BULLETIN DE LA S. M. F.

JOËL BLOT

# Oscillations presque-périodiques forcées d'équations d'Euler-Lagrange

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 122, nº 2 (1994), p. 285-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_2_285_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 285–304.

# OSCILLATIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES FORCÉES D'ÉQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

PAR

JOËL BLOT (*)

RÉSUMÉ. — Pour montrer l'existence de solutions p.p. (presque-périodiques) d'une équation d'Euler-Lagrange à lagrangien convexe, en présence d'une excitation extérieure p.p., on introduit un espace hilbertien, du type Sobolev, de fonctions Besicovitch-p.p., et une notion du solution p.p. faible. On utilise le calcul des variations en moyenne temporelle et les opérateurs Minty-monotones.

ABSTRACT. — In order to show the existence of a.p. (almost periodic) solutions of a Euler-Lagrange equation with a convex lagrangian and an a.p. forcing term, we introduce an hilbertian space (like a Sobolev space) of Besicovitch-a.p. functions and a notion of weak a.p. solution. We use the calculus of variations in mean and the Minty-monotonic operators.

## Introduction

Nous considérons le problème de l'existence des solutions p.p. (presque-périodiques au sens de H. BOHR) des équations d'Euler-Lagrange en présence d'une force extérieure p.p.,

$$L_x\big(x(t),\dot{x}(t)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}\big(x(t),\dot{x}(t)\big) = e(t),$$

où $e$ est *p.p.* et $\dot{x} := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

Il est bien connu que les problèmes aux limites et les problèmes périodiques bâtis sur des systèmes lagrangiens peuvent être formulés comme des problèmes de calcul des variations.

(*) Texte reçu le 21 octobre 1992, révisé le 5 mars 1993.
J. BLOT, C.E.R.M.S.E.M., Université Paris I Panthéon-Sorbonne, 90, rue de Tolbiac, 75634 Paris CEDEX 13, France.

Classification AMS : 34C27, 70H35, 70K40, 42A75.

Une formulation variationnelle des problèmes p.p. bâtis sur des systèmes lagrangiens a été donnée dans [5], [6], [7] sous l'intitulé de calcul des variations en moyenne temporelle. Elle a été utilisée pour l'étude des systèmes lagrangiens convexes autonomes dans [8], [9], [10], [11], [12] où elle apporte des informations sur la structure de l'ensemble des solutions p.p.

Cette approche variationnelle utilisait l'espace $AP^1$ des fonctions p.p. à dérivée ordinaire p.p. ; or les propriétés topologiques de cet espace sont insuffisantes pour y développer des techniques inspirées des méthodes directes du calcul des variations. C'est pourquoi nous proposons ici une nouvelle méthode variationnelle qui consiste à construire un espace hilbertien $B^{1,2}$ et une fonctionnelle — dite d'*action moyenne* — sur cet espace, dont les propriétés de la dérivée se traduisent en termes de solutions p.p. faibles de l'équation d'Euler-Lagrange considérée. On en déduit l'existence de solutions p.p. fortes pour un ensemble dense de forces extérieures p.p.

Ce programme est réalisé par le THÉORÈME 5 pour des lagrangiens fortement convexes. La convexité permet l'utilisation des opérateurs monotones au sens de Minty.

Auparavant, on définit l'espace $B^{1,2}$, inspiré du classique espace de Sobolev $W^{1,2}$ des problèmes aux limites, comme un espace de fonctions p.p. au sens de Besicovitch qui admettent une dérivée généralisée (paragraphe 1). Cette dérivation généralisée, utilisée par VO-KHAC pour les fonctions moyennisables, est symbolisée par la lettre $\nabla$. On étudie au paragraphe 2 les propriétés des opérateurs de Nemytski sur $B^{1,2}$, et au paragraphe 3 les propriétés de la fonctionnelle d'action moyenne :

$$J(u) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} L\big(u(t), \nabla u(t)\big)\, \mathrm{d}t.$$

Notre approche ne s'insère pas dans le schéma de la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser, d'une part parce qu'il ne s'agit pas d'une méthode de perturbation, et d'autre part parce que nous ne travaillons pas sur les tores invariants mais sur les fonctions p.p. Soulignons ici que les tores invariants correspondent à des orbites q.p. (quasi-périodiques), c'est-à-dire dont le module des fréquences est engendré par une base finie sur $\mathbb{Z}$. Pour les systèmes différentiels autonomes, il est bien connu qu'une solution p.p. est nécessairement q.p. en dimension finie (voir [5] par exemple), mais lorsqu'on est en présence d'une force extérieure p.p. non-q.p., on ne peut restreindre la recherche des solutions p.p. aux seules fonctions q.p.

## Notations

- $E$ désigne $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.
- Si $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ sont dans $E$, on note :

$$x \cdot y := \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha.$$

- Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to E$, on note :

$$\|f\|_\infty := \operatorname{Sup}\{|f(t)| \,;\; t \in \mathbb{R}\} \,;$$

si $r$ est réel, l'opérateur de translation est :

$$\tau_r f(t) := f(t + r).$$

- La dérivation ordinaire est notée $\dot{f} := \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ et la dérivation distributionnelle est indiquée par la lettre $D$. Si $k \in \mathbb{N}$, $C^k(X, Y)$ est l'ensemble des applications $k$ fois continûment différentiables de $X$ dans $Y$.
- Si $f$ est un élément de l'espace de Lebesgue $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note :

$$\overline{\mathcal{M}}\{f\} := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ la *moyenne temporelle* de $f$, lorsqu'elle existe, est :

$$\mathcal{M}\{f\} = \mathcal{M}\{f(t)\}_t := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- $AP^0(E)$ désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $E$ qui sont p.p. au sens de Bohr. Si $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$AP^k(E) := \Big\{ f \in C^k(\mathbb{R}, E) \,;\; \forall \nu = 0, \dots, k \;\frac{\mathrm{d}^\nu f}{\mathrm{d}t^\nu} \in AP^0(E) \Big\}.$$

- Si $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, on note $\mathcal{B}^p(E)$ la fermeture de $AP^0(E)$ dans $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ pour la semi-norme $f \mapsto \overline{\mathcal{M}}\{|f|^p\}^{1/p}$. Les éléments de $\mathcal{B}^p(E)$ sont les fonctions p.p. au sens de Besicovitch. Si $f \in \mathcal{B}^p(E)$, alors $\overline{\mathcal{M}}\{|f|^p\}^{1/p}$ existe dans $\mathbb{R}$ et si $g, h \in \mathcal{B}^p(E)$, on notera $g \sim_p h$ la relation d'équivalence

$$\overline{\mathcal{M}}\big\{|g - h|^p\big\}^{1/p} = 0.$$

L'espace quotient est $B^p(E) := \mathcal{B}^p(E)/\sim_p$. Si $f$ appartient à $\mathcal{B}^p(E)$, sa classe de $\sim_p$-équivalence est notée $[f]_p \in B^p(E)$ et

$$\big|[f]_p\big|_p := \mathcal{M}\{|f|^p\}^{1/p}$$

est une norme sur $B^p(E)$. Si $f, g \in \mathcal{B}^2(E)$,

$$\big([f]_2 \mid [g]_2\big) := \mathcal{M}\{f \cdot g\}$$

définit un produit scalaire sur $B^2(E)$ dont la norme euclidienne associée est précisément $|\cdot|_2$.

- Si $f \in AP^0(E)$ ou $f \in \mathcal{B}^p(E)$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a(f;\lambda) := \mathcal{M}\{f(t)\,\mathrm{e}^{-i\lambda t}\}_t$$

est un coefficient de Fourier-Bohr. On note

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in \mathbb{R}\,;\ a(f,\lambda) \neq 0\}$$

et $\mathrm{Mod}(f)$ le $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ engendré par $\Lambda(f)$. Notre référence pour toutes ces notions liées à la presque-périodicité est [4].

## 1. Un espace du type Sobolev

Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, l'espace $AP^0(E)$ est un espace de Banach. La compacité dans cet espace n'est pas facile à exhiber. L'analogue du théorème d'Ascoli-Arzela dans $AP^0(E)$ est le théorème de Lusternik [23, p. 7] dont la condition d'équi-presque périodicité est difficile à vérifier. En utilisant le compactifié de Bohr $b\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, on peut assimiler $AP^0(E)$ à $C^0(b\mathbb{R}E)$, cf. [21] et [17, p. 231]. On voit ainsi que $AP^0(E)$ n'est pas réflexif et, partant, les méthodes de compacité faible ou de monotonie y sont difficiles à utiliser. C'est pourquoi on travaille avec le complété hilbertien $B^2(E)$ de $AP^0(E)$.

Si $r \in \mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{B}^p$, on vérifie que $\mathcal{M}\{|\tau_r f|^p\}^{1/p} = \mathcal{M}\{|f|^p\}^{1/p}$. Donc $f \sim_p g$ implique $\tau_r f \sim_p \tau_r g$, ce qui permet de définir $\tau_r \eta$ dans $B^p(E)$ quant $\eta \in B^p(E)$. Ces opérateurs de translations vont nous permettre de définir une dérivée généralisée pour certains éléments de $B^2(E)$ en suivant la méthode générale de Vo-Khac [28, chap. B1].

Proposition 1. — *$(\tau_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu d'opérateurs linéaires continus sur $B^2(E)$, i.e. $\tau_r \circ \tau_s = \tau_s \circ \tau_r$, $\tau_0 = \mathrm{id}$, et pour tout $\eta \in B^2(E)$, l'application $r \mapsto \tau_r \eta$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

*Démonstration.* — Si $g \in AP^0(E)$, alors $g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ [4, p. 2], et donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall r, s \in \mathbb{R}, \quad |r - s| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \big|g(r) - g(s)\big| \le \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t + r - (t + s)| = |r - s| \le \delta(\varepsilon)$, ce qui implique $|g(t + r) - f(t + s)| \le \varepsilon$, i.e. $\|\tau_r g - \tau_s g\|_\infty \le \varepsilon$. Puisque

$$|\tau_r[g]_2 - \tau_s[g]_2|_2 \le \|\tau_r g - \tau_s g\|_\infty,$$

on en déduit que $r \mapsto \tau_r[g]_2$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $B^2(E)$. Fixons $f \in \mathcal{B}^2(E)$, et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in AP^0(E)$ telle que $|[f]_2 - [g]_2|_2 \le \frac{1}{3}\varepsilon$. Si $\delta(\frac{1}{3}\varepsilon)$ désigne le module d'uniforme continuité de $g$, par ce qui précède, on obtient, pour $|r - s| \le \delta(\frac{1}{3}\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}\big|\tau_r[f]_2 - \tau_2[f]_2\big|_2 &\le |\tau_r[f]_2 - \tau_r[g]_2|_2 + \big|\tau_r[g]_2 - \tau_s[g]_2\big|_2 \\ &\quad + \big|\tau_s[g]_2 - \tau_s[f]_2\big|_2 \\ &= 2\big|[f]_2 - [g]_2\big| + \big|\tau_r[g]_2 - \tau_s[g]_2\big|_2 \le \varepsilon,\end{aligned}$$

puisque les moyennes sont invariantes par translation. Donc $r \mapsto \tau_r[f]_2$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $B^2(E)$. $\square$

Le générateur infinitésimal du groupe $(\tau_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est noté $\nabla$ selon Vo-Khac :

$$\nabla\eta := \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}(\tau_r\eta - \eta).$$

L'opérateur $\nabla$ est un opérateur linéaire non-borné de $B^2(E)$ ; en outre, $\nabla$ est de graphe fermé dans $B^2(E) \times B^2(E)$.

On dira que $\eta \in B^2(E)$ est *$\mathcal{M}^2$-dérivable* si $\eta \in \mathrm{Dom}(\nabla)$ ; la $\mathcal{M}^2$-dérivée de $\eta$ est alors notée $\nabla\eta \in B^2(E)$. Par commodité, pour $u \in \mathcal{B}^2(E)$, si $u \in \eta$ et $\eta \in \mathrm{Dom}(\nabla)$, on dira que $u$ est *$\mathcal{M}^2$-dérivable* et n'importe quel élément de $\nabla\eta$ pourra être noté $\nabla u$. La proposition suivante montre que $\nabla$ est une généralisation de la dérivation ordinaire.

PROPOSITION 2. — *Si $f \in AP^1(E)$, alors $[f]_2$ est $\mathcal{M}^2$-dérivable et* $\nabla[f]_2 = [\dot{f}]_2$.

*Démonstration.* — Par la seconde inégalité de la moyenne on a :

$$\big|f(t + r) - f(t) - \dot{f}(t)r\big| \le |r| \operatorname{Sup}\big\{|\dot{f}(s) - \dot{f}(t)|\,;\ s \in [t, t + r]\big\}.$$

Donc

$$\Big|\frac{1}{r}(f(t+r)-f(t))-\dot f(t)\Big|\le \operatorname{Sup}\big\{|\dot f(s)-\dot f(t)|\,;\ s\in[t,t+r]\big\}.$$

Puisque $\dot f\in AP^0(E)$, $\dot f$ est uniformément continue, d'où

$$\lim_{r\to 0}\Big\|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)-\dot f\Big\|_\infty=0,$$

et donc

$$\lim_{r\to 0}\Big|\frac{1}{r}\big(\tau_r[f]_2-[f]_2\big)-[\dot f]_2\Big|_2=0.\quad\square$$

PROPOSITION 3. — *Soit $f\in\mathcal{B}^2(E)$, $f(t)\sim_2\sum_\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$. On suppose que $f$ est $\mathcal{M}^2$-dérivable. Alors :*

(i) $\nabla f(t)\sim_2\sum_\lambda i\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$,

(ii) $\mathcal{M}\{\nabla f\}=0$.

*Démonstration*

(i) $a((\tau_r f-f)/r;\lambda)=((\mathrm{e}^{i\lambda r}-1)/r)a(f;\lambda)$. Puisque $a(\cdot\,;\lambda)$ est une forme linéaire continue sur $B^2(E)$, on obtient $a(\nabla f;\lambda)=i\lambda a(f,\lambda)$ lorsque $r$ tend vers zéro.

(ii) On raisonne comme pour (i) avec $\lambda=0$. $\square$

PROPOSITION 4. — *Pour tout $r\in\mathbb{R}$, on a $\nabla\circ\tau_r=\tau_r\circ\nabla$ sur* $\operatorname{Dom}(\nabla)$.

*Démonstration.* — Ceci résulte de la continuité de $\tau_r$ et du fait que $\tau_r$ commute avec $(\tau_s-\mathrm{id})/s$. $\square$

Posons :

$$B^{1,2}(E):=\operatorname{Dom}(\nabla).$$

Ainsi, pour $\eta\in B^2(E)$, dire que $\eta$ appartient à $B^{1,2}(E)$ signifie que $\nabla\eta$ existe dans $B^2(E)$. Posons :

$$\mathcal{B}^{1,2}(E):=\big\{f\in\mathcal{B}^2(E)\,;\ [f]_2\in B^{1,2}(E)\big\}.$$

Sur $B^{1,2}(E)$ on définit le produit scalaire

$$\big\langle[f]_2\mid[g]_2\big\rangle:=\mathcal{M}\{f\circ\bar g\}+\mathcal{M}\{\nabla f\circ\overline{\nabla}g\}.$$

La norme euclidienne associée est :

$$\big|\,[f]_2\big|_{1,2}:=\big(\langle[f]_2\mid[\bar f]_2\rangle\big)^{1/2}=\big(\big|\,[f]_2\big|_2^2+\big|\,[\nabla f]_2\big|_2^2\big)^{1/2}.$$

PROPOSITION 5. — $(B^{1,2}(E), \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

*Démonstration.* — Soit $(\eta_j)_j$ une suite de Cauchy dans $B^{1,2}(E)$. Alors $(\eta_j)_j$ et $(\nabla\eta_j)_j$ sont deux suites de Cauchy dans $B^2(E)$ qui est complet. Il existe donc $\xi, \zeta \in B^2(E)$ tels que

$$|\eta_j - \xi|_2 \longrightarrow 0, \quad |\nabla\eta_j - \zeta|_2 \longrightarrow 0$$

lorsque $j$ tend vers l'infini. Puisque le graphe de $\nabla$ est fermé dans $B^2(E) \times B^2(E)$ on a $\zeta = \nabla\xi$ et $\xi$ est la limite de $(\eta_j)_j$ dans $B^{1,2}(E)$. $\square$

PROPOSITION 6. — *Soit $f \in \mathcal{B}^2(E)$ telle que $f(t) \sim_2 \Sigma_\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$. Si $\sum_\lambda \lambda^2 |a(f;\lambda)|^2 < \infty$, alors $f$ est $\mathcal{M}^2$-dérivable et*

$$\nabla f(t) \sim_2 \sum_\lambda i\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}.$$

*Démonstration.* — Considérons une suite injective $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans $]0,\infty[$ telle que $\{\lambda_k\,;\ k \geq 1\} \supset \Lambda(f) \cap ]0,\infty[$ et posons :

$$P_N(t) := a(f,0) + \sum_{k=1}^{N} a(f;\lambda_k)\,\mathrm{e}^{i\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{N} a(f;-\lambda_k)\,\mathrm{e}^{-i\lambda_k t}.$$

On sait que $\mathcal{M}\{|f - P_N|^2\}^{1/2}$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini.

Par le théorème de Riesz-Fisher-Besicovitch [4, p. 110], il existe $g$ dans $\mathcal{B}^2(E)$ telle que $g(t) \sim_2 \sum_\lambda i\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$. Alors $\mathcal{M}\{|g - \dot{P}_N|^2\}^{1/2}$ tend vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini, et par la PROPOSITION 2, $|[g]_2 - \nabla[P_N]_2|_2$ tend vers 0. Puisque $|[f]_2 - [P_N]_2|_2$ tend vers 0 et puisque $\nabla$ est de graphe fermé, on a $[g]_2 = \nabla[f]_2$. $\square$

Nous pouvons maintenant améliorer la PROPOSITION 2.

PROPOSITION 7. — *Soit $f \in AP^0(E) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ telle que $\dot{f}$ appartienne à $\mathcal{B}^2(E)$. Alors $f \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$ et $\nabla f \sim_2 \dot{f}$.*

*Démonstration.* — Puisque $f \in AP^0(E)$, $Df$ est une distribution p.p. [27, p. 205], et comme $\dot{f} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, E)$ on a $\dot{f} = Df$. D'après [8, prop. 2], on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{Df(t)\,\mathrm{e}^{-i\lambda t}\}_t &= -\mathcal{M}\{f(t)\mathrm{d}/\mathrm{d}t(\mathrm{e}^{-i\lambda t})\}_t \\ &= i\lambda\,\mathcal{M}\{f(t)\,\mathrm{e}^{-i\lambda t}\}_t = i\lambda a(f;\lambda).\end{aligned}$$

Donc $a(\dot{f};\lambda) = i\lambda a(f;\lambda)$. Puisque $\dot{f}$ est dans $\mathcal{B}^2$, on peut appliquer la PROPOSITION 6 et conclure que $f$ appartient à $\mathcal{B}^{1,2}(E)$ et qu'en outre $\nabla f(t) \sim_2 \sum_\lambda i\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t} \sim_2 \dot{f}(t)$. $\square$

PROPOSITION 8. — *Soit un entier $k$ tel que $1 \leq k \leq \infty$. Alors $AP^k(E)$ est dense dans $B^{1,2}(E)$.*

*Démonstration.* — Soit $\eta \in B^{1,2}(E)$. On fixe $f \in \eta$ telle que $f(t) \sim_2 \sum_\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$ et $\nabla f(t) \sim_2 \sum_\lambda a(f;\lambda)\,\mathrm{e}^{i\lambda t}$. Considérons une suite injective $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans $]0,\infty[$ telle que $\{\lambda_k; k \geq 1\} \supset \Lambda(f) \cap ]0,\infty[$ et posons :

$$P_N(t) := a(f;0) + \sum_{k=1}^{N} a(f;\lambda_k)\,\mathrm{e}^{i\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{N} a(f;-\lambda_k)\,\mathrm{e}^{-i\lambda_k t}.$$

Ainsi $P_N \in AP^\infty(E)$ et $|[P_N]_2 - [f]_2|_2$ et $\nabla[P_N]_2 - \nabla[f]_2|_2$ tendent tous deux vers 0 lorsque $N$ tend vers l'infini, donc $([P_N])_N$ converge vers $[f]_2$ dans $B^{1,2}(E)$. $\square$

Ce résultat permet de considérer $B^{1,2}(E)$ comme un complété hilbertien de $AP^1(E)$.

PROPOSITION 9. — *Soit $f \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, $g \in AP^1(E)$. Alors $f \cdot g \in \mathcal{B}^{1,2}(\mathbb{C})$, $\nabla(f \cdot g) \sim_2 \nabla f \cdot g + f \cdot \dot{g}$, et $\mathcal{M}\{\nabla f \cdot g\} = -\mathcal{M}\{f \cdot \dot{g}\}$.*

*Démonstration.* — La dernière égalité résulte de l'équivalence qui la précède et de la PROPOSITION 3 (ii). Puisque $f \in \mathcal{B}^2(E)$, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon \in AP^0(E)$ telle que $\mathcal{M}\{|f - h_\varepsilon|^2\}^{1/2} \leq \|g\|_\infty^{-1}$. Alors

$$\bar{\mathcal{M}}\big\{|f \cdot g - h_\varepsilon \cdot g|^2\big\}^{1/2} \leq \mathcal{M}\big\{|f - h_\varepsilon|^2\big\}^{1/2} \cdot \|g\|_\infty \leq \varepsilon,$$

et, puisque $h_\varepsilon \cdot g \in AP^0(\mathbb{C})$, on en déduit que $f \cdot g \in \mathcal{B}^2(\mathbb{C})$. Pour la dérivabilité, notons que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\big(\tau_r(f \cdot g) - f \cdot g\big) &= \frac{1}{r}(\tau_r f \cdot \tau_r g - f \cdot g)\\ &= \frac{1}{r}(\tau_r f - f) \cdot \tau_r g + f \cdot \frac{1}{r}(\tau_r g - g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\big(\tau_r(f \cdot g) - f \cdot g\big) &- \nabla f \cdot g - f \cdot \dot{g}\\ &= \Big(\frac{1}{r}(\tau_r f - f) - \nabla f\Big) \cdot g + f \cdot \Big(\frac{1}{r}(\tau_r g - g) - \dot{g}\Big)\\ &\qquad + (\tau_r f - f) \cdot (\tau_r g - g).\end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}\Big\{\Big|\frac{1}{r}(\tau_r(f\cdot g)-f\cdot g)-\nabla f\cdot g-f\cdot\dot g\Big|^2\Big\}^{1/2}\\
&\le \mathcal{M}\{\Big|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)-\nabla f)\cdot g\Big|^2\Big\}+\mathcal{M}\Big\{\Big|f\cdot(\frac{1}{r}(\tau_r g-g)-\dot g)\Big|^2\Big\}^{1/2}\\
&\qquad\qquad+\mathcal{M}\Big\{\Big|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)\cdot(\tau_r g-g)\Big|^2\Big\}^{1/2}\\
&\le \mathcal{M}\{\Big|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)-\nabla f\Big|^2\Big\}^{1/2}\cdot\|g\|_\infty+\mathcal{M}\{|f|^2\}^{1/2}\Big\|\frac{1}{r}(\tau_r g-g)-\dot g\Big\|_\infty\\
&\qquad\qquad+\mathcal{M}\Big\{\Big|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)\Big|^2\Big\}^{1/2}\|\tau_r g-g\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Dans la démonstration de la PROPOSITION 2, on a vu que

$$\Big\|\frac{1}{r}(\tau_r g-g)-g\Big\|_\infty\longrightarrow 0$$

lorsque $r$ tend vers 0. Par ailleurs il est clair que $\|\tau_r g-g\|_\infty$ tend vers 0 et que $\mathcal{M}\{|\frac{1}{r}(\tau_r f-f)|^2\}^{1/2}$ tend vers $\mathcal{M}\{|\nabla f|^2\}^{1/2}$; la somme des trois termes de la dernière inégalité tend donc vers 0, ce qui prouve que $\nabla(f\cdot g)\sim_2\nabla f\cdot g+f\cdot\dot g$. $\square$

Le résultat suivant fait apparaître la dérivation $\nabla$ comme on fait apparaître la dérivée généralisée de Sobolev dans les espaces $W^{1,p}$ (cf. [14, p. 120]) :

PROPOSITION 10. — *Soit $f,g$ dans $\mathcal{B}^2(E)$ telles que, pour toute $h$ dans $AP^1(E)$, on ait $\mathcal{M}\{f\cdot h\}=-\mathcal{M}\{g\cdot\dot h\}$. Alors $g$ est dans $\mathcal{B}^{1,2}(E)$ et $\nabla g\sim_2 f$.*

*Démonstration.* — Le cas vectoriel résulte du cas scalaire en travaillant composante par composante; il suffit ainsi de traiter le cas $E=\mathbb{C}$. En prenant $h(t)=e^{i\lambda t}$, il apparaît que $a(f;\lambda)=i\lambda a(g;\lambda)$. Puisque $f$ appartient à $\mathcal{B}^2(\mathbb{C})$ on a $\sum_\lambda \lambda^2|a(g;\lambda)|^2<+\infty$. La PROPOSITION 6 montre alors que $g$ est dans $\mathcal{B}^{1,2}(\mathbb{C})$ et que $\nabla g(t)\sim_2\sum_\lambda i\lambda a(g;\lambda)\sim_2 f(t)$. $\square$

La définition de la $\mathcal{M}^2$-dérivation présente des analogies avec la dérivation vectorielle dans $L^2$ telle qu'elle est définie dans [24, p. 121] ou dans [2, p. 174]. On a vu aussi son analogie avec la dérivée de Sobolev. Mais l'analogie n'est pas complète. Par exemple, les distribution presque-périodiques, [27, p. 205], ne jouent pas le même rôle que les distributions usuelles dans les espaces $W^{1,p}$.

## 2. Les opérateurs de Nemytski

La théorie des opérateurs de Nemytski dans les espaces de fonctions de classe $C^k$ sur les domaines bornés est traitée dans [1, p. 168], [20, p. 211]; pour les espaces $L^p$, elle est traitée dans [22, ch. I, § 2]. Pour les espaces de Sobolev usuels, on peut consulter [16], [25] et pour les espaces $AP^k$, voir [5], [6]. Nous traitons ici le cas des espaces $B^p$ et $B^{1,2}$.

THÉORÈME 1. — *Soit $F$ un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E \to F$ une application hölderienne : il existe $a \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tous $x, y \in E$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|^\alpha$. Soit deux réels positifs $p$ et $q$ tels que $q\alpha = p$. Alors :*

(i) *si $u \in \mathcal{B}^p(E)$ alors $f \circ u \in \mathcal{B}^q(f)$ ;*

(ii) *si $u, v \in \mathcal{B}^p(E), u \sim_p v$ alors $f \circ u \sim_q f \circ v$ ;*

(iii) *l'opérateur de Nemytski $\mathcal{N}_f([u]_p) := [f \circ u]_q$ est une application de $B^p(E)$ dans $B^q(F)$ qui satisfait :*

$$\left|\mathcal{N}_f(\,[u]_p) - \mathcal{N}_f(\,[v]_p)\right|_q \leq a \cdot \left|\,[u]_p - [v]_p\right|_p.$$

*Démonstration.*

(i) En posant $b := |f(0)|$, on obtient $|f(x)| \leq a \cdot |x|^\alpha + b$ par l'inégalité du triangle. Ainsi, lorsque $u$ est dans $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}, E)$, on a $f \circ u \in \mathcal{L}^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}, E)$. Puisque $u$ appartient à $\mathcal{B}^p(E)$, il existe une suite $(u_j)_j$ dans $AP^0(E)$ telle que $\mathcal{M}\{|u - u_j|^p\}^{1/p}$ tend vers 0 quand $j \to \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|f \circ u(t) - f \circ u_j(t)\right| \leq a\left|u(t) - u_j(t)\right|^\alpha,$$

donc $|f \circ u(t) - f \circ u_j(t)|^q \leq a^q |u(t) - u_j(t)|^p$. Par linéarité et monotonie de l'intégrale de Lebesgue, on obtient, pour tout $T > 0$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f \circ u(t) - f \circ u_j(t)\right|^q \mathrm{d}t \leq \frac{a^q}{2T}\int_{-T}^{T}\left|u(t) - u_j(t)\right|^p \mathrm{d}t.$$

En passant à la limite supérieure, quand $T \to \infty$, il vient

$$\overline{\mathcal{M}}\left\{|f \circ u - f \circ u_j|^q\right\} \leq a^q \overline{\mathcal{M}}\left\{|u - u_j|^p\right\},$$

soit encore

$$\overline{\mathcal{M}}\left\{|f \circ u - f \circ u_j|^q\right\}^{1/q} \leq a \cdot \overline{\mathcal{M}}\left\{|u - u_j|^p\right\}^{1/q} = a \cdot \left|\,[u]_p - [u_j]_p\right|_p^\alpha.$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{M}}\{|f \circ u - f \circ u_j|^q\}^{1/q}$ tend vers 0 lorsque $j$ tend vers l'infini, et $f \circ u_j$ appartient à $AP^0(F)$ puique $f$ est continue, donc $f \circ u$ appartient à $\mathcal{B}^q(F)$.

(ii) Par un calcul similaire à celui qui précède, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{|f \circ u - f \circ v|^q\}^{1/q} &= \overline{\mathcal{M}}\{|f \circ u - f \circ v|^q\}^{1/q} \\ &\leq a\big(\mathcal{M}\{|u - v|^p\}^{1/p}\big)^\alpha,\end{aligned}$$

d'où l'implication annoncée.

(iii) L'inégalité annoncée est une simple traduction de l'inégalité énoncée ci-dessus. $\square$

THÉORÈME 2. — *Soit $f \in C^1(E,F)$, soient $a, a_0, a_1 \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons les conditions suivantes :*

($C_1$) *Pour tous $x, y \in E$, on a $|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|$.*

($C_2$) *Pour tous $x \in E$, on a $|f(x)| \leq a_0|x|^2 + b$.*

($C_3$) *Pour tous $x, y \in E$, on a $|f'(x) - f'(y)| \leq a_1|x - y|$.*

*Sous* ($C_1$) *et* ($C_3$), *ou bien sous* ($C_2$) *et* ($C_3$), *l'opérateur de Nemytski*

$$\mathcal{N}_f : B^2(E) \longrightarrow B^1(F)$$

*est Fréchet-$\mathcal{C}^1$, et pour tous $u, h \in \mathcal{B}^2(E)$, on a :*

$$f'(u) \in \mathcal{B}^2\big(\mathcal{L}(E,F)\big), \;\; f'(u) \cdot h \in \mathcal{B}^1(F), \;\; \mathcal{N}_f'\big([u]_2\big) \cdot [h]_2 = \big[f'(u) \cdot h\big]_1.$$

*Démonstration.*

• Supposons ($C_1$) et ($C_3$) vraies. Notons que $f$ et $f'$ satisfont les hypothèses du THÉORÈME 1 en prenant $\alpha = 1$ et $p = 2 = q$. Donc, pour tout $u \in \mathcal{B}^2(E)$, on a $f(u) \in \mathcal{B}^2(F)$ et $f'(u) \in \mathcal{B}^2(\mathcal{L}(E,F))$. En fixant $u$ et en posant $T([h]_2) := [f'(u) \cdot h]_1$, on voit que $T$ est un opérateur linéaire continu de $B^2(E)$ dans $B^1(F)$. Puisque $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $h \in \mathcal{B}^2(E)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}&\Big|f\big(u(t) + h(t)\big) - f\big(u(t)\big) - f'\big(u(t)\big) \cdot h(t)\Big| \\ &\qquad \leq \big|h(t)\big| \cdot \mathrm{Sup}\Big\{\big|f'(z) - f'(u(t))\big| \; ; \; z \in [u(t), u(t) + h(t)]\Big\}.\end{aligned}$$

Avec ($C_3$), on obtient

$$\Big|f\big(u(t) + h(t)\big) - f\big(u(t)\big) - f'\big(u(t)\big) \cdot h(t)\Big| \leq a_1 \cdot \big|h(t)\big|^2$$

et, puisque la moyenne est monotone, on a

$$\mathcal{M}\Big\{\big|\mathcal{N}_f(u+h)-\mathcal{N}_f(u)-f'(u)\cdot h\big|\Big\}\leq a_1\big|\,[h]_2\big|_2^2,$$

ce qui prouve que $\mathcal{N}_f$ est Fréchet-dérivable en $u$ et que $\mathcal{N}_f'([u]_2)\cdot[h]_2 = T([h]_2)$. Si $u, v$ appartiennent à $\mathcal{B}^2(E)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\Big|\big(\mathcal{N}_f'([u]_2)-\mathcal{N}_f'([v]_2)\big)[h]_2\Big|_1\\
&\qquad=\big|[f'(u)\cdot h]_1-[f'(v)\cdot h]_1\big|_1\\
&\qquad=\big|[(f'(u)-f'(v))\cdot h]_1\big|_1\\
&\qquad=\mathcal{M}\big\{|(f'(u)-f'(v)\cdot h|\big\}\\
&\qquad\leq\mathcal{M}\big\{|f'(u)-f'(v)|^2\big\}^{1/2}\cdot\mathcal{M}\big\{|f|^2\big\}^{1/2}\\
&\qquad\leq a_1\mathcal{M}\big\{|u-v|^2\big\}^{1/2}\cdot\mathcal{M}\big\{|h|^2\big\}^{1/2}\\
&\qquad=a_1\cdot\big|\,[u]_2-[v]_2\big|_2\cdot\big|\,[h]_2\big|_2.
\end{aligned}$$

On en déduit, en norme d'opérateurs linéaires, que

$$\big|\mathcal{N}_f'\big([u]_2\big)-\mathcal{N}_f'\big([v]_2\big)\big|\leq a_1\cdot\big|\,[u]_2-[v]_2\big|_2,$$

ce qui prouve la continuité de $\mathcal{N}_f'$ sur $B^2(E)$

Considérons maintenant le cas où ($C_2$) et ($C_3$) sont vraies. D'après le THÉORÈME 1, $f'(u)$ appartient à $\mathcal{B}^2(\mathcal{L}(E),F))$ dès que $u$ est dans $\mathcal{B}^2(E)$. Commençons par établir que $f(u)$ est dans $\mathcal{B}^1(F)$ dès que $u\in\mathcal{B}^2(E)$. Fixons $u\in\mathcal{B}^2(E)$ ; l'inégalité

$$\big|f(u(t))\big|\leq a_0\cdot\big|u(t)\big|^2+b$$

montre que $f(u)$ appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ puisque $u$ est dans $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},E)$. Par construction de $\mathcal{B}^2(E)$, il existe une suite $(u_j)_j$ à valeurs dans $AP^0(E)$ telle que $\mathcal{M}\{|u-u_j|^2\}^{1/2}$ pour tout entier $j\geq 1$. D'après l'inégalité de la moyenne, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|f\big(u(t)\big)-f\big(u_j(t)\big)-f'\big(u(t)\big)\cdot\big(u(t)-u_j(t)\big)\Big|\\
&\qquad\leq\big|u(t)-u_j(t)\big|\cdot\mathrm{Sup}\big\{|f'(u(t))-f'(W)|\,;\ W\in[u(t),u_j(t)]\big\}\\
&\qquad\leq\big|u(t)-u_j(t)\big|\cdot\mathrm{Sup}\big\{a_1|u(t)-W|\,;\ W\in[u(t),u_j(t)]\big\}\\
&\qquad=a_1\cdot\big|u(t)-u_j(t)\big|^2,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\bar{\mathcal{M}}\Big\{\Big|f\big(u(t)\big) - f\big(u_j(t)\big) - f'\big(u(t)\big) \cdot \big(u(t) - u_j(t)\big)\Big|\Big\} \leq a_1 \cdot j^{-2}.$$

Puisque $f'(u))$ est dans $\mathcal{B}^2(\mathcal{L}(E,F))$, $u-u_j$ dans $\mathcal{B}^2(E)$, $f'(u)\cdot(u-u_j)$ dans $\mathcal{B}^1(F)$ et $f(u_j)$ dans $AP^0(F) \subset \mathcal{B}^1(F)$, il en résulte que $f(u)$ est la limite en moyenne supérieure d'une suite de $\mathcal{B}^1(F)$, ce qui prouve que $f(u)$ est dans $\mathcal{B}^1(F)$. Pour la suite de la démonstration, on raisonne comme dans le cas ci-dessus. $\square$

THÉORÈME 3. — *Soit $L \in \mathcal{C}^1(E \times E; \mathbb{R})$, soient $a, a_0, a_1 \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons les conditions suivantes :*

(H$_1$) *Pour tous $x, x_1, y, y_1 \in E$, on a :*

$$\big|L(x,y) - L(x_1,y_1)\big| \leq a\big(|x-x_1|^2 + |y-y_1|^2\big)^{1/2}.$$

(H$_2$) *Pour tous $x, y \in E$, on a $\big|L(x,y)\big| \leq a_0\big(|x|^2+|y|^2\big) + b$.*

(H$_3$) *Pour tous $x, x_1, y, y_1 \in E$, on a :*

$$\big|L'(x,y) - L'(x_1,y_1)\big| \leq a_1\big(|x-x_1|^2 + |y-y_1|^2\big)^{1/2}.$$

*Sous (H$_1$) et (H$_3$), ou bien sous (H$_2$) et (H$_3$), l'opérateur*

$$\mathcal{F} : B^{1,2}(E) \longrightarrow B^1(\mathbb{R}),$$

*tel que*

$$\mathcal{F}\big([u]_2\big) := \big[L(u, \nabla u)\big]_2$$

*est Fréchet-$\mathcal{C}^1$ sur $B^{1,2}(E)$ et, pour tous $u, h$ dans $\mathcal{B}^{1,2}(E)$, on a*

$$\mathcal{F}'\big([u]_2\big) \cdot [h]_2 = \big[L_x(u,\nabla u)\cdot h + L_{\dot{x}}(u,\nabla u)\cdot \nabla h\big]_1,$$

*où $L_x(x,y)$ et $L_{\dot{x}}(x,y)$ sont les différentielles respectives de $L(\cdot,y)$ en $x$ et de $L(x,\cdot)$ en $y$.*

*Démonstration.* — L'opérateur de Nemytski construit sur $L$ est :

$$\mathcal{N}_L([u]_2,[v]_2) := [L(u,v)]_1.$$

Quitte à assimiler $B^2(E) \times B^2(E)$ à $B^2(E \times E)$, par le THÉORÈME 2, on peut affirmer que $\mathcal{N}_L$ appartient à $C^1(B^2(E) \times B^2(E), B^1(\mathbb{R}))$. L'application jet d'ordre 1, $j_1 : B^{1,2}(E) \to B^2(E) \times B^2(E)$, définie par

$$j_1\big([u]_2\big) := \big([u]_2, \nabla[u]_2\big)$$

est linéaire continue à cause du choix des normes, donc est Fréchet-$\mathcal{C}^1$. Par la règle de différentiation des applications composées, $\mathcal{F} = \mathcal{N}_L \circ j_1$ est Fréchet-$\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'\big([u]_2\big) \cdot [h]_2 &= \mathcal{N}_L'\big(j_1([u]_2)\big) \cdot j_1'\big([u]_2\big) \cdot [h]_2\\ &= \mathcal{N}_L'\big([u]_2, \nabla[u]_2\big) \cdot \big([h]_2, \nabla[h]_2\big)\\ &= \big[L'(u,\nabla u)\cdot(h,\nabla h)\big]_1\\ &= \big[L_x(u,\nabla u)\cdot h + L_{\dot x}(u,\nabla u)\cdot \nabla h\big]_1.\end{aligned}$$

Notons que, par le THÉORÈME 2, $L_x(u,\nabla u)$ et $L_{\dot x}(u,\nabla u)$ appartiennent à $B^2(E)$. □

### 3. Solutions presque-périodiques faibles.

On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 4. — *Soit $L \in \mathcal{C}^1(E \times E, \mathbb{R})$. On suppose que $L$ satisfait les hypothèses* (H$_1$) *et* (H$_3$), *ou bien les hypothèses* (H$_2$) *et* (H$_3$) *du théorème* 3. *Pour $u \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, on pose :*

$$J\big([u]_2\big) := \mathcal{M}\big\{L(u,\nabla u)\big\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} L\big(u(t),\nabla u(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

*Alors :*

(i) *$J$ appartient à $\mathcal{C}^1(B^{1,2}(E),\mathbb{R})$ et, pour tous $u,h \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, on a :*

$$J'\big([u]_2\big)\cdot[h]_2 = \mathcal{M}\big\{L_x(u,\nabla u)\cdot h + L_{\dot x}(u,\nabla u)\cdot\nabla h\big\}.$$

(ii) *$J'([u]_2) = 0$ si et seulement si $L_x(u,\nabla u) \sim_2 \nabla L_{\dot x}(u,\nabla u)$.*

*Démonstration.*

(i) L'inégalité $|\mathcal{M}\{u\}| \le \mathcal{M}\{|u|\}$ assure que $\mathcal{M}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur $B^1(\mathbb{R})$, donc est Fréchet-$\mathcal{C}^1$. En reprenant les notations du THÉORÈME 3, on a $J = \mathcal{M} \circ \mathcal{F}$, et $J$ est Fréchet-$\mathcal{C}^1$ comme composée de deux applications Fréchet-$\mathcal{C}^1$, et de plus

$$\begin{aligned}J'\big([u]_2\big)\cdot[h]_2 &= \mathcal{M}'\big(\mathcal{F}([u]_2)\big)\circ\mathcal{F}'\big([u]_2\big)\cdot[h]_2\\ &= \mathcal{M}\big\{\mathcal{F}'([u]_2)\cdot[h]_2\big\}\\ &= \mathcal{M}\big\{L_x(u,\nabla u)\cdot h + L_{\dot x}(u,\nabla u)\cdot\nabla u\big\}.\end{aligned}$$

(ii) Si on suppose que $L_x(u,\nabla u) \sim_2 \nabla L_{\dot{x}}(u,\nabla u)$, ce qui sous-entend que $L_{\dot{x}}(u,\nabla u)$ appartient à $\mathcal{B}^{1,2}(E)$, alors, pour tout $h \in AP^1(E)$, on a

$$\mathcal{M}\{L_x(u,\nabla u)\cdot h\} = -\mathcal{M}\{L_{\dot{x}}(u,\nabla u)\cdot h\},$$

donc

$$0 = \mathcal{M}\{L_x(u,\nabla u)\cdot h + L_{\dot{x}}(u,\nabla u)\cdot \nabla h\} = J'([u]_2).$$

Et puisque $AP^1(E)$ est dense dans $B^{1,2}(E)$, on en déduit que $J'([u]_2) = 0$.

Réciproquement, si on suppose que $J'([u]_2) = 0$, alors, pour tout $h$ dans $AP^1(E)$, en utilisant (i), on a

$$\mathcal{M}\{L_x(u,\nabla u)\cdot h\} = -\mathcal{M}\{L_{\dot{x}}(u,\nabla u)\cdot \dot{h}\}.$$

La Proposition 10 nous permet d'affirmer que :

$$L_x(u,\nabla u) \sim_2 \nabla L_{\dot{x}}(u,\nabla u). \quad \square$$

A partir d'un lagrangien $L : \mathbb{R}\times E\times E \to \mathbb{R}$, on peut formuler l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\text{(E.L)} \qquad L_x(t,x,\dot{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$$

Nous pouvons considérer trois types de solutions p.p. de (E.L) :

1) La *notion de solution p.p. forte*, i.e. $x \in AP^1(E)$, telle que la fonction $t \mapsto L_{\dot{x}}(t,x(t),\dot{x}(t))$ est partout dérivable (au sens ordinaire) et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$L_x\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big).$$

2) Une *première notion de solution p.p. affaiblie* que nous appellerons *$H^1_{\mathrm{loc}}$-solution p.p.* : $x \in AP^0(E) \cap H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},E)$ telle que $\dot{x}$ appartient à $\mathcal{B}^2(E)$, la fonction $t \mapsto L_{\dot{x}}(t,x(t)),\dot{x}(t))$ est Lebesgue-presque partout dérivable (au sens ordinaire) et

$$L_x\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)$$

pour Lebesgue-presque tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Une *deuxième notion de solution p.p. faible* de (E.L) que nous appellerons *$\mathcal{B}^{1,2}$-solution* : $x \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, telle que $t \mapsto L_x(t,x(t),\nabla x(t))$ soit dans $\mathcal{B}^2(E)$, $t \mapsto L_{\dot{x}}(t,x(t),\nabla x(t))$ soit dans $\mathcal{B}^{1,2}(E)$ et $L_x(\cdot,x,\nabla x) \sim_2 \nabla L_{\dot{x}}(\cdot,x,\nabla x)$.

• La notion de $H^1_{\text{loc}}$-solution p.p. survient naturellement pour les solutions périodiques de (E.L) lorsque on utilise le calcul des variations sur $H^1(\mathbb{T}; E)$.

• La notion de $\mathcal{B}^{1,2}$-solution est directement motivée par le THÉORÈME 4. C'est un concept global de solution p.p. qui peut se traduire par :

$$\mathcal{M}\{|L_x(\cdot, x, \nabla x) - \nabla L_{\dot{x}}(\cdot, x, \nabla x)|^2\} = 0.$$

La notion de $\mathcal{B}^{1,2}$-solution peut encore se traduire en termes de coefficients de Fourier-Bohr : elle équivaut à dire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$a\big(L_x(\cdot, x, \nabla x); \lambda\big) = a\big(\nabla L_{\dot{x}}(\cdot, x, \nabla x); \lambda\big).$$

Il est clair que :

$$(x \textit{ solution p.p. forte}) \Rightarrow (x\ H^1_{\text{loc}}\textit{-solution p.p.}) \Rightarrow (x\ \mathcal{B}^{1,2}\textit{-solution}).$$

## 4. Oscillations forcées

THÉORÈME 5. — *Soit $L \in C^1(E \times E, \mathbb{R})$ qui vérifie les hypothèses* $(\mathrm{H}_2)$ *et* $(\mathrm{H}_3)$ *du théorème* 3, *et qui est telle que la fonction*

$$F(x, y) := L(x, y) - \tfrac{1}{2}|x|^2 - \tfrac{1}{2}|y|^2$$

*soit convexe sur $E \times E$. Alors on a :*

(i) *Pour toute $e \in \mathcal{B}^2(E)$, il existe $x \in \mathcal{B}^{1,2}$, unique modulo $\sim_2$, telle que $L_x(x, \nabla x) - \nabla L_{\dot{x}}(x, \nabla x) \sim_2 e$.*

(ii) *Pour $e \in AP^0(E)$, si il existe $x$ dans $AP^1(E)$ telle que*

$$L_x\big(x(t), \dot{x}(t)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = e(t)$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors une telle $x$ est unique.*

(iii) *L'ensemble des $e \in AP^0(E)$ telles qu'il existe $x$ dans $AP^1(E)$ vérifiant*

$$L_x\big(x(t), \dot{x}(t)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = e(t)$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$ est dense dans $AP^0(E)$ pour la norme*

$$\|e\|_* = \mathrm{Sup}\Big\{\mathcal{M}\{e \cdot h\}\ ;\ h \in \mathcal{B}^{1,2}(E),\ |[h]_2|_{1,2} \le 1\Big\}.$$

*Démonstration.* — La fonctionnelle $J$ du THÉORÈME 4 est Fréchet-$\mathcal{C}^1$ sur $B^{1,2}(E)$. La fonctionnelle

$$I([u]_2) := \mathcal{M}\{F(u, \nabla u)\}$$

est Fréchet-$\mathcal{C}^1$ sur $B^{1,2}(E)$ car

$$I\big([u]_2\big) = J\big([u]_2\big) - \tfrac{1}{2}\left|\,[u]_2\right|_2^2.$$

Avec l'isomorphisme $j : B^{1,2}(E) \to B^{1,2}(E)^*$ de F. Riesz sur $B^{1,2}(E)$ défini par

$$j\big([u]_2\big) \cdot [v]_2 := \big\langle [u]_2 \mid [v]_2 \big\rangle,$$

on peut définir dans $B^{1,2}(E)$ les gradients :

$$\operatorname{grad} I\big([u]_2\big) := j^{-1}\big(I'([u]_2)\big), \quad \operatorname{grad} J\big([u]_2\big) := j^{-1}\big(J'([u]_2)\big).$$

Les fonctionnelles $I$ et $J$ sont convexes, donc $\operatorname{grad} I$ et $\operatorname{grad} J$ sont des opérateurs maximaux monotones au sens de Minty. Puisque

$$\operatorname{grad} J = \operatorname{grad} I + \mathrm{id},$$

d'après un théorème de Minty [3, p. 192], $\operatorname{grad} J$ est une surjection de $B^{1,2}(E)$ sur $B^{1,2}(E)$. Par monotonie, on a

$$\begin{aligned} 0 &\le \Big\langle \operatorname{grad} I([u]_2) - \operatorname{grad} I([v]_2) \;\Big|\; ([u]_2) - ([v]_2) \Big\rangle \\ &= \Big\langle \operatorname{grad} J([u]_2) - \operatorname{grad} J([v]_2) - \big(([u]_2) - ([v]_2)\big) \;\Big|\; ([u]_2) - ([v]_2) \Big\rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\Big\langle \operatorname{grad} J([u]_2) - \operatorname{grad} J([v]_2) \;\Big|\; ([u]_2) - ([v]_2) \Big\rangle \ge \Big|([u]_2) - ([v]_2)\Big|_{1,2}^2.$$

Ceci prouve que $\operatorname{grad} J$ est un homéomorphisme de $B^{1,2}(E)$ sur $B^{1,2}(E)$ (cf. [18, p. 31]).

(i) A chaque $e \in \mathcal{B}^2(E)$ on associe $[e]_2^{\#} \in B^{1,2}(E)^*$ définie par

$$[e]_2^{\#}\big([h]_2\big) := \mathcal{M}\{e \cdot h\}$$

et $j^{-1}([e]_2^{\#}) \in B^{1,2}(E)$. Puisque $\operatorname{grad} J$ est un homéomorphisme, il existe $x \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, unique modulo $\sim_2$, tel que $\operatorname{grad} J([x]_2) = j^{-1}([e]_2^{\#})$. En appliquant $j$ à ces deux termes, il vient $J'([x]_2) = [e]_2^{\#}$. Donc, par le THÉORÈME 4, pour toute $h \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$, on a :

$$\mathcal{M}\big\{L_x(x, \nabla x) \cdot h + L_{\dot{x}}(x, \nabla x) \cdot \nabla h\big\} = \mathcal{M}\{e \cdot h\}.$$

Ainsi, pour toute $h \in AP^1(E)$, on a :

$$\mathcal{M}\big\{(L_x(x, \nabla x) - e) \cdot h\big\} = -\mathcal{M}\big\{L_{\dot{x}}(x, \nabla x) \cdot \nabla h\big\}$$

et par la PROPOSITION 10, on en déduit que $L_{\dot{x}}(x, \nabla x) \in \mathcal{B}^{1,2}(E)$ et que $L_x(x, \nabla x) - e \sim_2 \nabla L_{\dot{x}}(x, \nabla x)$, d'où $L_x(x, \nabla x) - \nabla L_{\dot{x}}(x, \nabla x) \sim_2 e$. Ceci prouve l'existence.

Pour l'unicité, considérons $x, u$ dans $\mathcal{B}^{1,2}(E)$ qui vérifient toutes deux l'équation précédente. En remontant les calculs qui précèdent, on arrive à $\operatorname{grad} J([x]_2) = \operatorname{grad} J([u]_2) = j^{-1}([e]_2^{\#})$ et, puisque $\operatorname{grad} J$ est injective, on obtient $[x]_2) = ([u]_2), i.e. x \sim_2 u$.

(ii) Si $e \in AP^0(E)$ et si $x, u \in AP^1(E)$ vérifient

$$L_x(x, \dot{x}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) = e, \quad L_x(u, \dot{u}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - L_{\dot{x}}(u, \dot{u}) = e,$$

alors on a aussi $L_x(x, \dot{x}) - \nabla L_{\dot{x}}(x, \dot{x}) \sim_2 e$ et $L_x(u, \dot{u}) - \nabla L_{\dot{x}}(u, \dot{u}) \sim_2 e$. Alors, par (i), on a $x \sim_2 u$, mais puisque $x, u$ sont dans $AP^0(E)$, on a nécessairement $x = u$.

(iii) Introduisons l'opérateur non-borné non-linéaire

$$\mathcal{D}([x]_2) := \big[L_x(x, \nabla x) - \nabla L_{\dot{x}}(x, \nabla x)\big]_2$$

(dérivée lagrangienne généralisée de $L$ en $([x]_2)$. On a $\operatorname{Dom}(\mathcal{D}) \subset B^{1,2}(E)$, et par (i), on a $\operatorname{Im} \mathcal{D} = B^2(E)$. Toujours par (i), si $[x]_2, [u]_2 \in \operatorname{Dom}(\mathcal{D})$ et si $\mathcal{D}([x]_2) = \mathcal{D}([u]_2)$, alors $[x]_2 = [u]_2$. Ainsi $\mathcal{D} : \operatorname{Dom}(\mathcal{D}) \to B^2(E)$ est bijectif. Si $[x]_2, [u]_2 \in \operatorname{Dom}(\mathcal{D})$, on a :

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{D}([x]_2) - \mathcal{D}([u]_2)\big\|_* \\
&\quad = \operatorname{Sup}\Big\{\mathcal{M}\{(\mathcal{D}([x]_2) - \mathcal{D}([u]_2)) \cdot h\} \,;\ \ h \in \mathcal{B}^{1,2}(E),\ |[h]_2|_{1,2} \leq 1\Big\} \\
&\quad = \operatorname{Sup}\Big\{(J'([x]_2 - J'([u]_2)) \cdot h \,;\ h \in \mathcal{B}^{1,2}(E),\ |[h]_2|_{1,2} \leq 1\Big\} \\
&\quad = \big\|J'([x]_2) - J'([u]_2)\big\|_{(B^{1,2})^*} \\
&\quad = \big|\operatorname{grad} J([x]_2) - \operatorname{grad} J([u]_2)\big|_{1,2}.
\end{aligned}$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} \big| [x]_2 - [u]_2 \big|_{1,2} &\le \big| \operatorname{grad} J([x]_2) - \operatorname{grad} J([u]_2) \big|_{1,2} \\ &\le a_1 \cdot \big| ([x]_2) - ([u]_2) \big|_{1,2}, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\mathcal{D} : \big(\mathrm{Dom}(\mathcal{D}), |\cdot|_{1,2}\big) \longrightarrow \big(B^2(E), \|\cdot\|_*\big)$$

est un homéomorphisme. D'après la PROPOSITION 8, $AP^2(E)$ est dense dans $B^{1,2}(E)$ et $AP^2(E)$ est inclus dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{D})$. Donc $AP^2(E)$ est dense dans $\mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ pour la norme $|\cdot|_{1,2}$. Puisque $\mathcal{D}$ est un homéomorphisme, $\mathcal{D}(AP^2(E))$ est dense dans $B^2(E)$ pour la norme $\|\cdot\|_*$. En notant que $\mathcal{D}(AP^2(E))$ est contenu dans $AP^0(E)$, on obtient la conclusion annoncée. □

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ALEXEEV (V.M.), TIHOMIROV (V.M.) et FOMIN (S.V.). — *Commande optimale*, éd. MIR, Moscou, 1982.

[2] AUBIN (J.P.). — *Analyse fonctionnelle appliquée*, P.U.F., Paris, t. **1**, 1987.

[3] AUBIN (J.P.) and EKELAND (I.). — *Applied Nonlinear Analysis.* — Wiley-Inter-Science New York, 1984.

[4] BESICOVITCH (A.S.). — *Almost Periodic Functions.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932.

[5] BLOT (J.). — *Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes hamiltoniens*, Ann. Sci. Math. Quebec, t. **13**, n° 2, 1989, p. 7–32.

[6] BLOT (J.). — *Calcul des variations en moyenne temporelle,*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. **306**, série I,, 1988, p. 809–811.

[7] BLOT (J.). — *Lagrange Multipliers in Variational Problems in Mean*, Optimization, t. **20**, n° 1, 1989, p. 15–25.

[8] BLOT (J.). — *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians*, J. Math. Anal. Applic., t. **134**, n°2, 1988, p. 312–321.

[9] BLOT (J.). — *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians, II*, Bull. Austral. Math. Soc., t. **40**, n° 3, 1989, p. 457–463.

[10] BLOT (J.). — *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians, III*, Israel J. Math., t. **67**, n° 3, 1989, p. 337–344.

[11] BLOT (J.). — *Calculus of Variations in Mean and Convex Lagrangians, IV*, Ricerche di Mat., t. **XL**, n° 1, 1991, p. 3–18.
[12] BLOT (J.). — *Trajectoires presque-périodiques des sytèmes lagrangiens convexes*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. **310**, série I, 1990, p. 761–763.
[13] BOST (J.B.). — *Tores invariants des systèmes hamiltoniens, exposé 639*, Séminaire N. Bourbaki, Paris, 1985.
[14] BREZIS (H.). — *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* — North Holland, Amsterdam, 1973.
[15] BREZIS (H.). — *Analyse fontionnelle, théorie et applications.* — Masson Paris, 1987.
[16] DACOROGNA (B.). — *Direct Methods in the Calculus of Variations.* — Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[17] DHOMBRE (J.). — Moyennes, chap. VI du livre de J.-P. Bertrandias et all., *Espaces de Marcinkiewicz, corrélations, mesures, systèmes dynamiques.* — Masson, Paris, 1987.
[18] DUGUNDJI (J.) and GRANAS (A.). — *Fixed Point Theory.* — P.W.N., Varsovie, 1982.
[19] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J.T.). — *Linear Operators, Part. I : General Theory.* — Wiley-Interscience, New York, 1958.
[20] FLETT (T.M.). — *Differential Analysis.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
[21] HEWITT (E.). — *Linear Functionals on Almost Periodic Functions*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **74**, 1953, p. 303–322.
[22] KRASNOSELSKI (M.A.). — *Topological Methods in the Theory of Non Linear Integral Equations.* — Pergamon Press, Oxford, 1964.
[23] LEVITAN (B.M.) and ZHIKOV (V.V.). — *Almost Periodic Functions and Differential Equations.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
[24] MALLIAVIN (P.). — *Intégration et probabilités, analyse de Fourier et analyse spectrale.* — Masson, Paris, 1982.
[25] MAWHIN (J.) and WILLEM (M.). — *Critical Points Theory and Hamiltonian Systems.* — Springer-Verlag, New York, 1989.
[26] PHELPS (R.R.). — *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lect. Note Math. 13-64, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
[27] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions.* — Hermann, Paris, 1966.
[28] VO-KHAC (K.). — *Étude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs application aux équations différentielles opérationnelles*, Mémoire 6 du Bull. Soc. Math. France, 1966.