BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

Sur les courbes de Clebsch, dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 166-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__166_1>

Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre; par M. G. Humbert.

(Séance du 18 novembre 1881.)

Considérons les cinq fonctions

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= \Theta_1(z),\\
P_2(z) &= \Theta_1\left(z + \frac{\omega}{5}\right),\\
P_3(z) &= \Theta_1\left(z + \frac{2\omega}{5}\right),\\
P_4(z) &= \Theta_1\left(z + \frac{3\omega}{5}\right),\\
P_5(z) &= \Theta_1\left(z + \frac{4\omega}{5}\right).
\end{aligned}$$

Les fonctions Θ_1 sont formées avec les périodes ω, ω'.

Les fonctions $P(z)$ satisfont aux relations

$$\begin{aligned}
P_{m+1}(z + \omega) &= P_{m+1}(z),\\
P_{m+1}(z + \omega') &= P_{m+1}(z) e^{\frac{-2i\pi z}{\omega}} q^{-1} e^{\frac{-2mi\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

On en conclut aisément les cinq relations suivantes, du second degré,

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1^2 = aP_2P_5 + bP_3P_4, \\ P_2^2 = aP_3P_1 + bP_4P_5, \\ P_3^2 = aP_4P_2 + bP_5P_1, \\ P_4^2 = aP_5P_3 + bP_1P_2, \\ P_5^2 = aP_1P_4 + bP_2P_3. \end{cases}$$

a est une constante qui dépend de q, et $b = -\frac{1}{a}$.

On a aussi une équation de troisième degré, de la forme

$$(2)\qquad P_2^3 + \lambda P_1P_2P_3 = \mu P_4P_1^2 + \nu P_5P_3^2,$$

que l'on ne peut déduire d'une combinaison linéaire des précédentes, multipliées par des facteurs du premier degré en P_1, $P_2, \ldots, P_5$.

Dans cette dernière équation, λ, μ et ν sont des constantes faciles à exprimer en fonction de a.

On a ainsi six équations, entre lesquelles on éliminera P_4^2, P_5^2, P_4P_5, P_4, P_5 ; on obtiendra ainsi une relation entre les trois fonctions P_1, P_2 et P_3.

Le résultat de cette élimination est évidemment le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & bP_3 & aP_2 & P_1^2 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & P_2^2 - P_1P_3 \\ 0 & 0 & 0 & aP_2 & bP_1 & P_3^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -aP_3 & bP_1P_2 \\ 0 & 0 & 1 & -aP_1 & 0 & bP_2P_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu P_1^2 & \nu P_3^2 & P_2^3 + \lambda P_1P_2P_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Effectuant, on trouve aisément

$$0 = P_1^5 + P_3^5 + a^5P_2^5 + P_3^2P_1^2P_2\left(3a^2 + \frac{1}{a^3}\right) - P_2^3P_1P_3(2a + a^6).$$

On a formé ainsi une équation homogène, du cinquième degré en P_1, P_2, P_3 ; il est clair qu'on formerait de la même manière une équation analogue entre trois quelconques des fonctions P.

Il y a plus : je dis qu'il existe une relation de même nature entre trois fonctions linéaires quelconques, mais distinctes, de $P_1, P_2, \ldots, P_5$.

Soient

$$U = \alpha P_1 + \beta P_2 + \ldots + \varepsilon P_5,$$
$$V = \alpha' P_1 + \ldots,$$
$$W = \alpha'' P_1 + \ldots.$$

On en tirera

$$P_1 = X + m P_4 + n P_5,$$
$$P_2 = Y + m' P_4 + n' P_5,$$
$$P_3 = Z + m'' P_4 + n'' P_5.$$

X, Y, Z sont des fonctions linéaires et homogènes de U, V, W.

Portons ces valeurs de P_1, P_2, P_3 dans les équations (1) et (2).

On aura des relations de la forme

$$(1') \qquad \left\{\begin{array}{l} A\ P_4^2 + BP_5^2 + CP_4P_5 + F_1P_4 + \Phi_1P_5 + \Psi_2 = 0, \\ A'\ P_4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \Psi_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A^{\text{IV}} P_4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \Psi_2^{\text{IV}} = 0, \end{array}\right.$$

$$(2') \qquad MP_4^3 + NP_4^2P_5 + \ldots + \chi_3 = 0.$$

Dans ces relations, A, B, C, ..., A^{IV}, ..., M, N, ... sont des constantes, F_1, Φ_1, Ψ_2, ..., Ψ'_2, ..., χ_3 sont des fonctions de X, Y, Z, homogènes et dont le degré est marqué par l'indice.

Des équations (1′) on tirera des valeurs de P_4^2, P_5^2, P_1, P_2, de la forme

$$P_4^2 = f_1 P_4 + f'_1 P_5 + \xi_2,$$

où f_1, f'_1, ξ_2 sont des fonctions de X, Y, Z, homogènes et de degré marqué par l'indice.

En portant ces valeurs dans (2′), on ramènera cette équation à la forme

$$(3') \qquad P_4 F_2 + P_5 \Phi_2 + \Xi_3 = 0.$$

Si, entre les équations (1′) et (3′), on élimine P_4^2, P_5^2, P_4P_5, P_4 et P_5, on trouvera une relation homogène et du cinquième degré en X, Y et Z.

Dans cette relation entreront les six arbitraires, m, n, m', n', m'', n'' et aussi a.

Or, soient x et y deux fonctions doublement périodiques d'une variable t, ayant cinq infinis et les mêmes, dans le parallélogramme des périodes, qui seront $5\omega'$ et ω.

On aura, d'après une proposition connue,

$$x = \frac{A_1 P_1(t+\alpha) + A_2 P_2(t+\alpha) + \ldots + A_5 P_5(t+\alpha)}{C_1 P_1(t+\alpha) + \ldots + C_5 P_5(t+\alpha)},$$

$$y = \frac{B_1 P_1(t+\alpha) + \ldots + B_5 P_5(t+\alpha)}{C_1 P_1(t+\alpha) + \ldots + C_5 P_5(t+\alpha)}.$$

On aura, d'après le théorème précédent, une relation du cinquième degré homogène entre les fonctions

$$A_1 P_1(t+\alpha) + \ldots,$$

$$B_1 P_1(t+\alpha) + \ldots,$$

$$C_1 P_1(t+\alpha) + \ldots,$$

c'est-à-dire une équation du cinquième degré entre x et y, que l'on saura former.

Ainsi les coordonnées x et y de la *courbe de Clebsch*, du cinquième ordre, que l'on peut mettre sous la forme

$$x = a_0 + a_1 \frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + a_5 \frac{H'}{H}(t-\beta_5),$$

$$y = b_0 + b_1 \frac{H'}{H}(t-\beta_1) + \ldots + b_5 \frac{H'}{H}(t-\beta_5),$$

avec $a_1 + \ldots + a_5 = 0$ et $b_1 + \ldots + b_5 = 0$, sont les coordonnées d'une courbe du cinquième degré, dont l'équation s'obtiendra en suivant la marche qu'on vient d'indiquer.

On sait que Clebsch a démontré que cette courbe du cinquième degré a son maximum de points doubles moins 1.

On peut déduire de ce qui précède une propriété de cette courbe.

Considérons quatre fonctions linéaires et homogènes de P_1, P_2, ..., P_5.

On pourra, en les combinant linéairement, écrire

$$
\begin{aligned}
X &= P_1 - p\ P_5,\\
Y &= P_2 - p'\ P_5,\\
Z &= P_3 - p''\ P_5,\\
T &= P_4 - p'''\ P_5.
\end{aligned}
$$

Portons les valeurs de P_1, P_2, P_3, P_4, déduites de ces équations, dans les relations (1).

Elles prendront la forme

$$
\begin{gathered}
P_5^2 + P_5 F_1 + F_2 = 0,\\
P_5^2 + P_5 F'_1 + F'_2 = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
P_5^2 + P_5 F_1^{\text{iv}} + F_2^{\text{iv}} = 0.
\end{gathered}
$$

F_1, F_2, F'_1, ..., F_2^{v} étant des fonctions homogènes de X, Y, Z, T de degré marqué par l'indice.

On en déduira, en éliminant P_5^2 et P_5, les trois relations

$$
\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F''_1 & F''_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad
\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F'''_1 & F'''_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad
\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F_1^{\text{iv}} & F_2^{\text{iv}} \end{vmatrix} = 0.
$$

On a aussi trois relations du troisième degré et homogènes en X, Y, Z, T, mais qui doivent se réduire à deux, car, si elles étaient distinctes, on en tirerait des valeurs constantes pour $\frac{X}{T}$, $\frac{Y}{T}$, $\frac{Z}{T}$, ce qui est impossible.

Ces équations peuvent s'écrire

$$
\begin{gathered}
\Phi_3 + F''_1 \Phi_2 + F''_2 \Phi_1 = 0,\\
\Phi_3 + F'''_1 \Phi_2 + F'''_2 \Phi_1 = 0,\\
\Phi_3 + F_1^{\text{iv}} \Phi_2 + F_2^{\text{iv}} \Phi_1 = 0.
\end{gathered}
$$

On ne conservera que les deux suivantes :

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Phi_2 (F'''_1 - F''_1) + \Phi_1 (F'''_2 - F''_2) = 0,\\
&\Phi_2 (F_1^{\text{iv}} - F''_1) + \Phi_1 (F_2^{\text{iv}} - F''_2) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi les fonctions X, Y, Z, T satisfont à deux équations homogènes de troisième degré; ou bien la courbe

$$x = a_0 + a_1 \frac{H'}{H}(t - \beta_1) + \ldots + a_5 \frac{H'}{H}(t - \beta_5),$$
$$y = b_0 + b_1 \frac{H'}{H}(t - \beta_1) + \ldots + b_5 \frac{H'}{H}(t - \beta_5),$$
$$z = c_0 + c_1 \frac{H'}{H}(t - \beta_1) + \ldots + c_5 \frac{H'}{H}(t - \beta_5),$$

où l'on a

$$a_1 + \ldots + a_5 = 0,$$
$$b_1 + \ldots + b_5 = 0,$$
$$c_1 + \ldots + c_5 = 0,$$

est l'intersection de deux surfaces de troisième ordre qui ont une conique commune, car les équations (4) sont vérifiées par

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = 0.$$

Si entre les équations (4) on élimine Z, on trouvera en X, Y et T l'équation homogène et du cinquième degré dont nous avons parlé. Le résultat de l'élimination sera en réalité une équation du neuvième degré, qui se décomposera en une équation du cinquième et deux du second, puisqu'il y a une conique dans l'intersection.

Donc on peut dire que la courbe de Clebsch du cinquième degré est la perspective d'une partie de l'intersection de deux surfaces du troisième ordre qui ont une conique commune. Une étude plus approfondie permet de conclure que ces deux surfaces sont tangentes tout le long de cette conique, qui contient d'ailleurs le point de rencontre des directrices rectilignes de chaque surface, situées dans son plan (¹).

(¹) *Note de la Rédaction.* — Les formules relatives aux courbes gauches, intersection complète ou partielle de deux surfaces algébriques, montrent facilement que, si deux surfaces cubiques sont tangentes tout le long d'une conique, elles se coupent en outre suivant une quintique, qui est en général du genre *deux*. Ce genre s'abaisse à *un* si le point de rencontre des directrices rectilignes de chaque surface, situées dans le plan de la conique, est sur la conique; d'où il faut conclure que ce fait a lieu comme l'indique l'auteur. On sait d'ailleurs que la quintique du genre *un* est l'intersection partielle de deux surfaces cubiques qui ont déjà une courbe gauche du quatrième degré commune à trois points doubles apparents : comme cas particulier, la quintique est encore du genre *un*, si les deux surfaces passent l'une et l'autre par deux coniques qui aient, sur la droite d'inter-

Remarque. — Le procédé de calcul donné plus haut pour former une relation entre trois des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_5$ peut aisément se généraliser.

On arrive ainsi à former l'équation d'ordre n qui lie les coordonnées x et y des courbes de Clebsch à n transcendantes.

---

section de leur plan, un point commun; ce qui arrive lorsque, sur chaque surface, les deux directrices rectilignes, situées dans leurs plans respectifs, ne se rencontrent pas. H. P.