BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ MICHEL

Restriction de la distance géodésique à un arc et rigidité

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 3 (1994), p. 435-442

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_435_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 435–442.

RESTRICTION DE LA DISTANCE GÉODÉSIQUE À UN ARC ET RIGIDITÉ

PAR

RENÉ MICHEL

RÉSUMÉ. — On montre que localement la seule restriction de la distance géodésique à une courbe convexe permet d'identifier, à isométrie près, la métrique d'une surface si les données sont analytiques réelles.

ABSTRACT. — One shows how locally the only restriction of the geodesic distance to a convex curve, allows to identify the metric structure of a surface, in case of analytical assumptions.

1. Introduction

Dans cet article on traite de l'unicité d'une métrique Riemannienne dans un ouvert avec bord de $\mathbb{R}^2$ à laquelle on impose les distances entre les couples de points du bord. Ce problème a été d'abord considéré dans le contexte spécial des métriques conformes à la métrique canonique par ROMANOV [1] et MUHOMETOV [2]. Dans [3], la question a été traitée plus géométriquement. Après [3], ce problème a été rencontré en particulier par GROMOV [4] et étudié par CROKE [5], OTAL [6], GERVER-NADIRASHVILI [7]. Toutefois, la quasi-totalité des résultats de rigidité obtenus exigent l'hypothèse pour la métrique d'être à *courbure négative*; la seule exception est le cas d'une métrique à courbure *constante positive* comme il est prouvé dans [3] où ce problème avec bord est ramené à la résolution de la conjecture de Blaschke (GREEN 1953 pour $n = 2$, BERGER 1980) ou au théorème de Pu (1962), c'est-à-dire à des théorèmes réputés difficiles.

Nous prouvons ici que pour des métriques analytiques, dans une situation «locale» et *sans hypothèse de courbure*, il y a rigidité.

(*) Texte reçu le 14 janvier 1993, révisé le 15 février 1993.
R. MICHEL, Université d'Avignon, Faculté des Sciences, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon, France.
Classification AMS : 53C22.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/435/\$ 5.00

De façon plus précise on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Soient g_0 et g_1 deux métriques de classe C^∞ (resp. analytiques) définies sur un ouvert Θ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\widehat{AB}$ un arc de courbe de classe C^1 plongé dans Θ d'extrémités A et B ; on suppose que pour tout $i \in \{0,1\}$, pour tous $u, v \in \widehat{AB}$, il existe une unique géodésique γ_{uv}^i relative à la métrique g_i, $\gamma_{uv}^i : [0,1] \to \Theta$, telle que*

$$\gamma_{uv}^i(0) = u, \quad \gamma_{uv}^i(1) = v, \quad \gamma_{uv}^i(]0,1[) \cap \widehat{AB} = \emptyset,$$

et, si dist_i désigne la distance relative à g_i, $\mathrm{dist}_0(u,v) = \mathrm{dist}_1(u,v)$.

Alors il existe un difféomorphisme C^∞ (resp. analytique) $\delta : \Theta_0' \to \Theta_1'$ avec Θ_0' et Θ_1' ouverts tels que $\widehat{AB} \subset \Theta_0' \subset \Theta$, $\widehat{AB} \subset \Theta_1' \subset \Theta$, qui est l'identité sur $\widehat{AB}$, et tel que les métriques $\delta^* g_1$ et g_0 ont le même jet à l'ordre infini en tout point de $\widehat{AB}$ (respectivement $\delta^* g_1 = g_0$, c'est-à-dire g_0 et g_1 sont isométriques).

D'après le théorème d'existence des voisinages convexes on peut localiser l'ouvert Θ en sorte que l'hypothèse d'unicité des géodésiques y soit réalisée pour g_0 et g_1. Par ailleurs, dans cette situation, si l'arc $\widehat{AB}$ est strictement convexe relativement à g_0 il l'est aussi relativement à g_1 : ceci se voit aisément puisque chaque distance est réalisée comme longueur d'une unique géodésique.

Ainsi le résultat de rigidité obtenu est optimal sous les hypothèses d'analyticité.

Ceci incite à conjecturer aussi cette rigidité si les hypothèses de régularité sont C^k (avec $k \geq 2$), dans le cas d'un disque convexe; dans la suite certains arguments ou remarques sont mis en évidence au passage avec cet objectif.

La démonstration du théorème utilise de façon essentielle des résultats obtenus dans [3] qui permettent de décrire les deux métriques dans un *même* système de coordonnées polaires.

2. Mise en situation normalisée des deux métriques

- Soit Θ_0 (resp. Θ_1) l'ouvert dont le bord est $\widehat{AB} \cup \gamma_{AB}^0$ (resp. $\widehat{AB} \cup \gamma_{AB}^1$).
- Notons $\exp_0$ et $\exp_1$ les applications exponentielles au point A.
- Soient ν_0 et ν_1 les vecteurs unitaires normaux principaux en A à $\widehat{AB}$.
- Soit $\phi : T_A(\Theta) \to T_A(\Theta)$ l'application linéaire qui est l'identité sur $T_A\widehat{AB}$ et telle que $\phi(\nu_0) = \nu_1$.

On a établi en [3] les faits suivants : le difféomorphisme

$$\delta = \exp_1 \circ \ \phi \circ \exp_0^{-1}$$

défini sur un voisinage Θ_0' de Θ_0 est tel que $\delta(\overline{\Theta_0}) = \overline{\Theta_1}$ et il se réduit à l'identité sur $\widehat{AB}$.

- Posons $\delta^* g_1 = g$; alors g et g_0 coïncident en tout point de $\widehat{AB}$.
- Posons

$$\begin{cases} \exp_0^{-1}(\Theta_0) = \exp^{-1}(\Theta_0) = \Omega, \\ \exp_0^{-1}(\widehat{AB}) = \exp^{-1}(\widehat{AB}) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{OP}. \end{cases}$$

Alors $\exp_0$ et $\exp$ coïncident dans un voisinage de Ω.

- Si l'on pose

$$r_0 = \exp^* g_0, \quad r = \exp^* g,$$

les géodésiques issues de 0 coïncident dans les deux métriques et on a le même système de coordonnées polaires (r, θ) tel que

$$\begin{cases} r_0 = \mathrm{d}t^2 + G_0 \,\mathrm{d}\theta^2, \\ r = \mathrm{d}t^2 + G \,\mathrm{d}\theta^2, \end{cases}$$

et les fonctions G_0 et G coïncident sur Γ à l'ordre 2.

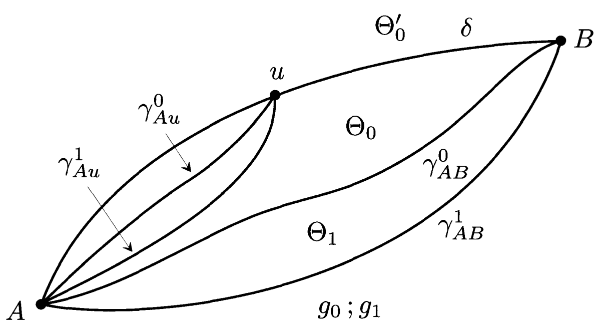

Figure 1

On prouve ci-après que G_0 et G ont le même jet à l'ordre infini sur Γ.

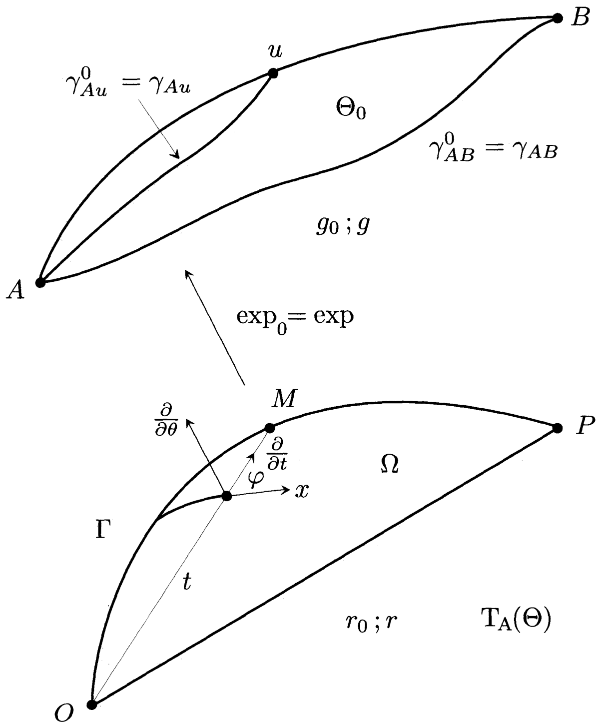

Figure 2 (au-dessus). *Figure 3 (au-dessous)*

3. Quelques calculs dans les submersions sur les géodésiques

3.1. Notations dans les fibrés unitaires.

Notons U_0 et U les fibrés unitaires relatifs à r_0 et r sur un voisinage de Ω ; notons $\widehat{MN}$ un arc inclus dans Γ. Alors $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$ s'identifie à l'ensemble des arcs géodésiques dont l'origine et l'extrémité sont sur $\widehat{MN}$ relativement aux métriques r ou r_0 ; ces arcs sont inclus dans Ω. Soit p (resp. p_0) la projection de U (resp.U_0) associant à un vecteur unitaire x l'arc géodésique tangent à x et relatif à r (resp. à r_0). Appelons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_0$) l'ensemble saturé par p (resp. p_0) de $\widehat{MN} \times \widehat{MN}$:

$$\mathcal{A} = p^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}), \quad \mathcal{A}_0 = p_0^{-1}(\widehat{MN} \times \widehat{MN}).$$

Considérons les notations suivantes : soient $R \in \Omega$ et $Q \in \Gamma$. Soit γ_0 (resp. γ) l'arc de géodésique QR relatif à r_0 (resp. r) paramétré par la longueur d'arc ℓ_0 (resp. ℓ).

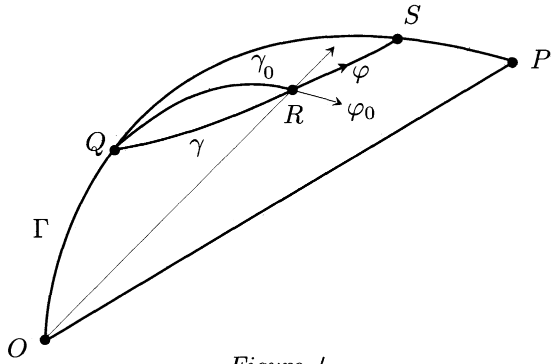

Figure 4

Si $Q \in \Gamma$ est fixé et R variable dans un voisinage Ω' de Ω, on considère les fonctions $\ell, \ell_0 : \Omega' \to R^+$ telles que :

$$\ell_0(R) = \mathrm{dist}_0(Q, R), \quad \ell(R) = \mathrm{dist}(Q, R).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_0\, \ell_0 &= \cos\varphi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial}{\partial\theta} = \gamma_0'(\ell_0), \\ \mathrm{grad}\, \ell &= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial\theta} = \gamma'(\ell). \end{aligned}$$

Relativement aux coordonnées (θ, t, φ_0), (θ, t, φ) respectives dans U_0 et U la forme de Liouville s'écrit :

$$\lambda_0 = \cos\varphi_0 \,\mathrm{d}t + \sqrt{G_0} \sin\varphi_0 \,\mathrm{d}\theta, \quad \lambda = \cos\varphi \,\mathrm{d}t + \sqrt{G} \sin\varphi \,\mathrm{d}\theta,$$

et les formes volumes et mesures sur U_0 et U :

$$\begin{gathered} \lambda_0 \wedge d\lambda_0 = \sqrt{G_0}\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{dt} \wedge \mathrm{d}\varphi_0, \quad \lambda \wedge \mathrm{d}\lambda = \sqrt{\mathrm{G}}\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{dt} \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ \mu_0 = |\lambda_0 \wedge \mathrm{d}\lambda_0|, \quad \mu = |\lambda \wedge \mathrm{d}\lambda|. \end{gathered}$$

3.2.. — Le calcul qui suit est inspiré d'une idée de [2]. On écrit :

$$\iiint_{\mathcal{A}} \big(1 - \cos(\varphi - \varphi_0)\big) \cdot \mu \geq 0. \tag{3.2.1}$$

En développant $E = \displaystyle\iiint_{\mathcal{A}} \cos(\varphi - \varphi_0) \cdot \mu$, il vient :

$$E = \iiint_{\mathcal{A}} \Big\{ \cos\varphi \cos\varphi_0 + G_0 \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{G_0}} - G_0 \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}} \frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{G_0}} + \sin\varphi \sin\varphi_0 \Big\} \mu.$$

On a alors :

$$\cos\varphi\cos\varphi_0 + G_0\frac{\sin\varphi}{\sqrt{G}}\frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{G_0}} = r_0(\operatorname{grad}\ell, \operatorname{grad}_0\ell_0) = \mathrm{d}\ell_0(\operatorname{grad}\ell).$$

On évalue $\iiint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\ell_0(\operatorname{grad}\,\ell)\mu$ par le théorème de Fubini adapté à la submersion : $\mathcal{A} \to \widehat{MN} \times \widehat{MN}$ à fibres géodésiques : ceci est classique puisque la forme $\mathrm{d}\lambda$ «descend» sur l'espace des géodésiques, vu comme ensemble de vecteurs unitaires aux points de $\widehat{MN}$, suivant une forme volume que l'on note ω ; voir [8], [9] ou [10], [11].

On a ainsi :

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}\ell_0(\operatorname{grad}\,\ell)\mu &= \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \Big[\int_\gamma \mathrm{d}\ell_0(\operatorname{grad}\,\ell)\,\mathrm{d}\ell\Big]\omega \\ &= \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \Big[\int_\gamma \mathrm{d}\ell_0(\gamma'(\ell))\,\mathrm{d}\ell\Big]\omega \\ &= \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \ell_0(S)\omega = \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \ell(S)\omega\end{aligned}$$

On a ici utilisé notre hypothèse basique : pour tout $Q \in \widehat{MN}$, on a $\ell(S) = \ell_0(S)$ (voir Fig.4). On a aussi :

$$\iiint_{\mathcal{A}} \mu = \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \Big[\int_\gamma \mathrm{d}\ell\Big]\omega = \iint_{\widehat{MN}\times\widehat{MN}} \ell(S)\omega.$$

En tenant compte des calculs ci-dessus dans 3.2.1, on déduit :

$$\iiint_{\mathcal{A}} \sin\varphi\sin\varphi_0\Big(\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G}} - 1\Big)\mu \geq 0. \tag{3.2.2}$$

3.3. — Appelons π_0 (resp. π) la projection naturelle de U_0 (resp.U) sur un voisinage de Ω. Posons $B = \pi(\mathcal{A})$; alors $\mathring{B}$ est l'ouvert borné ayant pour bord $\widehat{MN} \cup \gamma_{\widehat{MN}}$

Puisque $\mu = \sqrt{G}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, le théorème de Fubini dans cette fibration donne alors,

$$\begin{aligned}&\iiint_{\mathcal{A}} \sin\varphi\sin\varphi_0\Big(\frac{\sqrt{G_0}}{\sqrt{G}} - 1\Big)\mu \\ &\quad= \iint_B (\sqrt{G_0} - \sqrt{G})\Big\{\int_{\pi^{-1}(\theta,t)} \sin\varphi\sin\varphi_0\,\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta\Big\} \geq 0.\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

4. Fin de la preuve du théorème

LEMME 4.1. — *Dans tout ouvert $\mathcal{B}$ qui coupe Γ la différence $G - G_0$ s'annule en changeant de signe sur $\mathcal{B} \cap \Omega$ (et identiquement sur Γ)*

Remarquons d'abord qu'avec les notations précédentes on a toujours $\sin\varphi \sin\varphi_0 > 0$ et $\sin\varphi \sin\varphi_0 = 0$ équivaut à $\varphi = \varphi_0 = 0$ ou $\varphi = \varphi_0 = \pi$. En effet, d'après les hypothèses de convexité, la géodésique γ, par exemple, ne peut recouper OR qui est une géodésique pour les deux métriques.

Soit donc $S \in \mathcal{B} \cap \Gamma$ et soit $B(S, \rho)$ une boule géodésique pour la métrique r incluse dans l'ouvert $\mathcal{B}$: par convexité locale il existe M et N dans Γ tels que l'ouvert B dont le bord est $\widehat{MN} \cup \gamma_{\widehat{MN}}$ est inclus dans $B(S, \rho) \cap \Omega$.

D'après (3.3.1) on ne peut avoir $G > G_0$ partout sur B, donc sur $\mathcal{B} \cap \Omega$.

Par raison de symétrie entre G et G_0, $G - G_0$ doit s'annuler en changeant de signe sur $\mathcal{B} \cap \Omega$ ou s'annuler identiquement.

PROPOSITION 4.2. — *La différence $G - G_0$ s'annule à l'ordre infini sur Γ et, pour tout multi-entier α, $\partial^\alpha(G - G_0)$ s'annule hors de Γ dans tout ouvert coupant Γ.*

On vérifie par récurrence sur l'ordre de α le fait suivant : $\partial^\alpha(G - G_0)$ s'annule hors de Γ dans tout ouvert coupant Γ (et donc aussi, par continuité, sur Γ). En effet ceci est vrai pour $G - G_0$ d'après le LEMME 4.1 ; et la récurrence est directe par application du théorème de Rolle.

4.3. Retour aux métriques initiales.

Les métriques initiales g_0 et g_1 sont C^∞ (resp. analytiques) ; il en est de même de leurs applications exponentielles et donc de la métrique g et des métriques r et r_0.

Puisque $r = \exp^* g$ et $r_0 = \exp^* g_0$ ont, d'après la PROPOSITION 4.2, le même jet à l'ordre infini sur Γ, (resp. coïncident sur Ω dans le cas analytique), g et g_0 ont le même jet à l'ordre infini sur $\widehat{AB}$ (resp. coïncident sur $\Theta_0' \supset \Theta_0$). Puisque $\delta^* g_1 = g$ avec δ de classe C^∞ (resp. analytique) il en résulte que $\delta^* g_1$ et g_0 ont le même jet à l'ordre infini sur $\widehat{AB}$ (resp. $\delta^* g_1 = g_0$ sur Θ_0').

5. Une remarque en vue du problème global (hypothèses C^k, $k \geq 2$)

Considérons une géodésique $\mathfrak{c}$ commune aux deux métriques r et r_0 et définie par $\theta = \theta_0$. On voit que l'on peut, de la même façon, appliquer le raisonnement d'intégration du paragraphe 3 à un ensemble de géodésiques voisines de $\mathfrak{c}$. On obtient alors comme en 4.1 le fait suivant : dans tout ouvert contenant $\mathfrak{c}$, la différence $G - G_0$ s'annule en changeant de signe, et elle s'annule aussi sur $\mathfrak{c} \cap \Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ROMANOV (R.G.). — *On the uniqueness of the definition of an isotropic Riemannian metric inside a domain in terms of the distances between points of the boundary*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, t. **218**, 2, 1974, p. 295–297.

[2] MUHOMETOV (R.G.). — *The problem of recovery of a two dimensional Riemannian metric and integral geometry*, Soviet Math. Dokl., t. **18**, 1977, p. 27–31.

[3] MICHEL (R.). — *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*, Invent. Math., t. **65**, 1981, p. 71–83.

[4] GROMOV (M.). — *Filling Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., t. **18**, 1983, p. 1–147.

[5] CROKE (C.B.). — *Rigidity and the distance between boundary points*, J. Differential Geom., t. **33**, 1991, p. 445–464.

[6] OTAL (J.P.). — *Sur les longueur des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comment. Math. Helv., t. **65**, 1990, p. 334–347.

[7] GERVER (M.) et NADIRASHVILI (N.). — *An isometricity condition for Riemannian metrics on a disk*, Soviet Math. Dokl., t. **29**, 1984, p. 199–203.

[8] SANTALO (L.). — *Integral Geometry and Geometric Probability.* — Addison Wesley, 1976.

[9] MICHEL (R.). — *Sur quelques problèmes de Géométrie Globale des Géodésiques*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. **9**, 2, 1978, p. 19–38.

[10] BERGER (M.). — *Lectures on Geodesics in Riemannian Geometry.* — Tata Institute of Fondamental Research, Bombay, 1965.

[11] BESSE (A.L.). — *Manifolds all of whose Geodesics are closed.* — Ergebnisse der Math., Springer Verlag, 1978.