturbation Φ de φ_0 dont l'écart $E\Phi$ est égal modulo $\mathcal{O}^{\exp}_{c_1,\varepsilon}$ à son développement de Taylor $T(E\Phi) \in \mathcal{O}_{\alpha_1,\varepsilon}[z-z_0]_{p-1}$. Puisque

$$E\Phi(z,\alpha) = f\big(z,\Phi(z,\alpha),\alpha_0+\varepsilon\alpha\big) - \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\alpha)$$

l'ombre $(E\Phi)_{[0]}$ de $E\Phi$ est nulle et le premier coefficient de son ε-développement est

$$(E\Phi)_{[1]}(z,\alpha) = \frac{\partial f_{[0]}}{\partial u}\big(z,\varphi_0(z),\alpha_0\big)\Phi_{[1]}(z,\alpha) + D_3 f_{[0]}\big(z,\varphi_0(z),\alpha_0\big)\cdot\alpha + f_{[1]}(z,\varphi_0(z),\alpha_0) - \varepsilon\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}z}(z)$$

où $D_3 f_{[0]}(z,\varphi_0(z),\alpha_0)\cdot\alpha$ désigne la différentielle par rapport à la troisième variable de $f_{[0]}$ en $(z,\varphi_0(z),\alpha_0)$ appliquée à α. De ceci on déduit que

$$T(E\Phi)_{[1]}(z,\alpha) = DF_0(\alpha_0)\cdot\alpha + T\Big(f_{[1]}\big(z,\varphi_0(z),\alpha_0\big) - \varepsilon\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}z}(z)\Big).$$

Par conséquent, $T(E\Phi)(z,\alpha) = \varepsilon F(\alpha)(z)$ où F est un germe d'application analytique ε-développable de $(\mathbb{C}^N,\alpha_1)$ dans $\mathbb{C}[z-z_0]_{p-1}$ dont l'ombre $F_{[0]}$ est telle que $F_{[0]}(\alpha_1) = 0$ et que $DF_{[0]}(\alpha_1)$ soit une surjection de $\mathbb{C}^N$ sur $\mathbb{C}[z-z_0]_{p-1}$. D'après le théorème de la submersion ε-développable cité à la fin de ce paragraphe, F admet une section analytique

$$s : \big(\mathbb{C}[z-z_0]_{p-1}, 0\big) \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

qui est elle-même ε-développable. En particulier, $s(0)$ est un élément de $\mathbb{C}^N_\varepsilon$ qui est tel que $F(s(0)) = 0$. On en déduit que le germe $E\Phi(\cdot\,,s(0))$ appartient à $\mathcal{O}^{\exp}_{z_0,\varepsilon}$ et on conclut par le COROLLAIRE 1.

THÉORÈME DE LA SUBMERSION ε-DÉVELOPPABLE. — *Soit F une application analytique ε-développable définie au voisinage d'un point standard x_0 dans $\mathbb{C}^m$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. On suppose que l'ombre $F_{[0]}$ de F est une submersion en x_0 et on pose $y_0 = F(x_0)$. Alors F admet une section analytique ε-développable définie sur un voisinage standard de y_0 dans $\mathbb{C}^n$.*

Ce résultat se déduit immédiatement de la version ε-développable du théorème d'inversion locale ou du théorème des fonctions implicites. On trouve dans [8], [11] une démonstration de ces théorèmes.

7. Démonstration du théorème 2

7.1. Notations. — Pour tout $\psi \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$, on désigne par $T\psi$ (comme dans le paragraphe 5) le germe (développement de Taylor)

$$(T\psi)(z,\alpha) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(z-z_0)^k}{k\,!} \frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}(z_0,\alpha)$$

puis on pose $R\psi = \psi - T\psi$ (reste du développement de Taylor) et on définit $S\psi \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ par

$$S\psi(z,\alpha) = \frac{R\psi(z,\alpha)}{(z-z_0)^p}\cdot$$

Enfin, on note k_0 et ℓ_0 les germes suivant de $\mathcal{O}_{z_0}$:

$$k_0(z) = \frac{\partial f_{[0]}}{\partial u}(z,\varphi_0(z),\alpha_0), \quad \ell_0(z) = \frac{k_0(z)}{(z-z_0)^p}\cdot$$

7.2. Idée de la démonstration.

On cherche Φ sous la forme $\varphi_0 + \theta$ où $\theta \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ est un petit germe choisi de sorte que $RE(\varphi_0 + \theta)$ soit ε-exponentiellement petit. Pour cela, on linéarise l'opérateur RE sous la forme

$$RE(\varphi_0 + \theta) = RE(\varphi_0) + k_0\theta + H(\theta)$$

puis on applique l'idée de la méthode de Newton à l'équation

$$RE(\varphi_0 + \theta) = 0$$

en choisisant $\theta_1 \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ de sorte que

$$RE(\varphi_0) + k_0\theta_1 = 0.$$

On pose alors $\varphi_1 = \varphi_0 + \theta_1$; en principe, $RE(\varphi_1)$ est « plus petit » que $RE(\varphi_0)$. On peut recommencer en choisissant par le même procédé θ_2 dans $\mathcal{O}_{c,\varepsilon}$ de manière à obtenir $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta_2$ avec $RE(\varphi_2)$ « encore plus petit ».

On engendre ainsi une suite (φ_k) de perturbations de φ_0 dans $\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$. Cette suite n'a pas de raison de converger, mais un contrôle soigneux de la « taille » des germes $RE(\varphi_k)$ permet d'arrêter le processus lorsque $RE(\varphi_n)$ est devenu ε-exponentiellement petit.

7.3. Estimations préalables.

Soit $r > 0$ un nombre standard tel que f et $f_{[0]}$ soient définies sur $B(z_0, r) \times B(u_0, r) \times B(\alpha_0, r)$. Ensuite, on introduit un nombre réel standard $\rho_0 > 0$ de sorte que

- $0 < 3\rho_0 < r$;
- $\forall z \in \bar{B}(z_0, 3\rho_0), \quad |\varphi_0(z)| < \frac{1}{2} r$;
- $\forall z \in \bar{B}(z_0, 3\rho_0), \quad \ell_0(z) \neq 0$;
- $\forall (z, \alpha) \in \bar{B}(z_0, 3\rho_0) \times \bar{B}(\alpha_0, \rho_0), \quad E\varphi_0(z, \alpha) \simeq 0$.

Pour tout $h \in \mathcal{O}_{c_0}$ dont un représentant est défini sur $\bar{B}(z_0, \rho) \times \bar{B}(\alpha_0, \rho_0)$, on pose :

$$|h|_\rho = \sup\Big\{ |h(z, \alpha)| \, ; \ (z, \alpha) \in \bar{B}(z_0, \rho) \times \bar{B}(\alpha_0, \rho_0) \Big\}.$$

LEMME 1. — *Pour un tel h, on a $|Th|_\rho \leq p|h|_\rho$ et $|Rh|_\rho \leq (p+1)|h|_\rho$.*

Démonstration. — D'après les inégalités de Cauchy

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial z^k}(z_0, \alpha) \right| \leq \frac{k\,!}{\rho^k} \sup\Big\{ \frac{|h(z, \alpha)|}{|z - z_0|} = \rho \Big\}$$

on obtient

$$|Th|_\rho \leq \sum_{k=0}^{p-1} |h|_\rho,$$

puis

$$|Rh|_\rho \leq |h|_\rho + |Th|_\rho. \quad \square$$

Soit $\psi \in \mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$ une perturbation de φ_0 et θ un petit germe de $\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$. Un calcul immédiat donne

$$RE(\psi + \theta) = RE(\psi) + k_0\theta + H(\psi, \theta)$$

avec

$$H(\psi, \theta) = R\Big(G(\psi, \theta) - \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big)$$

où $G(\psi, \theta)$ est le germe défini par

$$G(\psi, \theta)(z, \alpha) = f\big(z, \psi(z, \alpha) + \theta(z, \alpha), \alpha\big) - f\big(z, \psi(z, \alpha), \alpha\big) - k_0(z)\theta(z, \alpha).$$

On choisit θ de sorte que $RE(\psi) + k_0\theta = 0$ et on suppose que ψ est défini sur $\overline{B}(z_0, \rho) \times \overline{B}(\alpha_0, \rho_0)$ avec

$$2\rho_0 \ll \rho \leq 3\rho_0.$$

LEMME 2. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\big|G(\psi, \theta)\big|_\rho \leq |\theta|_\rho ø.$$

Démonstration. — Cette inégalité découle de l'expression suivante

$$G(\psi, \theta) = \theta \int_0^1 \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(z, \psi + t\theta, \alpha) - \frac{\partial f_{[0]}}{\partial u}(z, \varphi_0, \alpha_0)\Big)\,\mathrm{d}t. \quad \square$$

LEMME 3. — *On considère les constantes standard*

$$A = \Big|\frac{1}{\ell_0}\Big|_{3\rho_0} \quad \text{et} \quad B = \frac{4(p+1)A}{\rho_0^p}.$$

Alors $\quad |RE(\psi + \theta)|_{\rho - B|\varepsilon|} \leq \frac{1}{2}|RE(\psi)|_\rho$.

Démonstration. — Par définition on a

$$\theta = S(E\psi)/\ell_0 \quad \text{et} \quad RE(\psi - \theta) = R(G(\psi, \theta) - \varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Du principe du maximum, on déduit que

$$\big|S(E\psi)\big|_\rho \leq \frac{|R(E\psi)|_\rho}{\rho^p} \quad \text{et} \quad |\theta|_\rho \leq \frac{A|R(E\psi)|_\rho}{\rho^p}.$$

L'application des inégalités de Cauchy donne alors

$$\Big|\varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial z}\Big|_{\rho - B|\varepsilon|} \leq \frac{A|R(E\psi)|_\rho}{B\rho^p}.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned}\Big|G(\psi, \theta) - \varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial z}\Big|_{\rho - B|\varepsilon|} &\leq \frac{A|R(E\psi)|_\rho ø}{\rho^p} + \frac{A|R(E\psi)|_\rho}{B\rho^p} \\ &\leq \frac{2A|R(E\psi)|_\rho}{B\rho^p},\end{aligned}$$

$$\Big|R\Big(G(\psi, \theta) - \varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial z}\Big)\Big|_{\rho - B|\varepsilon|} \leq \frac{2(p+1)A|R(E\psi)|_\rho}{B\rho^p},$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

7. 4. Construction de Φ.

On considère la suite (θ_n) d'éléments de $\mathcal{O}_{c_0}$ définie par :

$$\theta_0 = \frac{SE(\varphi_0)}{\ell_0} \quad \text{et} \quad \theta_{k+1} = \frac{SE(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{k} \theta_i)}{\ell_0}.$$

D'après le LEMME 3, on a

$$\left|RE(\varphi_0 + \theta_0)\right|_{3\rho_0 - B|\varepsilon|} \leq \tfrac{1}{2}\left|RE(\varphi_0)\right|_{3\rho_0}$$

et on vérifie par récurrence que

$$\Big|RE(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i)\Big|_{3\rho_0 - kB|\varepsilon|} \leq \frac{1}{2^k}\left|RE(\varphi_0)\right|_{3\rho_0}$$

tant que cela a un sens, c'est-à-dire pour $kB|\varepsilon| \ll 3\rho_0$.

On considère un nombre entier n tel que $0 \ll nB|\varepsilon| \ll \rho_0$ et on pose

$$\Phi = \varphi_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i.$$

Alors

$$\left|RE(\Phi)\right|_{2\rho_0} \leq \frac{1}{2^n}\left|RE(\varphi_0)\right|_{3\rho_0}.$$

Delà il découle que $RE(\Phi)$ est ε-exponentiellement petit puisque $E\varphi_0$ prend des valeurs infiniment petites sur le domaine $\overline{B}(z_0, 3\rho_0) \times \overline{B}(\alpha_0, \rho_0)$ et que $1/2^n = \exp(-C/|\varepsilon|)$ avec $C = n|\varepsilon| \ln(2)$.

Il reste à prouver que Φ est ε-développable. Pour cela, on commence par remarquer que, pour chaque standard j, le germe θ_j est ε-développable. Ensuite, on montre par une récurrence externe que, pour chaque standard j, on a :

$$\theta_j \in \varepsilon^{j+1}\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon} \quad \text{et} \quad RE\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i\Big) \in \varepsilon^{j+1}\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}.$$

Cela est clair pour $j = 0$. On le suppose vrai pour un standard j arbitraire. Le choix fait pour θ_j donne

$$RE\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j} \theta_i\Big) = R\Big(G\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i, \theta_j\Big) - \varepsilon \frac{\partial \theta_j}{\partial z}\Big)$$

et il suffit de vérifier que $G(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i, \theta_j)$ appartient à $\varepsilon^{j+1}\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$, ce qui est clair d'après l'expression

$$G\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i, \theta_j\Big)$$
$$= \theta_j \int_0^1 \Big\{ \frac{\partial f}{\partial u}\Big(z, \varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i + t\theta_j, \alpha\Big) - \frac{\partial f_{[0]}}{\partial u}(z, \varphi_0, \alpha_0) \Big\}\, dt.$$

On obtient ensuite que

$$\theta_j = \frac{1}{\ell_0}\Big(RE(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j} \theta_i)\Big)$$

appartient à $\varepsilon^{j+1}\mathcal{O}_{c_0,\varepsilon}$.

Pour un entier standard j fixé on utilise la décomposition

$$\Phi = \varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i + \sum_{i=j}^{n} \theta_i.$$

Les résultats précédents permettent de s'assurer qu'il existe des constantes standard C et D strictement positives telles que

$$|\theta_j|_{2\rho_0} \le |\varepsilon|^{j+1} C \quad \text{et} \quad \Big|RE\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i\Big)\Big|_{2\rho_0} \le |\varepsilon|^{j+1} D.$$

Pour chaque k telle que $j \le k \le n$, on en déduit en reprenant exactement le travail du paragraphe précédent que

$$\Big|RE\Big(\varphi_0 + \sum_{i=0}^{k} \theta_i\Big)\Big|_{\rho_0} \le |\varepsilon|^{j+1} \frac{D}{2^{k-j+1}} \quad \text{et} \quad |\theta_k|_{\rho_0} \le |\varepsilon|^{j+1} \frac{AD}{2^{k-j+1}\rho_0^p}.$$

De ces estimations, on déduit que $\sum_{i=j}^{n} \theta_i = \varepsilon^j \emptyset$, ce qui prouve que Φ admet un ε-développement de degré j. Le nombre standard j étant arbitraire, on obtient ainsi le caractère ε-développable de Φ, ce qui achève la démonstration du THÉORÈME 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AFRAJMOVICH (V.S.), ARNOLD (V.I.), IL'YASHENKO (Yu.S.) and SHIL'NIKOV (L.P.). — *Theory of bifurcations*, V.I. ARNOLD ed.,

Dynamical Systems, vol. **5**, Encyclopedia in Mathematical Sciences, Springer, 1990.

[2] BENOÎT (E.), CALLOT (J.-L.), DIENER (F.) et DIENER (M.). — *Chasse aux canards*, Collect. Math., t. **31-32** (1-3), 1981, p. 37–119.

[3] CANDELPERGHER (B.), DIENER (F.) et DIENER (N.). — *Retard à la bifurcation : du local au global*, dans Bifurcations of planar vector fields, J.P. Françoise et R. Roussarie éd., Lecture Notes in Mathematics **1455**, Springer–Verlag, 1990.

[4] CALLOT (J.-L.). — *Champs lents-rapides complexes à une dimension lente.* — Prépublication, Mulhouse, 1991.

[5] CALLOT (J.-L.). — *Sur la piste des canards imaginaires.* — Prépublication, Mulhouse, 1992.

[6] CALLOT (J.-L.) et FRUCHARD (A.). — *Observons un polynôme de Lagrange.* — Prépublication, Mulhouse-Strasbourg, 1992.

[7] CANALIS-DURAND (M.). — *Caractère Gevrey de solutions formelles pour un système analytique de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.* — Prépublications de l'Université de Nice, 1990.

[8] DELCROIX (A.). — *Propriétés asymptotiques des champs de vecteurs lents-rapides.* — Thèse, Université de Poitiers, 1989.

[9] DELCROIX (A.) et DIENER (M.). — *Variables locales pour les équations différentielles lentes-rapides*, C.R. Acad. Sci. Paris, Séries I, t. **309**, 1989, p. 277–282.

[10] DIENER (F.). — *Développements en ε–ombres*, Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, tome **3**, éditions du CNRS, Paris 1983.

[11] DIENER (F.) and DIENER (M.). — *Some asymptotic results in ordinary differential equations. Non standard analysis and its applications.* — Cambridge University Press, 1988.

[12] DIENER (F.) and DIENER (M.). — *Maximal delay*, dans Dynamic bifurcations, E. Benoît éd., Lecture Notes in Mathematics **1493**, Springer Verlag, 1991, p. 71–86.

[13] DIENER (F.) et REEB (G.). — *Analyse non standard.* — Hermann, Collection Enseignement des Sciences, Paris, 1989.

[14] DIENER (M.). — *Étude générique des canards*, thèse d'Etat, Strasbourg 1983.

[15] DIENER (M.). — *Regularizing microscopes, and rivers.* — Preprint 1991.

[16] ECKHAUS (W.). — *Asymptotic analysis of singular perturbations*, Studies in Mathematics and its applications, vol. 9, North–Holland, Amsterdam 1979.

[17] Mishchenko (E.F.) and Rozov (N.Kh.). — *Differential equations with small parameter and relaxation oscillations.* — Plenum Press, 1980.
[18] Neishtadt (A.I.). — *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations I*, Differentsial'nye Uravneniya, t. **23**, 12, 1987, p. 2060–2067.
[19] Neishtadt (A.I.). — *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations II*, Differentsial'nye Uravneniya, t. **24**, 2, 1988, p. 226–233.
[20] Nelson (E.). — *Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **83**, 6, 1977, p. 1165–1198.
[21] Robinson (A.). — *Non-standard analysis.* — North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.
[22] Sibuya (Y.). — *Gevrey Property of formal solutions in a parameter.* — Preprint, 1989.
[23] Van den Berg (I.). — *Nonstandard asymptotic analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1249**, Springer Verlag.
[24] Wallet (G.). — *Surstabilité pour une équation différentielle analytique complexe en dimension un*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **40**, 3, 1990, p. 557–595.
[25] Wallet (G.). — *Overstability in arbitrary dimension*, dans Dynamic bifurcations, E. Benoît éd., Lecture Notes in Mathematics **1493**, Springer Verlag, 1991, p. 57–70.
[26] Wasow (W.). — *Asymptotic expansions of ordinary differential equations.* — Interscience Publishers, New York, 1965.
[27] Zvonkin (A.K.) and Shubin (M.A.). — *Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations*, Russian Math. Surveys, t. **39**, 2, 1984, p. 69–131.