BULLETIN DE LA S. M. F.

FREDÉRIC CAMPANA

Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 2 (1994), p. 255-284

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_2_255_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 255–284.

REMARQUES SUR LE REVÊTEMENT UNIVERSEL DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

PAR

Frédéric CAMPANA (*)

RÉSUMÉ. — Si X est une variété kählérienne compacte, on étudie certaines relations entre $\pi_1(X)$, la positivité de Ω_X^1 et les sous-variétés analytiques compactes génériques du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X, qui apparaissent dans un trvail de M. Gromov. On en déduit simplement certains résultats, soit connus (la simple connexité des surfaces $K3$ et les variétés rationnellement connexes), soit nouveaux (la finitude de $\pi_1(X)$ si X est simple). Cette étude conduit naturellement à la construction d'une application méromorphe connexe et propre $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ dont les fibres génériques sont les sous-variétés analytiques compactes connexes maximales de $\widetilde{X}$. La conjecture de Shafarevitch équivaut alors au fait que σ est holomorphe et $\widetilde{Y}$ Stein.

ABSTRACT. — For X a compact Kähler manifold, we study relationships between $\pi_1(X)$, the positivity of Ω_X^1 and generic compact subvarieties of the universal cover $\widetilde{X}$ of X, first considered by M. Gromov. From this we deduce in a simple way results, either well-known ($K3$ surfaces and rationnally connected manifolds are simply connected), or new ($\pi_1(X)$ is finite if X is simple). This study leads naturally to the construction of a certain proper connected surjective meromorphic map $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, the generic fibers of which are the maximal compact subvarieties of $\widetilde{X}$. Shafarevich's conjecture means that σ is holomorphic with $\widetilde{Y}$ Stein.

0. Introduction

La classification des variétés kählériennes et projectives compactes repose essentiellement sur les propriétés de positivité de son fibré canonique K_X. En principe, une variété est d'autant plus spéciale et simple, que K_X est peu positif. Nous nous proposons d'illustrer ce principe en utilisant un résultat de M. Gromov qui relie la non-finitude du groupe fondamental de X et la positivité géométrique de Ω_X^1.

(*) Texte reçu le 24 décembre 1992, révisé le 11 octobre 1993.
F. CAMPANA, Département de Mathématiques, Université Nancy 1, BP 239, F 54506 Vandœuvre-les-Nancy CEDEX.

Classification AMS : 32 J 27, 32 J 25, 14 E 20.

Les remarques qui suivent ont été motivées par le corollaire 3.2 de M. Gromov (voir [G]) : *si X est une variété kählérienne compacte telle que $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$ et si le revêtement universel $\widetilde{X}$ de $X = \widetilde{X}/\Gamma$ ne contient pas de sous-variété complexe compacte de dimension (strictement) positive, alors X est projective.*

La démonstration repose sur le théorème de l'indice L_2 de M. Atiyah (voir [A]) et la théorie de Hodge L_2 pour produire une p-forme holomorphe u L_2 sur $\widetilde{X}$.

La démonstration fournit en fait un résultat plus précis que celui énoncé :

$$(*) \quad \begin{cases} \textit{Il existe un } 1 \leq p \leq n \textit{ et un sous-faisceau cohérent } F \textit{ de } \Omega_X^p \\ \textit{tel que } \kappa(X, \det(F)) = n, \textit{ où } \kappa(X,.) \textit{ désigne la dimension de} \\ \textit{Kodaira-Iitaka.} \end{cases}$$

On en déduit au paragraphe 1 une nouvelle démonstration de la simple connexité des surfaces $K3$ et au paragraphe 2 la finitude du groupe fondamental de certaines variétés de dimension algébrique zéro qui jouent un rôle clé dans la structure des variétés kählériennes compactes non-projectives.

Par ailleurs, ce résultat conduit naturellement à l'étude :

1) des sous-variétés analytiques compactes de $\widetilde{X}$, revêtement universel de X;
2) géométrique des faisceaux cohérents $F \subset \Omega_X^p$ satisfaisant (*).

Concernant 1), au paragraphe 3, nous démontrons l'existence d'une $\widetilde{\Gamma}$-*réduction* $\widetilde{\gamma} : \widetilde{X} \to \widetilde{Z}$ pour toute variété kählérienne compacte et connexe : $\widetilde{Z}$ paramétrise (essentiellement) les sous-variétés complexes compactes et connexes maximales de $\widetilde{X}$. Cette $\widetilde{\Gamma}$-réduction est donc analogue à la réduction de Stein dans la théorie des variétés holomorphiquement convexes et devrait être l'une des étapes dans la solution de la conjecture de SHAFAVEVITCH [S], qui peut alors être reformulée comme suit : *$\widetilde{Z}$ est modification propre d'un espace de Stein normal.* Remarquons qu'il existe des variétés complexes compactes (non Kählériennes) qui n'admettent pas de telle $\widetilde{\Gamma}$-réduction (voir 3.11.2′). La $\widetilde{\Gamma}$-réduction de X fournit une Γ-*réduction* $\gamma : X \to Z = \widetilde{Z}/\Gamma$ par passage au quotient. C'est un nouvel invariant biméromorphe de X, ainsi que $\mathrm{gd}(X) := \dim(Z)$, que nous appellons la Γ-*dimension de* X. Nous déduisons du paragraphe 3 au paragraphe 5 une nouvelle démonstration de la simple-connexité des variétés rationnellement connexes, ainsi que certains résultats de M. NORI et R. GURJAR ([N] et [R]).

Concernant 2), au paragraphe 4, nous montrons que *si* $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, *et si* $\mathrm{gd}(X) = n \leq 3$, *alors* X *est de type général, c'est-à-dire que* $\kappa(X)$, *sa dimension de Kodaira, est égale à* n. La démonstration utilise l'existence de modèles minimaux en dimension 3 et n'est donc pas généralisable sous cette forme en dimension supérieure.

Les résultats de ce travail sont généralisés dans [C5].

Note. — J. Kollàr vient de me transmettre son preprint [Kol] qui traite entre autres choses également des questions abordées ici aux paragraphes 3, 4. Il obtient en particulier la Γ-réduction de X, qu'il baptise *morphisme de Shafavevitch*, lorsque X est algébrique. Je voudrais le remercier de m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure.

1. Surfaces $K3$

Définition 1.1. — *Une surface* $K3$ *est une variété complexe compacte et connexe* S *de dimension* 2 *telle que* :

$$K_S \cong \mathcal{O}_S \quad \text{et} \quad q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0.$$

Théorème 1.2. — *Une surface* $K3$ *est simplement connexe.*

Remarque 1.3. — Ce résultat est bien connu. Il est habituellement démontré soit à l'aide de l'existence de métriques Ricci-plates, soit à l'aide d'un résultat intermédiaire de la théorie des déformations : les surfaces $K3$ sont toutes déformation d'une quartique de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. On le déduit ici directement de [G].

Démonstration. — Nous avons $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 2 \neq 0$ si S est une surface $K3$. Soit $r : \overline{S} \to S$ un revêtement de degré $d \geq 1$. Alors $K_{\overline{S}} \cong \mathcal{O}_{\overline{S}}$. Donc $2d = \chi(\mathcal{O}_{\overline{S}}) = 1 - \overline{q} + \overline{p}_g = 2 - \overline{q} \leq 2$ et $d = 1$.

Il suffit donc d'établir que $\pi_1(S)$ est fini pour conclure.

Or, si $\pi_1(S)$ est infini, puisque $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$, il résulte de [G, § 3], si S est kählérienne, que pour $p = 1$ ou 2, il existe un sous-faisceau F de rang r de Ω_S^p tel que $\kappa(S, \det F) = 2$. Or, ceci entraîne $p = 1$ et contredit le lemme de Castelnuovo-De Franchis ([B-P-V, VII, prop. 4.2]).

Lorsque S est kählérienne, le résultat est donc établi. Il faut procéder autrement lorsque S n'est pas supposée kählérienne ; on a d'ailleurs, plus généralement :

Théorème 1.4. — *Soit* S *une surface complexe compacte connexe telle que* $K_S^{\otimes m} \cong \mathcal{O}_S$ *pour un entier* $m > 0$. *Si* $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$, *alors* $\pi_1(S) = 1$ *ou* $\mathbb{Z}_2$, *et* S *est soit une surface* $K3$, *soit une surface d'Enriques.*

Démonstration de 1.4

LEMME 1.5. — *Si de plus $K_S \cong \mathcal{O}_S$, alors $\chi(\mathcal{O}_S) = 2 - q > 0$.*

Démonstration. — Sinon, $q \geq 3$ et $h^{1,0}(S) \geq 2$. On peut donc trouver deux formes holomorphes u_1 et u_2 de degré 1 (d-fermées car $\dim_{\mathbb{C}}(S) = 2$). Si $u_1 \wedge u_2 \neq 0$, alors S est un tore complexe, sinon K_S serait effectif, comme on le voit en considérant le diviseur de ramification de l'application d'Albanese de S. Si $u_1 \wedge u_2 = 0$, il existe un morphisme $\psi : S \to C$ sur une courbe de genre $g \geq 2$ telle que $u_i = \psi^*(v_i)$ (avec $i = 1, 2$) par le lemme de Castelnuovo-De Franchis. Les fibres de ψ sont elliptiques, et la formule de Kodaira pour le calcul du fibré canonique montre que $\kappa(S) \geq 1$ ([B-P-V, p. 161 et 162]). (Remarquons que cet argument est inutile si l'on sait déjà que $\chi(\mathcal{O}_S) > 0$, par exemple si $q = 0$). Contradiction. Donc $q = 0$, 1 ou 2 et $\chi(\mathcal{O}_S) = 2$, 1 ou 0. $\square$

LEMME 1.6. — *Soit S une surface complexe compacte et connexe, g une métrique hermitienne sur S, $*$ l'opérateur de Hodge associé à $\rho^*(g)$ sur $\widetilde{S}$, le revêtement universel de S, et opérant sur $\mathcal{E}^{\bullet,\bullet}(S)$. Si u est une $(0,2)$-forme harmonique pour $\Delta_{\bar{\partial}}$, alors $(*u)$ est une $(2,0)$-forme harmonique holomorphe sur $\widetilde{S}$.*

Démonstration. — On a $*(\mathcal{E}^{p,q}) = \mathcal{E}^{2-p,2-q}$ et $\bar{\partial}(*u) = 0$. $\square$

COROLLAIRE 1.7. — *Si, dans* 1.6, *on a de plus $K_S \cong \mathcal{O}_S$, et si $\pi_1(S)$ est infini, alors il n'y a pas de* (0,2)*-forme harmonique L_2 non nulle u sur $\widetilde{S}$.*

Démonstration. — En effet $(*u)$ est, par trivialisation de K_S, identifiable à une fonction holomorphe L_2 sur $\widetilde{S}$; donc $*u = u = 0$, puisque $\widetilde{S}$ n'est pas compacte. $\square$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 1.4.

Supposons que $\pi_1(S)$ soit infini, où $\widetilde{S}$ est le revêtement universel de S et $\Gamma = \pi_1(S)$. Soit $\widetilde{h^{0,p}}$ la Γ-dimension de l'espace des formes C^∞ de type $(0,p)$ harmoniques pour $\Delta_{\bar{\partial}}$ et L_2 sur $\widetilde{S}$. Le théorème de l'indice L_2 (voir [A]) montre alors que

$$\widetilde{h^{0,2}} - \widetilde{h^{0,1}} + \widetilde{h^{0,0}} = \widetilde{h^{0,2}} - \widetilde{h^{0,1}} = \chi(\mathcal{O}_S) > 0,$$

ce qui est impossible, puisque $\widetilde{h^{0,2}} = 0$ par 1.7. Donc $\pi_1(S)$ est fini, et si $\overline{S}$ est le revêtement universel de S, $\chi(\mathcal{O}_{\overline{S}}) \leq 2$ montre que $\mathrm{Card}(\pi_1(S)) \leq 2$. On doit donc avoir $q = 0$ et S est soit une surface $K3$, soit une surface d'Enriques ($q = 0$, $K_S^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_S$, $K_S \not\cong \mathcal{O}_S$). $\square$

2. Dimension algébrique zéro

CONVENTIONS 2.0. — On désigne par X une variété kählérienne compacte et connexe; par $a(X)$ sa dimension algébrique; par $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$ sa dimension; par $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ son irrégularité. On note $\rho : \widetilde{X} \to X$ le revêtement universel de X et $r : \overline{X} \to X$ un revêtement étale de degré fini d de X.

DÉFINITION 2.1 (voir [F]). — X est dite *simple* si $n \geq 2$ et si X n'est pas recouverte par ses sous-ensembles analytiques compacts et irréductibles Y tels que $0 < \dim(Y) < n$.

EXEMPLES 2.2. — Le tore complexe « général » de dimension $n \geq 2$ est simple; la surface $K3$ « générale » S est simple. La déformation « générale » de $X_0 = \overline{S \times S}/\bar{\sigma}$, éclatée de $S \times S$ le long de la diagonale et divisé par $\bar{\sigma}$, relèvement à $\overline{S \times S}$ de l'involution de $S \times S$ qui échange les deux facteurs, est simple (exemple dû à A. FUJIKI et étendu à un nombre quelconque de facteurs par A. BEAUVILLE). Remarquons que tous ces exemples sont symplectiques, c'est-à-dire possèdent une 2-forme holomorphe de rang maximum en chaque point.

Si X est simple, $a(X) = 0$ et $q(X) = 0$ ou n; dans ce dernier cas X est biméromorphe à sa variété d'Albanese [U, p. 159]. (Ceci provient de ce qu'un tore complexe T est de dimension algébrique strictement positive s'il contient un diviseur effectif D, et de ce que $a(Z) > 0$ si $Z \subset T$ est un sous-ensemble analytique compact qui engendre T. On prend alors $Z = \mathrm{Alb}(X)$; donc $Z = \mathrm{Alb}(X) = T$, et le diviseur D de ramification de $\mathrm{Alb} : X \to \mathrm{Alb}(X) = T$ est vide.)

La structure des variétés kählériennes compactes peut être systématiquement réduite à celle des variétés projectives et des variétés simples à l'aide de fibrations biméromorphes canoniques (voir [C1, 3] et [F]).

EXEMPLE 2.3. — Si X est de dimension 3, et non-projective, alors on a l'un des cas suivants (à équivalence biméromorphe près) :

1) $a(X) = 2$ et X est elliptique;

2) $a(X) = 1$ et après revêtement fini, $X = S \times C$, où C est une courbe et S une surface telle que $a(S) = 0$, c'est-à-dire soit une surface $K3$, soit un tore;

3) $a(X) = 1$ et $\alpha : X \to C$, la réduction algébrique de X a pour fibre générique $\mathbb{P}(A_E)$, où E est une courbe elliptique et A_E l'unique fibré non scindé $0 \to \mathcal{O}_E \to A_E \to \mathcal{O}_E \to 0$ sur E;

4) $a(X)=0$ et X est soit un tore, soit revêtue par un tore ($q=2,3$), soit un $\mathbb{P}_1$-fibré sur une surface $K3$ ($q=0$) ;

5) $a(X)=q(X)=0$ et X est simple. (Voir 2.10, 2.11 et 2.12 ci-dessous pour ce dernier cas).

QUESTION 2.4. — Une variété simple est-elle *quasi-symplectique*? (c'est-à-dire : admet-elle une 2-forme holomorphe génériquement de rang maximum, après éventuel passage à un revêtement ramifié de degré fini). En particulier, si $q(\overline{X})=0$ pour tout revêtement ramifié de degré fini $\overline{X}$ de X, et si X est simple, n est-il pair ?

THÉORÈME 2.5. — *Soit X une variété* simple *telle que $\chi(\mathcal{O}_X)\neq 0$. Alors $\pi_1(X)$ est fini de cardinal au plus 2^{n-1}.*

Démonstration. — Nous montrons d'abord que $q(X)=0$. Mais X étant simple, si $q(X)\neq 0$, on a $q(X)=n$ et $\chi(\mathcal{O}_X)=0$ d'après le LEMME 2.7 (iii) ci-dessous. Contradiction. □

LEMME 2.6. — *Soit X une variété simple avec $q(X)=0$ et $\chi(\mathcal{O}_X)\neq 0$. Alors $\pi_1(X)$ est fini.*

Démonstration. — Supposons $\pi_1(X)$ infini. Alors $\widetilde{X}$ n'est pas recouverte par ses sous-ensembles analytiques compacts de dimension positive, sans quoi X serait recouverte par les images par $\rho:\widetilde{X}\to X$ des sous-ensembles compacts de $\widetilde{X}$ de dimension intermédiaire entre 1 et $(n-1)$ (avec $n=\dim_{\mathbb{C}}(X)$), qui recouvrent $\widetilde{X}$. La démonstration de [G, § 3] s'applique donc et montre que X est projective, puisque $\chi(\mathcal{O}_X)\neq 0$. Contradiction. Par conséquent, $\pi_1(X)$ est fini. □

On déduit de ce qui précède que $\pi_1(X)$ est fini. Alors 2.5 résulte de :

LEMME 2.7. — *Si $a(X)=0$, on a :*

(i) $h^i(X,\mathcal{O}_X)\leq\binom{n}{i}$ *pour tout* $i\geq 0$;

(ii) $|\chi(\mathcal{O}_X)|\leq 2^{n-1}$;

(iii) *si $\chi(\mathcal{O}_X)\neq 0$, et si $r:\overline{X}\to X$ est un revêtement étale de degré d, on a $d\leq 2^{n-1}$.*

Démonstration. — La partie (i) résulte de $h^i(X,\mathcal{O}_X)=h^0(X,\Omega^i_X)$, de ce que $\mathrm{rg}(\Omega^i_X)=\binom{n}{i}$ et de ce que pour tout fibré vectoriel V de rang r sur X, on a $h^0(X,V)\leq r$. Ensuite (ii) est clair, et (iii) provient de l'égalité $|\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})|=d\,|\chi(\mathcal{O}_X)|\geq d$ combinée avec $\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}})|\leq 2^{n-1}$ puisque $a(\overline{X})=a(X)=0$. □

QUESTION 2.7. — Si X est simple et si $q(\overline{X}) = 0$ pour tout revêtement $\overline{X} \to X$, étale en codimension 1, a-t-on $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$?

Lorsque $n = 3$, on peut renforcer ce résultat :

THÉORÈME 2.8. — *Soit X kählérienne compacte connexe avec $n = 3$ et $a(X) = q(X) = 0$. Alors $\pi_1(X)$ est fini et égal à $\{1\}$, $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}_3$.*

Démonstration. — On a $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X) \neq 0$, sans quoi X serait projective, d'après un résultat de Kodaira. (On aurait en effet $H^2(X, \mathbb{R}) = H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, et le cône de Kähler contiendrait une classe rationnelle.) Donc

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + h^{2,0} - h^{3,0} \geq h^{2,0} > 0,$$

car $h^{3,0}(X) \leq \binom{3}{3} = 1$ puisque $a(X) = 0$.

Donc X ne peut être Γ-réduite, (c'est-à-dire que $\widetilde{X}$ est recouverte par une famille de sous-ensembles analytiques compacts de dimension $\delta = 1$ ou 2. Ce dernier cas est d'ailleurs exclus, puisque $a(X) = 0$), sans quoi X serait projective, par [G, 3.2].

Donc, ou bien X est simple, auquel cas $\pi_1(X)$ est fini, ou bien X n'est pas simple. Alors X est recouverte par une famille de courbes $(C_s)_{s \in S}$, génériquement irréductibles, et par le point générique de X ne passe qu'une seule courbe de la famille, sans quoi X serait recouverte par une famille de diviseurs, contrairement à l'hypothèse : $a(X) = 0$.

Il existe donc une quasi-fibration $\varphi : X \to S$, où S est une surface avec $a(S) = q(S) = 0$; donc S est une surface $K3$ et $\pi_1(S) = 0$. Si $g(C)$ est le genre de la fibre générique de φ, on a $g(C) \leq 1$ [U, p. 145]. Si $f : X \to S$ est un morphisme surjectif sur une surface S avec $a(S) = 0$ et si $g(C) = 1$, alors les fibres lisses de f sont deux à deux isomorphes (sinon l'invariant j fournirait une fonction méromorphe non constante sur S). Donc X est biméromorphe à un fibré localement trivial de fibre C et de base S (voir [C3]). Donc :

- si S est une surface $K3$, X est biméromorphe à $C \times S$, ce qui contredit $a(S) = 0$;

- si S est un tore complexe, après changement de base étale fini, $q(X) = 3$, et X est un tore [Bl].

(On a donc montré que X est revêtue par un tore si $a(X) = 0$ et $q(X) = 2$.)

Donc : $g = 0$, $C \cong P_1(\mathbb{C})$ et $\pi_1(X) = 0$. $\square$

LEMME 2.9. — *Si $a(X) = q(X) = 0$, si $n = 3$ et si $r : \overline{X} \to X$ est un revêtement étale de degré d, alors $d \leq 3$.*

Démonstration. — Si $q(\overline{X}) > 0$, on a $q(\overline{X}) = 2$ ou 3. Dans les deux cas, on a : $\chi(\mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ par l'argument précédent. Contradiction, puisque $\chi(\mathcal{O}_X) > 0$. On a donc :

$$q(\overline{X}) = q(X) = 0,$$
$$1 \leq h^{2,0}(X) \leq h^{2,0}(\overline{X}) \leq 3,$$
$$0 \leq h^{3,0}(X) \leq h^{3,0}(\overline{X}) \leq 1.$$

Une liste des six cas possibles établit facilement le résultat. □

REMARQUE 2.10. — Aucun exemple de variété kählérienne compacte connexe simple X de dimension 3 avec $q(X) = 0$ n'est connu. Remarquons que nous avons démontré, plus précisément : *sous les hypothèses de* 2.8, *X est soit simple avec* $\mathrm{Card}(\pi_1(X)) \leq 3$, *soit biméromorphe à un $\mathbb{P}_1$-fibré de base S, surface $K3$ (de dimension algébrique zéro).* Donc $\mathrm{Card}(\pi_1(X)) \leq 3$ dans tout les cas.

QUESTION 2.11. — Existe-t-il un X comme en 2.10 ? Si un tel X existe, il ne peut être construit par aucun des procédés usuels. Par exemple :

THÉORÈME 2.12. — *Soit X_0 Kähler compacte connexe avec $n = 3$ et $a(X) = q(X) = 0$. S'il existe un morphisme propre lisse et connexe $\Phi : \mathcal{X} \to S$ avec S connexe, à fibres Kähler et $s_0, s_1 \in S$ tels que $X_{s_0} \cong X_0$ et X_{s_1} projective, alors X_0 est biméromorphe à un $\mathbb{P}_1$-fibré sur S, une surface $K3$ avec $a(S) = 0$.*

REMARQUE 2.13. — En particulier, X_0 n'est pas simple, de sorte que les X de 2.10 ne peuvent pas être construites par déformation kählérienne d'une variété projective.

Démonstration. — La démonstration de 2.8 montre qu'il suffit de montrer que X_0 est uniréglée. Or, si une variété projective X_{s_1} satisfait $\chi(\mathcal{O}_{X_{s_1}}) > 0$, elle est uniréglée. Puisque $\chi(\mathcal{O}_{X_0}) = \chi(\mathcal{O}_{X_{s_1}}) > 0$, nous savons que X_{s_1} est uniréglée (voir [Mi], [Mo]). Les petites déformations de X_{s_1} sont donc aussi uniréglées [Ko]. La S-propreté de $\mathrm{Chow}(\mathcal{X}/S)$ montre alors aussi que X_0 est uniréglée. Cette S-propreté résulte de [Li] ou [G-A], et de l'existence d'une forme hermitienne continue dont la forme de Kähler ω est d-fermée sur les fibres de Φ. La conclusion résulte alors des arguments de 2.8.

REMARQUE 2.14. — A l'aide des résultats précédents, on peut facilement montrer que si X est kählérienne compacte avec $\dim(X) = 3$, alors $\pi_1(X)$ est commensurable à $\pi_1(X')$ avec X' projective.

3. $\widetilde{\Gamma}$-réduction

NOTATIONS 3.0. — On désignera par X une variété kählérienne lisse compacte et connexe de dimension complexe n, par $f : \widetilde{X} \to X = X/\Gamma$ son revêtement universel, avec $\Gamma \cong \pi_1(X)$. (On pourrait dans ce qui suit supposer seulement X dans la classe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire biméromorphe à une variété kählérienne compacte.)

Si $\Delta \subset \Gamma$ est un sous-groupe, nous noterons : $f_\Delta : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_\Delta := \widetilde{X}/\Delta$ et $g_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \to X$ les revêtements connexes déduits de Δ, de sorte que $f = g_\Delta \circ f_\Delta$ pour tout Δ.

CONVENTION 3.1. — On désignera par $\mathcal{C}(Y)$ ou $\mathrm{Chow}(Y)$ la variété de Chow (ou espace des cycles) d'un espace analytique Y, construite dans [B].

Lorsque X est kählérienne compacte, les composantes (irréductibles) de $\mathrm{Chow}(X)$ sont compactes (voir [Li], [G-A]).

Si ω est une forme de Kähler sur X et si

$$Z = \sum_{i \in I} n_i Z_i$$

est un p-cycle compact de X de dimension pure p, on note

$$\mathrm{vol}(Z) = \sum_{i \in I} n_i \,\mathrm{vol}(Z_i), \quad \text{où} \quad \mathrm{vol}(Z_i) = \int_{Z_i} \omega^{\wedge p},$$

l'intégrale convergente (par [Le], voir [G-A]) étant calculée sur le lieu lisse de la composante Z_i de Z.

3.2. Applications méromorphes.

Une application méromorphe $\varphi : X \to Y$ entre espaces irréductibles est un sous-ensemble analytique irréductible $\overline{X}$ de $X \times Y$ qui est une modification propre $u : \overline{X} \to X$ de X. On dit que φ est *propre et connexe* si la projection $\bar{\varphi} : \overline{X} \to Y$ est propre et surjective à fibres connexes.

On dira que φ est une *quasi-fibration* [C3] si elle est propre et connexe, et si $\bar{\varphi}(\mu^{-1}(I)) \underset{\neq}{\subset} Y$, où $I \subset X$ est le lieu d'indétermination de

$$\mu^{-1} : X \longrightarrow \overline{X}.$$

On a défini (dans [C3]) la notion de famille des fibres et de représentant canonique d'une application méromorphe $\varphi : X \to Y$.

DÉFINITION 3.3. — On dira que X est Γ-réduite si pour $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, général dans $\widetilde{X}$, le seul sous-ensemble analytique *compact et connexe* contenant $\tilde{x}$ est $\tilde{x}$ lui-même (« général » signifie, conformément à la terminologie de [C1] : dans une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses).

EXEMPLE 3.4. — Un tore complexe est Γ-réduit, ainsi qu'une courbe de genre $g \geq 1$. La définition précédente est motivée par [G]. Remarquons que si X est Γ-réduite, et si X' est biméromorphe à X, X' est aussi Γ-réduite. On dira que Y est Γ-*réduit* si une (toute) désingularisation de Y l'est.

THÉORÈME 3.5. — *Soit Δ un sous-groupe de $\Gamma := \pi_1(X)$. Il existe une quasi-fibration propre $\tilde{\rho}_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \mapsto \widetilde{Z}_\Delta$, appelée la* $\widetilde{\Delta}$-réduction *de X, dont la fibre générale $\widetilde{X}_{\Delta,\tilde{a}} = \tilde{\rho}_\Delta^{-1}(\tilde{\rho}_\Delta(\tilde{a}))$, $\tilde{a} \in \widetilde{X}_\Delta$, est le plus grand sous-ensemble analytique (complexe) compact et connexe de $\widetilde{X}_\Delta$ contenant $\tilde{a}$. Si $\Delta = \{1\}$, on notera $\tilde{\rho} : \widetilde{X} \to \widetilde{Z}$ cette quasi-fibration, qui sera alors appelée la* $\widetilde{\Gamma}$-réduction *de X.*

Avant de donner la démonstration (en 3.12), voici quelques remarques.

REMARQUE 3.6. — Le résultat précédent et sa démonstration restent vrais lorsque $\widetilde{X}$ est un revêtement quelconque de X. Voici quelques conséquences de ce résultat.

COROLLAIRE 3.7. — *La quasi-fibration $\tilde{\rho}$ est invariante par le groupe des automorphismes complexes de $\widetilde{X}$, et donc en particulier Γ-invariante.*

DÉFINITION 3.8. — En passant au quotient par Γ, on obtient une application méromorphe propre et connexe $\rho : X \to Z = \widetilde{Z}/\Gamma$ appelée la Γ-*réduction de* X. C'est une quasi-fibration.

REMARQUE 3.9. — $\rho : X \to Z$ est un invariant biméromorphe de X. On peut donc supposer Z lisse et ρ régulière, quitte à modifier X. (C'est ce que l'on fera désormais.)

On peut caractériser $\rho : X \to Z$ de la façon suivante.

COROLLAIRE 3.10. — *Soit $\psi : X \to Y$ une application mérmorphe surjective avec Y lisse et Γ-réduit. Alors ψ se factorise par ρ (c'est-à-dire : il existe $\eta : Z \to Y$ tel que $\psi = \eta \circ \rho$).*

Démonstration. — Soient $\sigma : \widetilde{Y} \to Y$ le revêtement universel de Y et $\overline{X} := X \underset{Y}{\times} \widetilde{Y}$. C'est un revêtement de X, et on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \overline{X} \\ {\scriptstyle\tilde{\rho}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\bar{\psi}} \\ \widetilde{Z} & & \widetilde{Y} \end{array}$$

Or Y est Γ-réduit par hypothèse. Donc, si $\widetilde{X}_Z$ est la fibre générique de $\tilde{\rho}$ (qui est donc compacte et irréductible), $u(\widetilde{X}_Z)$ est contenue dans une fibre de $\bar{\psi}$. $\square$

REMARQUE 3.11. — Il existe des applications méromorphes *connexes* $\varphi : X \to Y$ où X est Γ-réduit et Y non Γ-réduit (par exemple : φ l'application méromorphe associée à un faisceau linéaire sur un tore de dimension $n \geq 2$). De plus, Z n'est pas nécessairement Γ-réduit en général. Par exemple, si $\sigma : S \to S$ est une involution sans point fixe d'une surface $K3$, si $\gamma : C \to C$ est l'involution de quotient $C/\gamma \cong \mathbb{P}_1$ d'une courbe elliptique C, et si $X := S \times C/\tau$, où τ est l'involution $\sigma \times \gamma$ de $S \times C$, on vérifie sans peine que la Γ-réduction de X est $\pi : X \to C/\gamma = \mathbb{P}_1$.

Démonstration de 3.5.

Le résultat-clé est le suivant.

PROPOSITION 3.12. — *Soient $C \geq 0$ une constante, p un entier et $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$ une partie compacte de $\widetilde{X}$. Il existe alors un compact $\widetilde{K} = \widetilde{K}(\widetilde{A}, C)$ de $\widetilde{X}$ tel que, pour tout $Z \in \mathrm{Chow}_p(\widetilde{X})$, les conditions* 1) *et* 2) *suivantes entraînent la condition* 3) :

1) *Z est connexe et rencontre $\widetilde{A}$* ;

2) $\mathrm{vol}(Z) \leq C$;

3) *Z est contenu dans $\widetilde{K}$.*

Démonstration. — Soient g la métrique sur X associée à ω et $\tilde{d}_g$ la distance sur $\widetilde{X}$ induite par $\tilde{g} = d^*g$: alors $\widetilde{X}$ est complète pour $\tilde{d}_g$ (théorème de Hopf-Rinow). Soit $r > 0$ tel que pour tout a de X :

(i) $\exp_a : T_aX \to X$ induit un difféomorphisme d'un ouvert convexe de T_aX sur $B(a, 4r)$.

(ii) Il existe un isomorphisme analytique complexe

$$\varphi_a : U_a \longrightarrow B(a, 4r)$$

où U_a est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et une constante $\alpha > 0$ (indépendante de a) telle que $\varphi_a^*(\omega) \geq \alpha \cdot \omega_0$, où ω_0 est la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Il existe alors une constante universelle $C(n,p)$ telle que, pour tout p-cycle $\widetilde{Z}$ de $\widetilde{X}$, et tout $\tilde{a} \in \widetilde{Z}$, on a :

(iii) $\operatorname{vol}(\widetilde{Z} \cap B(\tilde{a}, 3r)) \geq \alpha^{2p} r^{2p} C(n,p)$ (c'est le «lemme de Bishop», voir [G-A, II, § 1, p. 9, prop. 1]).

Soit alors $\widetilde{K} := \{\tilde{x} \in \widetilde{X} \mid \tilde{d}_g(\widetilde{A}, \tilde{x}) \leq N\}$, où $N > C/(\alpha r)^{2p} \cdot C(n,p)$.

Supposons que $\widetilde{Z}$ (qui est connexe), ne soit pas contenu dans $\widetilde{K}$. On peut donc trouver des a_i dans $\widetilde{Z}$ tels que les $B(a_i, r)$ soient disjointes, et avec $a_N \notin \widetilde{K}$ et $a_1 \in \widetilde{A}$. Mais ceci contredit $\operatorname{vol}(\widetilde{Z}) \leq C$ à cause de (iii), et établit donc la proposition. $\square$

NOTATION 3.13. — Si $\widetilde{Z} \in \operatorname{Chow}_p(\widetilde{X})$, on définit $f_*(Z) \in \operatorname{Chow}_p(X)$ comme suit lorsque $\widetilde{Z}$ est irréductible et réduit :

$$f_*(Z) = m(\widetilde{Z}) \cdot f(Z),$$

où $m(\widetilde{Z}) = \operatorname{Card}(\Gamma_{\widetilde{Z}})$ si $\Gamma_{\widetilde{Z}}$ est le stabilisateur de $\widetilde{Z}$ dans Γ. On étend cette définition par additivité à $\operatorname{Chow}_p(\widetilde{X})$.

LEMME 3.14. — *On a* $\operatorname{vol}(f_*\widetilde{Z}) = \operatorname{vol}(\widetilde{Z})$ (*où* vol *est calculé dans* $\widetilde{X}$ *à l'aide de* $f^*\omega$).

Démonstration. — $m(\widetilde{Z})$ est aussi le degré de l'application $f_{|\widetilde{Z}}$. $\square$

LEMME 3.15. — *Si T est une composante irréductible de* $\operatorname{Chow}_p(\widetilde{X})$, *l'application* $f_* : T \to \operatorname{Chow}_p(X)$ *est analytique* (*quitte à la composer avec la normalisation de T*) *et d'image fermée.*

Démonstration. — L'analyticité résulte, par exemple, de [B, § 6]. Supposons maintenant que $f_*(\widetilde{Z}_n) \to Z$ lorsque $n \to +\infty$, où $\widetilde{Z}_n \in T$. Alors $\operatorname{vol}(\widetilde{Z}_n) = \operatorname{vol}(f_*(\widetilde{Z}_n))$ est une constante. Quitte à remplacer chacun des $\widetilde{Z}_n$ par l'un de ses Γ-translatés, on peut supposer que $\widetilde{Z}_n$ rencontre $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$, un compact tel que $f(\widetilde{A}) = X$. Appliquant [C1], on peut se ramener au cas où les $\widetilde{Z}_n$ sont irréductibles, donc connexes. On déduit alors de 3.12 que $\widetilde{Z}_n \subset \widetilde{K}$ pour tout n. On déduit alors de [Li] ou [G-A], que la famille des Z_n est contenue dans un compact de $\operatorname{Chow}_p(\widetilde{X})$, et converge donc, quitte à en prendre une suite extraite. On conclut par la continuité de f_*. $\square$

REMARQUE 3.16. — En général, f_* n'est pas ouverte, comme le montre l'exemple (local) d'une courbe rationnelle cubique ayant un point double ordinaire dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. La condition X Kähler est inutile pour que f_* soit fermée, comme le montrent les arguments précédents.

LEMME 3.17. — *Soit $G \subset T \times \widetilde{X}$ le graphe d'incidence de la famille de p-cycles de $\widetilde{X}$ paramétrée par T. Soient $q : G \to \widetilde{X}$ et $r : G \to T$ les projections naturelles. Alors q (et r) sont propres.*

Démonstration. — La propriété de r est générale par construction. Celle de q résulte de [Li] ou [G-A] car, si $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$ est compact, $r(q^{-1}(\widetilde{A}))$ est l'ensemble des $\widetilde{Z}$ de T tels que $\widetilde{Z}$ rencontre $\widetilde{A}$. On déduit alors de 3.12 que $\widetilde{Z} \subset \widetilde{K}(\widetilde{A}, \mathrm{vol}(T))$ et donc que $r(q^{-1}(\widetilde{A}))$, donc aussi

$$r^{-1}\big(r\big(q^{-1}(\widetilde{A})\big)\big) \supset q^{-1}(\widetilde{A}). \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le résultat principal de [C1].

THÉORÈME 3.18. — *Soient G, T, Y des espaces analytiques irréductibles et normaux, $q : G \to Y$ et $r : G \to T$ des applications analytiques* propres *et surjectives, avec r à fibres connexes. Il existe alors une quasi-fibration propre à fibres connexes $t : Y \to V$, dont la fibre générique $Y_b := t^{-1}(t(b))$ pour b générique dans Y est*

$$T^\infty = \bigcup_{n \geq 0} T^n,$$

où T^n est défini par récurrence sur n par

$$T^{n+1} = q\big(r^{-1}\big(r\big(q^{-1}(T^n)\big)\big)\big),$$

de sorte que $T^0 = \{b\}$ et que T^∞ est l'ensemble des c de Y qui peuvent être joints à b par une chaîne connexe de cycles de la forme $q(r^{-1}(t)) = Z_t$ avec $t \in T$.

REMARQUE 3.19. — Le résultat de [C1] est formulé seulement pour T compact, mais sa démonstration est valable lorsque q est seulement supposée propre. Voir [C1] pour d'autres détails sur cette construction. Pour la commodité du lecteur, nous avons réécrit en appendice la démonstration de 3.18.

REMARQUE 3.20. — Une autre application de 3.18 est la suivante : *pour tout entier $g \geq 0$, si X est Kähler compacte, il existe une quasi-fibration $\varphi_g : X \to X_g$ telle que si a est général dans X et si $C \subset X$ est une courbe irréductible dont la normalisée est de genre $g' \leq g$, alors C est contenue dans $X_a = (\varphi_g)^{-1}(\varphi_g(a))$.*

Lorsque $g = 0$, $\varphi_0 : X \to X_0$ n'est autre que le «quotient rationnel» de X. (L'application précédente m'a été suggérée par une question de ZAK.)

DÉFINITION 3.21. — Lorsque T est une composante irréductible de $\mathrm{Chow}(Y)$ et G le graphe de la famille de cycles de Y paramétrée par T, on appellera $t : Y \to V$ le *T-quotient* de Y, et V sera noté Y/T.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de 3.5.

Soit $d = \min(\dim V)$, lorsque $\varphi : Y \to V$ parcourt l'ensemble des quasi-fibrations propres et connexes définies sur Y. On a $d \leq n = \dim Y$ en prenant $V = Y$ et $\varphi = \mathrm{Id}_Y$. Soit $\varphi : Y \to V$ une quasi-fibration avec $\dim(V) = d$. Supposons que, par le point générique y de Y, il passe un sous-espace compact non contenu dans $Y_y := \varphi^{-1}(\varphi(V))$. Il existe alors, puisque $\mathrm{Chow}(Y)$ est dénombrable à l'infini, une composante irréductible T de $\mathrm{Chow}(Y)$ telle que $\dim \varphi(Z_t) > 0$ si $(Z_t)_{t \in T}$ est la famille de cycles de Y paramétrée par T, et l'on peut supposer Z_t irréductible pour t générique dans T (voir [C1]). On considère alors la nouvelle famille de cycles paramétrée (méromorphiquement) par T et définie par $U_t := \varphi^{-1}(\varphi(Z_t))$: U_t est irréductible pour t générique dans T, et si $H \subset T \times Y$ est le graphe de la famille de cycles $(U_t)_{t \in T}$, alors H est la composante irréductible T-surjective de $\overline{H} := (\mathrm{Id}_T \times \varphi)^{-1}(\mathrm{Id}_T \times \varphi)(G)$ si G est le graphe d'incidence dans $T \times Y$ de la famille $(Z_t)_{t \in T}$. On applique maintenant 3.18 à (H, T, Y). Le T-quotient $W = Y/T$ ainsi obtenu satisfait la condition $d > \dim(W)$. Contradiction. $\square$

4. Γ-dimension et dimension de Kodaira

Si X est Kähler compacte, si $\Gamma = \pi_1(X)$, et si Z est sa Γ-réduction, alors si $\chi(\mathcal{O}_Z) \neq 0$, Z est projective. Sinon $\chi(\mathcal{O}_Z) = 0$. Nous étudions ces deux classes de variétés en dimension $n \leq 3$.

DÉFINITION 4.1. — Soit $\gamma : X \to Z$ la Γ-réduction de X. Alors $\dim(Z)$ sera noté $\mathrm{gd}(X)$ et appelée la *Γ-dimension* de X.

C'est donc un invariant biméromorphe de X, et l'on a $\mathrm{gd}(X) = \dim(X)$ lorsque X est Γ-réduit et $\mathrm{gd}(X) = 0$ lorsque $\pi_1(X)$ est fini.

Remarquons aussi que si X est projective, et si H est une section hyperplane lisse de X, alors le théorème de Lefschetz montre que $\mathrm{gd}(X) = \mathrm{gd}(H) + 1$.

Enfin, si $\mathrm{gd}(X) = 1$, $\pi_1(X)$ est commensurable à $\pi_1(C)$, avec $g(C) \geq 1$. Si $r : Y \to X$ est génériquement finie surjective, alors $\mathrm{gd}(Y) \geq \mathrm{gd}(X)$. Le résultat de M. GROMOV montre que $\mathrm{gd}(X) = \dim(X)$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$ entraîne : X est projective.

PROPOSITION 4.2. — *Soit X une surface kählérienne telle que* $\mathrm{gd}(X) = 2$ *et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$. Alors X est de type général (c'est-à-dire, $\kappa(X) = 2$, si $\kappa(X) := \kappa(X, K_X)$ est la dimension de Kodaira de X).*

Démonstration. — D'après [G, § 3] (reformulé en 0.1), il existe un sous-faisceau $\mathcal{F}$ de Ω_X^p $(p = 1, 2)$ tel que $\kappa(X, \det(\mathcal{F})) = 2$. Ceci est impossible si $r = rg(\mathcal{F}) = 1$ et, si $p = 1$, par le lemme de Castelnuovo [B-P-V, p. 212]. On est donc dans l'un des deux cas : $r = 2$ et $p = 1$, ou $r = 1$ et $p = 2$. Dans ces deux cas, on a bien $\kappa(X) = 2$, puisque $\det(\Omega_X^1) \cong K_X$. $\square$

THÉORÈME 4.3. — *Soit X une variété kählérienne compacte et connexe de dimension* 3 *telle que $gd(X) = 3$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$. Alors $\kappa(X) = 3$.*

Démonstration. — Puisque X est Γ-réduite et que $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, il résulte de [G, § 3] qu'il existe un sous-faisceau cohérent F rang r de Ω_X^p $(p = 1, 2$ ou $3)$ tel que $\kappa(X, \det(F)) = 3$. Si $r = 1$, il résulte du lemme de Castelnuovo-De Franchis généralisé (voir 4.5 ci-dessous, ou [R, p. 638]) que $\kappa(X, F) \leq 1$. Ce cas est donc impossible. Donc $r \geq 2$. Si $r = 3$, on a $p = 2$ et $F = \Omega_X^p$, $p = 1$ ou 2. Donc $\det F = pK_X$ et X est bien de type général. Il reste donc le cas où $r = 2$ et $p = 1$ ou $p = 2$. Si $p = 1$, il résulte de 4.7 ci-dessous ou de [R, p. 638], que $\kappa(X, \det F) \leq 1$. Contradiction à nouveau. Le cas restant est donc $r = p = 2$. Dans ce cas, $\det(F)$ est un sous-faisceau de rang 1 de $(\overset{2}{\Lambda}\ \Omega_X^2) \cong \Omega_X^1 \otimes K$. L'assertion résulte alors du :

LEMME 4.4. — *Soit G un sous-faisceau cohérent de rang un de $(\Omega_X^1 \otimes K_X)$, où X est compacte de dimension* 3. *Si $\kappa(X, G) = 3$, on a $\kappa(X) = 3$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que l'hypothèse et la conclusion ne dépendent que de la classe de biméromorphie de X, de sorte que l'on peut supposr X projective. D'autre part, si Y est en position générale dans X, $\kappa(Y, G_{|Y}) = \dim(Y)$. Si $\kappa(X) = -\infty$, X est uniréglée (cf. [Mi], [Mo]). Il existe donc une application algébrique $f : \mathbb{P}_1 \to X$

telle que f^*T_X soit semi-positif (c'est-à-dire : $f^*TX \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ est ample), et $\kappa(\mathbb{P}_1, f^*(\Omega^1_X \otimes K_X)) = 1$. Mais ces deux conditions sont contradictoires. Donc $\kappa(X) \geq 0$.

Soit alors X' un modèle minimal à singularités terminales et $\mathbb{Q}$-factorielles de X, avec $K_{X'}$ numériquement effectif. Il existe donc un sous-faisceau cohérent G' de rang un de $\Omega^1_{X'} := d_*(\Omega'_X)$ tel que $\kappa(X', G') = 3$.

Soit $\Phi : X' \to V$ le morphisme défini par le système linéaire $|mK_{X'}|$ pour m assez grand, de telle sorte que $\dim(V) = d = \kappa(X)$ (cf. [Mi'], [K]).

Si $\kappa(X) = 0$, alors $(mK_{X'})$ est trivial. Donc :

$$\kappa(X', G' \otimes K^*_X) = \kappa(X', G') = 3.$$

Ceci contredit le lemme de Castelnuovo-De Franchis puisque $G' \otimes K^*_X$ est un sous-faisceau de $\Omega^1_{X'}$.

Si $\kappa(X) \geq 1$, la fibre générique E de Φ est lisse et $mK_{X'|E} = mK_E$ est trivial. On a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{O}_E^{\otimes d} \longrightarrow \Omega^1_{X'|E} \xrightarrow{u} \Omega^1_E \to 0.$$

On en déduit alors que l'application $u : H := G'_E \otimes K^*_E \to \Omega^1_F$ n'est pas nulle, puisque $\kappa(E, G'_{|E}) = \dim(E) > 0$ (si $\kappa(X) \leq 2$, ce qui nous supposons désormais). On a donc $\kappa(E, H) = \dim E$, et $u : H \to \Omega^1_F$ est non nulle. Le lemme de Castelnuovo-De Franchis montre alors que $\dim E \leq 1$. Mais si $\dim E = 1$, on ne peut avoir $\kappa(E, \Omega^1_E) = 1$ et mK_E trivial. Donc $\kappa(X) = 3$. □

REMARQUE 4.4′. — Il peut exister de tels sous-faisceaux F de Ω^2_X, tels que $\kappa(X, \det(F)) = 3$. Par exemple, si $X = C \times C \times C$, où C est une courbe de genre $g \geq 2$.

LEMME 4.5 (Généralisation du lemme de Castelnuovo-De Franchis). *Soient X une variété complexe compacte et connexe, F un faisceau analytique cohérent sur X de rang r et $v : F \to \Omega^p_X$ un morphisme de faisceaux injectif au point générique de X. Alors $\kappa(X, F) \leq p$ si $r = 1$ et $\kappa(X, \det F) \leq r$ si $p = 1$.*

Démonstration. — Ce lemme est bien connu (voir [R, p. 638]) où il est énoncé sans démonstration (pour $\dim(X) \geq 3$). Il suffit d'établir le résultat lorsque le système linéaire $(\det F)$ lui-même fournit une application méromorphe (que l'on peut supposer régulière en modifiant X) $\Phi : X \to V$ où $\dim(V) = \kappa(X, \det(F))$, en remplaçant X par un revêtement ramifié galoisien de groupe cyclique.

Lorsque $p = 1$, le lemme est alors démontré dans [Ca] et [Ra].

Faute de référence, nous traitons le cas $r = 1$.

Lorsque $r = 1$, si $d = \kappa(X, \det(F))$, nous pouvons choisir $d+1$ sections de F sur X, qui sont des p-formes holomorphes $\omega_0, \dots, \omega_d$ sur X, et des coordonnées locales $(z_1, \dots, z_d)$ de V au voisinage de son point générique v_0, telles que, dans les coordonnées locales

$$\Big(z_1 = \Phi^*(z_1), \dots, z_d = \Phi^*(z_d), \xi_{d+1}, \dots, \xi_n\Big)$$

de X au voisinage de x_0, point générique de $\Phi^{-1}(v_0)$ en lequel Φ est submersive, on ait $\omega_i = z_i \omega_0$ $(i = 1, \dots, d)$. Puisque les formes ω_i sont fermées, on a $\mathrm{d}z_i \wedge \omega_0 = 0$ (pour $i = 1, \dots, d$). Cette condition entraîne que $\omega_0 = \mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_d \wedge u_0$ (localement), et donc que $d \le p$. $\square$

REMARQUE. — Lorsque $r = 1$ et $p = d$, dans la situation du LEMME 4.5, on peut facilement établir que $\kappa(V) = \dim(V)$ et que $F = \Phi^*(K_V)$.

Les variétés kählériennes (compactes, connexes) X qui sont Γ-réduites avec $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ semblent très spéciales. Par exemple :

PROPOSITION 4.6. — *Soit S une surface kählérienne compacte connexe telle que $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$ et $\mathrm{gd}(S) = 2$. Alors $\kappa(S) = 0, 1$ et le modèle minimal de S est soit :*

1) *revêtu par un tore complexe ($\kappa(S) = 0$),*

2) *revêtu par un fibré analytique localement trivial de fibre E, une courbe elliptique, et de base C une courbe (projective complexe) de genre $g \ge 2$ ($\kappa(S) = 1$). (Un tel revêtement peut être ramifié le long de certaines fibres.)*

Démonstration. — Puisque $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 0$, on a $\kappa(S) \le 1$ [B-P-V, p. 207]. Si $\kappa(S) = -\infty$, alors S est réglée et ceci contredit $\mathrm{gd}(S) = 2$. Si $\kappa(S) = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$, alors S est tore ou bielliptique, c'est le cas 1). Si $\kappa(S) = 1$, et si $f : S \to C$ est la fibration d'Itaka de S, supposée minimale, la fibre générique de f est de genre 1. Il résulte alors de [B-P-V, p. 161–162 et th. III, 18.2, p. 110] que les fibres lisses de E de f sont deux à deux isomorphes, et les fibres singulières de type ${}_mI_0$, c'est-à-dire de la forme mF, avec F elliptique lisse. Il existe donc un changement de base fini (ramifié) $\beta : \overline{C} \to C$ tel que

$$\overline{X} := X \times_C \overline{C}$$

soit lisse et un fibré analytique localement trivial de fibre E sur $\overline{C}$. $\square$

Remarque . — Inversement, les surfaces décrites en 4.6 sont telles que $\mathrm{gd}(S) = 2$ et $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$. On a, en fait, démontré que si $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$, alors le modèle minimal de S est soit décrit en 4.6, soit une surface réglée de base elliptique, c'est-à-dire : S est biméromorphe à $E \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, où E est une courbe elliptique. On déduit de 4.6 la construction d'exemples de variétés X de toutes dimensions telle que $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$: il suffit de prendre celle revêtue par des fibrés $\overline{X}$ de base V arbitraire, kählérienne, et qui sont des fibrés analytiquement localement triviaux de fibre T un tore complexe. Si $\overline{X}$ est Kähler (ce n'est peut-être pas nécessaire), alors $\chi(\mathcal{O}_X) = \chi(\mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ (voir [H, p. 214]).

Questions 4.8. — X désignant toujours une variété kählérienne compacte connexe :

1) Existe-t-il des X avec

$$a(X) = 0 = \chi(\mathcal{O}_X) \quad \text{et} \quad \mathrm{gd}(X) = n \ (= \dim(X))$$

qui ne sont pas (biméromorphes à une variété) revêtues par un tore complexe ?

2) Plus généralement, si $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ et $\mathrm{gd}(X) = n$, existe-t-il ou non un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{g} & X_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & & V \end{array}$$

constitué d'applications analytiques surjectives dans lesquelles f est génériquement finie, g une modification, et h un fibré analytique localement trivial de base V Γ-réduite, et de fibre T, tore complexe ? Il est possible de montrer que ceci est encore vrai si $n = 3$, à une (éventuelle) exception près : celle dans laquelle X admet un modèle minimal X_0 (au sens du programme de S. Mori) tel que $K_{X_0} \equiv 0$ et $c_2(X) \neq 0$. Lorsque ce modèle minimal est lisse, il s'agit donc d'une variété de Calabi-Yau, et $\pi_1(X_0)$ est fini. Dans le cas singulier cependant, la finitude de $\pi_1(X_0)$ ne semble pas connue, bien qu'elle soit vraisemblable. Remarquons que l'on a $\chi(\mathcal{O}_{X_0}) = 0$ pour une variété de Calabi-Yau, de sorte que le résultat de M. Gromov ne peut être utilisé ici.

3) Une version plus faible de 2) est : si X est Γ-réduite et si $a(X) = \chi(\mathcal{O}_X) = 0$, $\pi_1(X)$ est-il presque abélien ?

On peut maintenant, grâce au théorème de Lefschetz, réduire l'étude de $\pi_1(X)$ si $\mathrm{gd}(X) = \dim(X)$ et $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$ à celle du $\pi_1(S)$, où S est une surface telle que $\mathrm{gd}(S) = 2$ et $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$.

PROPOSITION 4.9. — *Si X est une variété kählérienne compacte et connexe de dimension $n \geq 2$ telle que* $\mathrm{gd}(X) = n$ *et* $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$, *alors il existe des diviseurs très amples $H_1, \ldots, H_{n-2}$ de X tels que, si $S = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-1}$, on ait :*

1) *S est une surface lisse telle que $\pi_1(S) = \pi_1(X)$,*

2) $\mathrm{gd}(S) = 2$ *et* $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$.

Démonstration. — La seule assertion nouvelle est $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$.

On la démontre par récurrence sur n. Il suffit de construire, si $n \geq 3$, une hypersurface lisse très ample H de X telle que $\chi(\mathcal{O}_H) \neq 0$. Si H est une telle hypersurface, on a

$$\chi(\mathcal{O}_H) + \chi\big(\mathcal{O}_X(-H)\big) = \chi(\mathcal{O}_X).$$

Il suffit donc de trouver H telle que $\chi(\mathcal{O}_X(-H)) = \chi(\mathcal{O}_X)$. Or

$$\chi\big(\mathcal{O}_X(-H)\big) = (-1)^n h^n\big(\mathcal{O}_X(-H)\big) = (-1)^n h^0(K_X + H).$$

Remplaçant H par un multiple suffisamment grand, on obtient le résultat. $\square$

5. Critère géométrique de finitude du groupe fondamental.

Nous désignerons ici par X une variété kählérienne compacte connexe et par $f : \widetilde{X} \to X = \widetilde{X}/\Gamma$, avec $\Gamma \cong \pi_1(X)$, son revêtement universel. Nous emploierons encore avec le même sens qu'en 3.0 les notations de 3.0 si Δ est un sous-groupe de Γ.

NOTATIONS 5.0. — Si V est une variété complexe, notons $\mathcal{A}_n(V)$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques complexes compacts et *connexes* de V ; si A et $B \in \mathcal{A}_n(V)$, nous dirons que $(\pi_1(A) \cap \pi_1(B))$ est d'*indice fini* dans $\pi_1(A)$ si $(G \cap H)$ est d'indice fini dans G, avec G et H respectivement les images dans $\pi_1(V)$ de $\pi_1(A)$ et $\pi_1(B)$ par les morphismes de groupes déduits des inclusions naturelles de A et B dans V.

Si $B \in \mathcal{A}_n(V)$, on note $k_B : B \to V$ l'inclusion de B dans V.

DÉFINITION 5.1. — Si V est une variété complexe connexe et si $B \in \mathcal{A}_n(V)$, nous dirons que V est *$\widetilde{B}$-connexe* (resp. *fortement $\widetilde{B}$-connexe*) s'il existe un ouvert non vide U de V tel que, pour tout x de U, il existe $A \in \mathcal{A}_n(V)$ passant par x et rencontrant B, et tel que $(\pi_1(B) \cap \pi_1(A))$ soit d'indice fini dans $\pi_1(A)$ (resp. si V est $\widetilde{B}$-connexe et si, de plus, les $A \in \mathcal{A}_n(V)$ précédents peuvent être choisis dans un voisinage ouvert arbitrairement petit, de B dans V).

THÉORÈME 5.2. — *Soient X une variété kählérienne compacte et connexe, et $B \in \mathcal{A}_n(X)$. Alors $(k_B)_*\pi_1(B)$ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$ si X est $\widetilde{B}$-connexe.*

Démonstration. — Soit $g_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \to X$ le revêtement connexe de groupe fondamental $\Delta = (k_B)_*(\pi_1(B))$. Il s'agit de démontrer que $\widetilde{X}_\Delta$ est compact. Or, par le choix de Δ, $g_\Delta^{-1}(B)$ a des composantes connexes isomorphes à B, et donc compactes. Soit B_0 l'une d'elles. De plus, si A appartient à $\mathcal{A}_n(X)$ est tel que $(\pi_1(A) \cap \pi_1(B))$ est d'indice fini dans $\pi_1(A)$, alors $g_\Delta^{-1}(A)$ a des composantes connexes compactes. On peut choisir l'une d'elles soit A_0 rencontrant B_0 si A rencontre B. La réunion des A_0 ainsi construites contiendra alors un ouvert non vide de $\widetilde{X}_\Delta$ puisque X est $\widetilde{B}$-connexe. Si $\tilde{\rho}_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \to \widetilde{Z}_\Delta$ est la Δ-réduction de $\widetilde{X}_\Delta$, on aura donc $\tilde{\rho}_\Delta(\widetilde{X}_\Delta) = \widetilde{Z}_\Delta = \tilde{\rho}_\Delta(B_0)$. Donc $\widetilde{Z}_\Delta$ est compact, donc un point et $\widetilde{X}_\Delta$ est compact. $\square$

EXEMPLE 5.3. — Si B est un diviseur connexe de X, et si $\mathcal{O}_B(B)$ est ample, alors X est fortement $\widetilde{B}$-connexe. Donc $k_*(\pi_1(B))$ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$.

COROLLAIRE 5.4. — *Si dans* 5.2 *on peut choisir B réduit à un point, alors $\pi_1(X)$ est fini.*

Remarquons que ceci étend partiellement [C2], car on ne suppose pas A irréductible.

REMARQUE 5.5. — Le corollaire précédent permet de montrer que certaines variétés simplement connexes ne peuvent être le revêtement universel d'une variété kählérienne compacte. Par exemple, le complémentaire dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ d'un sous-ensemble analytique A de codimension au moins 2, ou d'un fermé ne rencontrant pas une droite projective. Un tel ouvert peut cependant revêtir une variété complexe compacte (par exemple, $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})/L_1$ (resp. $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})/L_1 \cup L_2$) est le revêtement universel de l'espace des twisteurs d'un tore plat (resp. d'une surface de Hopf) si L_1, L_2 sont deux droites projectives disjointes).

DÉFINITION 5.6. — Soit X une variété complexe. Une *chaîne rationnelle* de X est une courbe compacte et connexe de X dont toutes les composantes irréductibles sont rationnelles (i.e. de normalisée $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$). On dit que X est *rationnellement connexe* si deux points génériques de X peuvent être joints par une chaîne rationnelle.

Remarquons que ceci est la variante faible de la notion de connexité rationnelle. La variante forte est définie en considérant des courbes rationnelles irréductibles. Mais il est établi dans [Ko-Mi-Mo1] que les deux notions coïncident pour X projective.

COROLLAIRE 5.7. — *Soit X une variété kählérienne compacte rationnellement connexe. Alors $\pi_1(X) = 0$. En particulier, une variété de Fano (i.e. $-K_X$ ample) est simplement connexe.*

Démonstration. — Soit $\tilde{\rho} : \widetilde{X} \to \widetilde{Z}$ la $\widetilde{\Gamma}$-réduction de X, que nous pouvons supposer analytique. Si $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ sont deux points distincts généraux de $\widetilde{X}$, il existe une chaîne rationnelle joignant $\widetilde{x}_1$ à $\widetilde{x}_2$, obtenue en relevant une chaîne rationnelle de X joignant $x_1 = f(\widetilde{x}_1)$ et $x_2 = f(\widetilde{x}_2)$. Donc $\tilde{\rho}(\widetilde{x}_1) = \tilde{\rho}(\widetilde{x}_2)$ et $\dim(\widetilde{Z}) = 0$. Donc $\widetilde{X}$ est compact et $\pi_1(X)$ est fini. Si X est Fano, on peut montrer alors que $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ et on en déduit que $\pi_1(X) = 0$, comme dans [C2]. Dans le cas général, on peut encore montrer que $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ si X est rationnellement connexe au sens de 5.5. Nous omettons cette démonstration ici. $\square$

La connexité rationnelle de X, si X est de Fano, est établie dans [C4] et [Ko-Mi-Mo2].

Remarquons que l'on peut donc obtenir le résultat précédent 5.7 sans utiliser la difficile démonstration de l'équivalence entre les deux notions de connexité rationnelle établie dans [Ko-Mi-Mo1], et que ceci est susceptible d'être appliqué aux courbes connexes non nécessairement rationnelles.

Nous allons maintenant appliquer 5.2 à des situations considérées par M. NORI et R. GURJAR dans [N] et [G]. La définition suivante est suggérée par [N].

DÉFINITION 5.8. — Soit $B \in A_n(V)$. Nous dirons que V est *$\widehat{B}$-connexe* s'il existe :

1) Un morphisme fini et birationnel $f : \overline{B} \to B$ avec $\overline{B}$ connexe, et tel que $\overline{B}_i$ est homéomorphe à la normalisée $\widehat{B}_i$ de $B_i := f(\widehat{B}_i)$ pour toute composante irréductible $\overline{B}_i$ de $\overline{B}$.

2) Il existe un morphisme fini $g : \overline{V} \to V$ et une inclusion analytique $h : \overline{B} \to \overline{V}$ telle que $f = g \circ h$ tels que pour tout $\bar{b}$ de $\overline{B}$, il existe un voisinage ouvert $\overline{U}$ de $\bar{b}$ dans $\overline{V}$ tel que $g : \overline{U} \to U = g(\overline{U})$ soit un isomorphisme analytique.

3) $\overline{V}$ est fortement $(\widetilde{\overline{B}})$-connexe.

Cette notion permet de raffiner la conclusion de 5.2.

COROLLAIRE 5.9. — *Si X est kählérienne compacte connexe, si B appartient à $A_n(X)$ et si X est $\widehat{B}$-connexe, alors $\hat{k}_*\pi_1(\widehat{B})$ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$, si $k : B \to X$ est l'inclusion naturelle et si $\hat{k} := k \circ \nu$, où $\nu : \widehat{B} \to B$ est la normalisation de B.*

Démonstration. — Par hypothèse, si

$$\Delta := (\hat{k})_*(\pi_1(\widehat{B}))$$

et si $g_\Delta : \widetilde{X}_\Delta \to X$ est le revêtement connexe de groupe fondamental Δ, le morphisme $g : \overline{X} \to X$ de la définition 5.7, 2) peut être relevé (quitte à restreindre éventuellement $\overline{X}$ près de $\overline{B}$) en un morphisme $\bar{g} : \overline{X} \to \widetilde{X}_\Delta$ tel que $g_\Delta \circ \bar{g} = g$. On peut alors en déduire, comme dans la dernière partie de la démonstration de 5.2, que $\widetilde{X}_\Delta$ est compact, et donc que Δ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$. □

EXEMPLES 5.10. — Soit $B \in \mathcal{A}_n(X)$, avec X Kähler compacte connexe. Alors X est $\widehat{B}$-connexe s'il existe des morphismes $f : \overline{B} \to B$, $g : \overline{X} \to X$ et $h : \overline{B} \to \overline{X}$ satisfaisant les conditions 5.7, 1) et 2), si B est un diviseur de X et si $\mathcal{O}_{\overline{B}}(\overline{B})$ est un fibré en droites ample sur $\overline{B}$. Ceci résulte, par exemple, de la construction de M. NORI (appendice de [N]).

5.10′. — Lorsque $\dim(X) = \dim(B) + 1 = 2$, ces trois conditions sont satisfaites si

$$B = \Big(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\Big)$$

est une courbe connexe dont les composantes irréductibles B_i satisfont les conditions numériques

$$(B \cdot B_i) > \Big(\sum_{j=1}^{r(i)} m_{i,j}\Big),$$

où j parcourt l'ensemble des points singuliers de B situés sur B_i en lesquels B a $m_{i,j} \geq 2$ branches locales, et où $B \cdot B_i$ est le nombre d'intersection de B avec B_i, calculé sur X. Ceci est vrai dans la situation particulière considérée par M. NORI : B est nodale (c'est-à-dire n'a que des points doubles ordinaires), et $B_i^2 > 2r(i)$ pour $i = 1, \ldots, N$. On retrouve donc en particulier l'un des résultats de M. NORI [N] :

COROLLAIRE 5.11. — *Dans les situations considérées en* 5.10′, $\hat{k}_*(\pi_1(\widehat{B}))$ *est d'indice fini dans $\pi_1(X)$.*

Le cas particulier où B est irréductible est intéressant.

COROLLAIRE 5.12. — *Soit B une courbe irréductible d'une surface projective X telle que*

$$B^2 > \sum_{j=1}^{r} m_j,$$

où j parcourt l'ensemble des points singuliers de B en lesquels B a $m \geq 2$ branches locales. Alors $\pi_1(\widehat{B})$ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$.

REMARQUE 5.13. — M. NORI majore cet indice par le nombre

$$\Big(B^2/(B^2 - \sum_{j=1}^{r} m_j)\Big)$$

à l'aide du théorème de l'indice de Hodge (lorsque B est nodale [N, p. 306 et 5.1]). Son argument s'applique encore ici. Néanmoins, lorsque C est rationnelle, il est facile de voir que X est une surface rationnelle, de sorte que $\pi_1(X) = 0$ dans ce cas.

Les techniques présentées ici permettent de retrouver un résultat de R. GURJAR [G], obtenu par une délicate étude des fibres singulières des surfaces elliptiques, et la classification de Kodaira-Enriques :

THÉORÈME 5.14 [G]. — *Soit B une courbe rationnelle irréductible de la surface projective X, telle que $B^2 > 0$. Si $\pi_1(X)$ est infini, alors X est de type général.*

Démonstration. — Nous allons démontrer plus précisément que X est Γ-réduite et que $\chi(\mathcal{O}_X) > 0$. Ceci entraînera alors que X est de type général, d'après 4.2. Or $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + p_g$, et $q = 0$. En effet (cf. [G]), si $\alpha : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est la réduction d'Albanese de X, la condition $B^2 > 0$ montre que $\alpha_{|B}$ n'est pas constante si $q > 0$, et ceci contredit la rationalité de B. Donc $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 1$. Soit maintenant $\tilde{\rho} : \widetilde{X} \to \widetilde{Z}$ la $\widetilde{\Gamma}$-réduction de $\widetilde{X}$, où $f : \widetilde{X} \to X$ est le revêtement universel de X. Alors $\dim(\widetilde{Z}) > 0$ puisque $\pi_1(X)$ est infini. Si $\dim(\widetilde{Z}) = 1$, et si $\widetilde{B}$ est une composante connexe de $f^{-1}(B)$, alors $\widetilde{B}$ est compacte, puisque soit contenue dans une fibre de $\tilde{\rho}$, soit telle que $\tilde{\rho}(\widetilde{B}) = \widetilde{Z}$. Donc : $k_*(\pi_1(B))$ est un sous-groupe fini de $\pi_1(X)$. Mais, puisque $B^2 > 0$, X est $\widetilde{B}$-connexe. Donc $k_*(\pi_1(B))$ est d'indice fini dans $\pi_1(X)$. Donc $\pi_1(X)$ ne peut être infini. Contradiction, et $\dim(\widetilde{Z}) = 2$. □

QUESTION 5.15. — Soit B une courbe rationnelle irréductible de la surface projective X telle que $B^2 > 0$. Alors $\pi_1(X)$ est-il fini ? (Cette question est un cas particulier d'une question de M. NORI [N].) Il semble intéressant de l'isoler, car la conjecture de Shafarevitch entraîne que la réponse est oui (cf. [G]). Si $\pi_1(X)$ est moyennable, il est encore possible de montrer que $\pi_1(X)$ est fini. La question semble non triviale même en y remplaçant $\pi_1(X)$ par $\pi_1^{\mathrm{Alg}}(X)$.

Appendice : relations d'équivalence engendrées

On redonne ici, pour être complet, la démonstration de l'un des résultats cruciaux utilisés dans la démonstration de 3.5. Voir aussi [C1].

A.0. — On notera G, X, T des espaces analytiques irréductibles, avec X et T normaux, et $p : G \to T$ et $q : G \to X$ des applications analytiques propres et surjectives, les fibres de p ayant toutes la même dimension pure, et étant (génériquement sur T) irréductibles. On dira alors que $(p : G \to T, q : G \to X)$ est une *donnée admissible.*

A.1. — Dans la situation de A.0, si $E \subset X$ est un ensemble quelconque, on notera
$$G(E) := q\big(p^{-1}\big(p\big(q^{-1}(E)\big)\big)\big).$$
Donc $G(E)$ est la réunion des fibres $q(p^{-1}(t))$ — pour $t \in T$ — de p qui rencontrent E. Si $N \geq 0$ est un entier, on notera aussi :
$$G_0(E) := E \quad \text{et} \quad G_{N+1}(E) = G\big(G_N(E)\big).$$
C'est l'ensemble des x de X qui peuvent être joints à E par une chaîne *connexe* de N fibres de p. On notera enfin
$$G_\infty(E) := \bigcup_{N\geq 0} G_N(E).$$

Si $a \in X$, on notera $G_N(a)$ et $G_\infty(a)$ les ensembles précédents pour $E = \{a\}$.

THÉORÈME A.3. — *Soit $(p : G \to T, q : G \to X)$ une donnée admissible. Il existe alors une (unique) quasi-fibration $\Phi_G : X \to X/G$ dont la fibre $\Phi^{-1}\big(\Phi(a)\big)$ est égale à $G_\infty(a)$ pour a générique dans X.*

Démonstration. — Posons :
$$G_1 := G \times_T G = \big\{(g,g') \in G \times G \mid p(g) = p(g')\big\}.$$
On notera encore $p_1 : G_1 \to T$, $q_1 : G_1 \to X$ et $q_2 : G_1 \to X$ les projections naturelles.

LEMME 1. — *G_1 est irréductible, et p_1, q_1 et q_2 sont propres.*

Démonstration. — L'assertion concernant les projections provient de la propreté de p et q. Celle concernant l'irréductibilité de G_1 provient de ce que toutes les fibres de p sont de même dimension pure, et génériquement irréductibles. $\square$

On en déduit le :

LEMME 2. — *$R_1 \subset X \times X$ est irréductible si $R_1 = (q_1 \times q_2)(G_1)$. (On remarquera que $R_1 = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \in G(x_2)\}$ et que R_1 est symétrique, c'est-à-dire que $\sigma(R_1) = R_1$ si $\sigma : X \times X \to X \times X$ est l'involution naturelle définie par $\sigma(x, x') = (x', x)$.)*

Soit $N \geq 1$ un entier. Soit $\pi_i : (G_1)^N \to G_1$ la projection naturelle de $(G_1)^N$ sur son i-ème facteur, pour $i = 1, 2, \ldots, N$. On notera alors $p_{1,i}$ (resp. $q_{1,i}$; resp. $q_{2,i}$) la composée $p_1 \circ \pi_i$ (resp. $q_1 \circ \pi_i$; resp. $q_2 \circ \pi_i$) pour $i = 1, 2, \ldots, N$. Pour $N \geq 1$, on définit par récurrence sur N le sous-ensemble analytique G_{N+1} de $(G_1)^{N+1}$ par

$$G_{N+1} := G_1 \underset{X}{\times} G_N,$$

où G_1 (resp. G_N) est au-dessus de X par q_2 (resp. $q_{1,1}$). On note aussi $R_N := (q_{1,1} \times q_{2,N})(G_N) \subset X \times X$; c'est un sous-ensemble analytique fermé symétrique de $X \times X$, et on a :

$$R_N := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 \in G_N(x_2)\}.$$

On note encore R_∞ la réunion des R_n $(N \geq 1)$: puisque la suite R_N est croissante, R_∞ est donc réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques fermés de $X \times X$. $\square$

LEMME 3. — *Il existe une unique composante irréductible, notée R^0, de R_∞ qui contient la diagonale Δ_X de $X \times X$. De plus, R^0 est symétrique et est localement irréductible au point générique de Δ_X.*

Démonstration. — La symétrie de R^0 résulte de l'unicité, puisque R_∞ est évidemment symétrique. Soit $d(N)$ pour $N \geq 1$, la dimension au point générique (a, a) de Δ_X de R_N : cette suite d'entiers est croissante bornée, donc stationnaire égale à d' pour $N \geq N_0$. Il suffit donc de démontrer que $R_N(a)$ est localement irréductible en a, si $N \geq N_0$, si a est générique dans X et si $R_N(a) := r_{1,N}^{-1}(a)$, où $r_{j,N} : R_N \mapsto X$ est la restriction à R_N de la projection naturelle de $X \times X$ sur son j-ème facteur, pour $j = 1, 2$.

Supposons alors que cette condition ne soit pas satisfaite. Il existe donc un point a de X et deux composantes irréductibles locales distinctes Z_1 et Z_2 de R_N en (a,a), qui sont telles que les projections $r_{i,j} : Z_i \to X$ sur les j-èmes facteurs de $X \times X$ aient des fibres localement irréductibles en (a,a) pour $i = 1,2$ et $j = 1,2$.

Soit alors $Z := Z_1 \times_X \sigma(Z_2)$, où $\sigma : X \times X \to X \times X$ est la symétrie relative à Δ_X, et où Z_1 (resp. Z_2) est au-dessus de X par $r_{1,2}$ (resp. $r_{2,1}$). Par construction, Z est irréductible en $((a,a),(a,a))$.

Soit ensuite $Z_0 := (r_{1,1} \times r_{2,2})(Z)$. Donc Z_0 est irréductible en (a,a), contenu dans R_{2N} et contient Z_1 et Z_2. Par conséquent :

$$\dim(Z_0) > \sup\big(\dim(Z_1), \dim(Z_2)\big).$$

Ceci contredit le choix de $N \geq N_0$ et démontre le lemme. □

LEMME 4. — *Soit $r : R^0 \to X$ la projection induite par la première projection de $X \times X$. Pour tout a de X, nous noterons $R(a) := r^{-1}(a)$ la fibre de r au dessus de a. Alors :*

(i) *$R(a)$ est irréductible pour a générique dans X.*

(ii) *R^0 contient R_1.*

Démonstration. — La deuxième assertion résulte de ce que R^0 est l'unique composante irréductible de R_∞ qui contient Δ_X, de ce que R_∞ contient R_1 et de ce que R_1 est irréductible (LEMME 2). Pour démontrer la première assertion, soit $\hat{r} : \widehat{R}^0 \to X$ le relèvement de r au normalisé $\widehat{R}^0$ de R^0. Soient $\widehat{S} : \widehat{R}^0 \to \widehat{S}$ et $\widehat{F} : \widehat{S} \to X$ la factorisation de Stein de $\hat{r}$, avec $\widehat{F} \circ \widehat{S} = \hat{r}$. Alors $\widehat{S} \circ \delta : X \to \widehat{S}$ est un isomorphisme tel que $\hat{f} \circ \hat{s} \circ \delta = \mathrm{id}_X$ si $\delta : X \to \Delta_X \subset R^0$ est l'isomorphisme naturel, qui se relève bien à $\widehat{R}^0$, puisque R^0 est localement irréductible au point générique de Δ_X, par le LEMME 3. □

DÉFINITION 5. — Nous dirons que $a \in X$ est *régulier* si

$$\dim\big(R(a)\big) = \dim(R^0) - \dim(X).$$

Noter que l'ensemble des $a \in X$ qui sont réguliers forme un ouvert de Zariski dense X^* de X, et que l'application $\Phi^* : X^* \to \mathrm{Chow}(X)$ définie par $\Phi^*(a) = R(a)$ (affecté de multiplicités adéquates, égale à 1 pour a générique dans X) est analytique et admet un prolongement méromorphe $\Phi : X \to \mathrm{Chow}(X)$ dont l'image sera notée $R \subset\subset \mathrm{Chow}(X)$. Donc R est analytique fermé et irréductible. De plus si $a \in X^*$, $R(a) = \lim_{a' \to a} R(a')$, la convergence ayant lieu dans $\mathrm{Chow}(X)$.

LEMME 6. — *Soit $(a,b,c) \in X^3$. Supposons que $a \in R(b), c \in R(b)$ et que $b \in X^*$. Alors c appartient à $R(a)$.*

Démonstration. — Soit

$$\begin{aligned} R' &:= r(R^0 \underset{X}{\times} R^0) \\ &:= \big\{(x,z) \in X \times X \mid \exists\, y \in X \text{ avec } (x,y) \in R^0 \text{ et } (y,z) \in R^0\big\}. \end{aligned}$$

On a évidemment $R' \subset R_{2N}$ si N est tel que R^0 soit l'unique composante irréductible de R_N contenant Δ_X. Donc R' est l'unique composante irréductible de R_{2N} qui contient Δ_X. Notons alors $R'' := \overline{(R' - R^0)}$ la réunion des composantes irréductibles de R' qui ne contiennent pas R^0. Donc $R'' \cap R^0 := R'''$ est un fermé de Zariski de R^0 qui ne contient pas Δ_X.

Supposons maintenant que, dans la situation du LEMME 6, b soit tel que $(b,b) \notin R'''$ et que $R(b)$ soit irréductible. Les conditions $a \in R(b)$ et $c \in R(b)$ signifient donc $(a,b) \in R^0$ et $(c,b) \in R^0$. Il en résulte $(b,c) \in R^0$, puisque R^0 est symétrique. Si a et c sont suffisamment proches de b dans X, on aura donc $(a,c) \in R'$ et donc $(a,c) \in R^0$, puisque R' coïncide avec R^0 près de (b,b). Par conséquent, R^0 contient un voisinage de (b,b) dans $R(b) \times R(b)$. Puisque $R(b)$ est supposé irréductible, on a donc $R(b) \times R(b) \subset R^0$, et ceci entraîne le LEMME 6 dans ce cas. Si $R(b)$ n'est pas irréductible, on peut approcher b par des b' de X^* satisfaisant cette condition. On aura alors $R(b') \times R(b') \subset R^0$ puis $R(b) \times R(b) \subset R^0$ par passage à la limite. D'où le LEMME 6.

NOTATION 7. — Si $A \subset X$ nous noterons $R(A)$ la réunion des $R(a)$, pour a dans A.

Soit alors $I := (X/X^*)$ le fermé de Zariski des points non réguliers de X, puis $J := R(I)$ et $K := R(J)$.

LEMME 8. — *On a $J = K$.*

Démonstration. — Il s'agit de démontrer que si $(a,b,c) \in X^3$ est tel que $a \in I$, $b \in R(a)$ et $c \in R(b)$, alors $c \in R(a)$. Si $b \in I$, le résultat est vrai par définition de J. Sinon, il résulte du LEMME 7.

LEMME 9. — *On a $J \underset{\neq}{\subset} X$.*

Démonstration. — Sinon, on aurait $J = X$. Donc, pour tout $b \in X$, il existe $a \in I$ tel que $b \in R(a)$. Or, X étant normal, l'image $\Phi(a)$ de a par $\Phi : X \to \text{Chow}\ (X)$ est de dimension strictement positive ; c'est-à-dire que $R(a)$, qui est la réunion des cycles compacts de dimension

$d = \dim(R^0) - \dim(X)$ de X paramétrés par $\Phi(a)$, est de dimension strictement supérieure à d. Donc $R(a)$ est contenu dans $R(b)$, si b est choisi générique. (Ceci peut être justifié à l'aide de produits fibrés, comme dans les lemmes précédents.) Ceci contredit le fait que dim $R(b) = d$, et établit le lemme.

Il est maintenant facile d'achever la démonstration du THÉORÈME A.3 : en effet $\Phi : X \to S$ est une quasi-fibration par le LEMME 9. De plus, si b n'est pas dans J, alors $R(b) = \Phi^{-1}(\Phi(b))$ est constitué de points qui peuvent être joints à b par une chaîne connexe de fibres de p, puisque $R^0 \subset R_\infty$. L'inclusion $R^0 \supset R_1$ montre, inversement, à l'aide du LEMME 6, que tout point de X qui peut être joint à b par une chaîne connexe de fibres de p est dans $R(b)$. $\square$

EXEMPLE 10. — L'application $\Phi : X \to S$ ainsi construite n'est pas nécessairement partout définie (i.e. I peut être non vide). Nous allons le voir sur l'exemple suivant, inspiré d'une construction de Nagata, avec X lisse de dimension 3. Soit $X_0 := \mathbb{P}_1 \times F$, où $F = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Si $0 \in \mathbb{P}_1$ et si $\Delta_0 := (0) \times \Delta_F$ (avec Δ_F la diagonale de $F = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$), on note $\beta : X_1 \to X_0$ l'éclatement de Δ_0 dans X_0. Si $\pi_1 : X_1 \to \mathbb{P}_1$ est la projection de fibre générique F, on a $\pi_i^{-1}(0) = F_1 \sqcup E$, où E est le diviseur exceptionnel de β. De plus $F_1 \cong F$ peut être contracté dans X_1 le long de l'un quelconque de ses deux réglages.

Soit $\gamma : X_1 \to X$ une telle contraction ; par exemple, celle qui contracte sur un point les fibres de la projection $\lambda_1 : F \to \mathbb{P}_1$ de $F \cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ sur son premier facteur. On notera $\lambda_2 : F \to \mathbb{P}_1$ la seconde projection de F et $\lambda : X_0 = \mathbb{P}_1 \times F \to F$ la projection naturelle. Le diagramme

$$(p : G \to T, q : G \to X)$$

construit avec

$$p = \pi_1 \times (\lambda_2 \circ \lambda) : G = X_1 \to T = F \quad \text{et} \quad \gamma = q : G = X_1 \to X$$

est alors admissible. Dans ce cas, $\Phi : X \to S$ n'est autre que

$$p \circ \gamma^{-1} : X \longrightarrow F.$$

BIBLIOGRAPHIE

[A] ATIYAH (M.). — *Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque, t. **32-33**, 1976, p. 43–72.

[B] BARLET (D.). — *Espace analytique des cycles...*, Lect. Notes Math., t. **482**, 1975, p. 1–158.

[B-P-V] BARTH (W.), PETERS (C.), VON DE VEN (A.). — *Compact complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., t. **4**, 1984.

[Bl] BLANCHARD (A.). — *Sur les variétés analytiques complexes*, Ann. Scient. École Nor. Sup., t. **73**, 1958, p. 157–202.

[C1] CAMPANA (F.). — *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact*, Invent. Math., t. **63**, 1981, p. 187–223.

[C2] CAMPANA (F.). — *Twistor spaces of class $\mathcal{C}$*, J. Differential Geom., t. **33**, 1991, p. 541–549.

[C3] CAMPANA (F.). — *Réduction d'Albanese d'un morphisme kählérien propre, I et II*, Compositio Math., t. **54**, 1985, p. 373–398 et 399–416.

[C4] CAMPANA (F.). — *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Scient. École Nor. Sup., t. **25**, 1992, p. 539–545.

[C5] CAMPANA (F.). — *Fundamental group and positivity properties of cotangent sheaves of compact Kähler manifolds*, à paraître au J. Alg. Geometry.

[Ca] CATANESE (F.). — *Moduli and classification of irregular Kähler manifolds...*, Invent. Math., t. **104**, 1991, p. 263–289.

[F] FUJIKI (A.). — *Semi-simple reductions of compact complex varieties*, Pub. Institut Élie Cartan, t. **8**, 1983, p. 79–133.

[G.A] SÉMINAIRE de Géométrie Analytique. — Pub. Institut Élie Cartan, **5**, 1982.

[G] GROMOV (M.). — *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Differential Geom., t. **33**, 1991, p. 263–292.

[Gu] GURJAR (R.V.). — Coverings of algebraic varieties in algebraic geometry, Sendai (1985), Adv. Stud. Pure Math. **10**, T. Oda. éd., p. 179–183.

[H] HIRZEBRUCH (F.). — *Topological methods in algebraic geometry.* — Springer Verlag, 1978.

[K] KAWAMATA (Y.). — *Abundance theorem for minimal threefolds*, Preprint Univ. Tokyo, 1991.

[Ko] KODAIRA (K.). — *A theorem of completeness...*, Ann. of Math., t. **75**, 1962, p. 146–162.

[Kol] KOLLAR (J.). — *Shafavavitch maps and plurigenera of algebraic varieties*, Preprint, 1992.

[Ko-Mi-Mo1] KOLLAR (J.), MIYAOKA (Y.), MORI (S.). — *Rationally connected varieties*, J. Alg. Geometry, **1**, 1992, p. 429-448.

[Ko-Mi-Mo2] KOLLAR (J.), MIYAOKA (Y.), MORI (S.). — *Boundedness and rational connectedness of Fano manifolds*, Preprint, 1991

[L] Lelong (P.). — *Intégration sur un ensemble analytique*, Bull. Soc. Math. France, t. **85**, 1957, p. 239–262.

[Li] Lieberman (D.). — *Compactness of the Chow scheme*, Lect. Notes Math., t. **670**, 1977, p. 140–186.

[Mi] Miyaoka (Y.). — *On the Kodaira dimension of minimal threefolds*, Math. Ann., t. **281**, 1988, p. 325–332.

[Mi′] Miyaoka (Y.). — *Abundance conjecture for 3-folds. Case* $\nu = 1$, Comp. Math., t. **68**, 1988, p. 203–220.

[Mo] Mori (S.). — *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*, J. Amer. Math. Soc., t. **1**, 1988, p. 117–253.

[N] Nori (M.V.). — *Zariski's conjecture and related problems.*, Ann. Scient. École Nor. Sup., t. **16**, 1983, p. 305–344.

[Ra] Ran (Z.). — *On subvarieties of Abelian varieties*, Inv. Math., t. **62**, 1981, p. 459–479.

[R] Reid (M.). — *Bogomolov's theorem* $c_1^2 \leq 4c_2$. — Int. Symp. Alg. Geom. Kyoto, 1977.

[S] Shafavevitch (R.I.). — *Basic Algebraic Geometry.* — Springer-Verlag, 1977.

[U] Ueno (K.). — *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lect. Notes Math., t. **439**.