MICHEL EMSALEM

# Familles de revêtements de la droite projective

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 123, nº 1 (1995), p. 47-85
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_1_47_0>

*Bull. Soc. math. France,*
123, 1995, p. 47–85.

# FAMILLES DE REVÊTEMENTS DE LA DROITE PROJECTIVE

PAR

MICHEL EMSALEM (*)

RÉSUMÉ. — La première partie de cet article (§§ 1–6) est consacrée à la construction rigoureuse des espaces de Hurwitz, en utilisant des outils classiques de topologie algébrique (action du groupoïde fondamental, fibrations, suites exactes d'homotopie). Ces espaces — introduits par M. Fried [Fr] — paramètrent les classes d'isomorphismes de revêtements avec certaines données de ramification ou bien de $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$. La seconde partie (§ 7) est consacrée à la situation algébrique et en particulier à la question du corps de définition des revêtements. On y donne une démonstration nouvelle par certains aspects d'un théorème de Fried et Völklein [Fr-Völ] qui assure que les espaces de Hurwitz introduits sont définissables sur $\mathbb{Q}$ (théorème 9). On rappelle enfin, comme application que la solution de la version régulière du problème inverse de Galois sur $\mathbb{Q}(T)$ est équivalente à la preuve de l'existence de points rationnels sur $\mathbb{Q}$ sur les espaces de Hurwitz des $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$.

ABSTRACT. — The first part of this article (§§ 1-6) is devoted to a rigorous construction of the Hurwitz spaces, using classical tools of algebraic topology (action of the fundamental group, fibrations, exact sequence of homotopy). Those spaces introduced by Fried [Fr], parametrize the isomorphism classes of coverings with certain data of ramification or of $G$-coverings of $\mathbb{P}_1$. The second part (§ 7) is devoted to the algebraic situation, in particular to the question of field of definition of coverings. A new proof (in some aspects) is given of a theorem of Fried and Völklein [Fr-Völ] which asserts that these Hurwitz spaces are defined over $\mathbb{Q}$ (théorème 9). As an application one recalls that the solution of the regular version of the inverse Galois problem over $\mathbb{Q}(T)$ is equivalent to the proof of the existence of rational points on the Hurwitz spaces parametrizing the $G$-coverings of $\mathbb{P}_1$.

L'auteur tient à remercier particulièrement le referee, dont les nombreuses corrections et suggestions ont permis d'améliorer beaucoup ce texte.

(*) Texte reçu le 19 mars 1993, révisé le 24 janvier 1994.
M. EMSALEM, UFR de Mathématiques, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France).
Email : emsalem@gat.univ-lille1.fr.
Classification AMS : 11G30, 11G35, 12F12, 14D20, 14D22, 14H10, 14H30.

## 0. Introduction

La théorie des déformations de revêtements de la droite projective ramifiés en $r$ points, lorsque les points de ramification bougent, remonte à HURWITZ [Hur]. C'est M. FRIED [Fr] qui a introduit la notion d'espaces de Hurwitz. Ces espaces sont des espaces de modules qui paramètrent les revêtements de la droite projective $\mathbb{P}_1$ quand on fixe certains invariants, par exemple le groupe de monodromie.

Le but de ce texte est double. D'une part d'expliquer de façon rigoureuse la construction topologique de ces espaces de Hurwitz comme revêtements de $\mathbb{P}_1^r/S_r$ non ramifiés hors du lieu discriminant, en utilisant le langage des catégories, l'action du groupoïde fondamental, la théorie générale des fibrations et — entre autres — d'expliquer l'action de monodromie du groupe des tresses. D'autre part, en introduisant des espaces de Hurwitz pour les revêtements pointés (afin de rigidifier la situation), de construire des familles « restreintes » au-dessus d'ouverts des espaces de Hurwitz, même dans le cas où le groupe des automorphismes des revêtements paramétrés n'est pas trivial (dans ce cas il ne peut exister d'espace de modules fin, i.e. de famille universelle au dessus de l'espace de Hurwitz tout entier). Le même travail est conduit pour les $G$-revêtements (i.e. les revêtements galoisiens de groupe de Galois isomorphe à un groupe fixé $G$ donnés avec leurs automorphismes).

La démarche adoptée ici diffère de celle de FRIED et VÖLKLEIN [Fr-Völ]. Pour démontrer leur théorème principal, à savoir que l'espace de Hurwitz des $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points est une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$, ces auteurs se ramènent au cas de $G$-revêtements sans automorphismes, grâce à un argument de dévissage de théorie des groupes — argument qui n'a pas, à ma connaissance d'interprétation géométrique. On considère ici au contraire, sans hypothèse sur le groupe des automorphismes, pour tout $a_0$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ des familles restreintes de $G$-revêtements pointés au dessus de $a_0$. On utilise la propriété universelle de l'espace de Hurwitz $\underline{H}_0$ qui paramètre les $G$-revêtements pour obtenir (en faisant varier $a_0$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$) des morphismes $\omega_\tau$ de $\underline{H}_0^\tau$ dans $\underline{H}_0$ qui satisfont le critère de descente de Weil, ce qui permet de montrer que $\underline{H}_0$ est définissable sur $\mathbb{Q}$.

On rappelle enfin — comme application — le théorème de Fried et Völklein, qui ramène la solution du problème de Galois inverse (version régulière sur $\mathbb{Q}(T)$) à l'existence de points rationnels sur les espaces de Hurwitz paramétrant les $G$-revêtements.

NOTATIONS

• $\pi_1(X, x_0)$ désigne le groupe fondamental de l'espace topologique $X$ pointé en $x_0$.

• $\widetilde{\pi}(X)$ désigne le groupoïde fondamental de l'espace topologique $X$, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les points de l'espace $X$ et dont les flèches sont les classes d'homotopie à extrémités fixes de chemins allant d'un point à un autre. Si $\gamma$ et $\gamma'$ sont deux telles classes d'homotopie de chemins allant de $x$ à $x'$ et de $x'$ à $x''$ respectivement, on notera $\gamma' \cdot \gamma$ la composée des deux classes (on parcourt d'abord $\gamma$ puis $\gamma'$).

• Si $X$ est un ensemble et $r$ un entier supérieur ou égal à 3, on notera $X^{*r}$ l'ensemble des $r$-uplets de points distincts deux à deux de $X$.

• Si $U_1, \ldots, U_r$ sont des parties disjointes de $X$, on notera $U$ le produit $U_1 \times \cdots \times U_r$ et $\{\underline{U}\}$ l'ensemble $\{U_1, \ldots, U_r\}$.

• Si $a_1, \ldots, a_r$ sont des points distincts de $X$, on notera $\underline{a}$ le $r$-uplet $(a_1, \ldots, a_r)$ et $\{\underline{a}\}$ l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_r\}$.

• $\mathbb{P}_1$ désignera la droite projective vue comme variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ l'espace des points complexes de $\mathbb{P}_1$.

• $\mathbb{P}_1^{*r}$ désignera la sous-variété de $\mathbb{P}_1^r$ définie par les conditions $x_i \neq x_j$ pour $1 \leq i < j \leq r$.

## 1. Différentes descriptions d'un revêtement topologique

Soit $X$ un espace topologique localement connexe par arcs localement simplement connexe (i.e. tout point admet une base de voisinages ouverts connexes par arcs simplement connexes). On définit trois catégories associées à $X$.

1.1. *La catégorie* **REV**.

C'est celle dont les objets sont les revêtements topologiques de $X$ et dont les flèches sont les morphismes de revêtements au-dessus de $X$.

1.2. *La catégorie* $\mathfrak{C}$.

C'est la catégorie dont les objets sont les foncteurs covariants de $\widetilde{\Pi}(X)$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles et dont les morphismes sont les morphismes fonctoriels.

1.3. *La catégorie* $\mathfrak{D}$.

Les objets sont les couples $(Y,p)$ formés d'un ensemble $Y$ et d'une application $p$ de $Y$ sur $X$, munis de la donnée pour tout ouvert simplement connexe $U$ de $X$ et tous éléments $x$ et $x'$ de $U$ d'une bijection

$$\theta^{Y,U}_{x',x} : p^{-1}(x) \longrightarrow p^{-1}(x')$$

vérifiant les conditions :

(a) $\theta^{Y,U}_{x'',x} = \theta^{Y,U}_{x'',x} \circ \theta^{Y,U}_{x',x}$ pour tous $x, x', x'' \in U$ ;

(b) $\theta^{Y,U}_{x',x} = \theta^{Y,V}_{x',x}$ pour tous ouverts simplement connexes $U, V$ tels que $V$ soit contenu dans $U$, et pour tous $x, x'$ appartenant à $V$ ;

Les morphismes entre deux objets $(Y, p, \theta^{Y,\bullet}_{\bullet,\bullet})$ et $(Z, q, \theta^{Y,\bullet}_{\bullet,\bullet})$ sont les applications $\phi$ de $Y$ dans $Z$ qui vérifient :

(c) $q \circ p = \phi$ ;

(d) $\phi \circ \theta^{Y,U}_{x',x} = \theta^{Z,U}_{x',x} \circ \psi$ pour tout ouvert simplement connexe $U$ et pour tous $x, x'$ appartenant à $U$.

Nous allons construire entre ces catégories des foncteurs dont nous vérifierons qu'ils sont des équivalences de catégories. Ainsi un revêtement topologique de $X$ pourra être vu indifféremment comme un objet d'une de ces trois catégories. La catégorie $\mathfrak{D}$ — malgré sa complication apparente — sera bien adaptée pour construire les familles et espaces des modules de revêtements de $\mathbb{P}_1$ qui seront eux mêmes des revêtements de $\mathbb{P}_1^{*r}$ ou de $\mathbb{P}_1^{*r+1}$.

1.4. *Le foncteur* $F : \mathbf{REV} \to \mathfrak{C}$.

Soit $p : Y \to X$ un revêtement. Associons-lui le foncteur $\Phi_p$ de $\widetilde{\Pi}(X)$ dans la catégorie $\mathfrak{E}$ des ensembles, défini sur les objets par

$$\forall x \in X, \quad \Phi_p(x) = p^{-1}(x)$$

et sur les flèches par : pour tous $x, x' \in X$ et tout $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\pi}(X)}(x, x')$, $\Phi_p(\gamma)$ est la bijection de $p^{-1}(x)$ dans $p^{-1}(x')$ définie de la façon suivante. Au point $y$ de $p^{-1}(x)$, $\Phi_p(\gamma)$ fait correspondre l'extrémité d'un chemin de $Y$ relevant $\gamma$ et d'origine $y$.

Si $\varphi$ est un morphisme entre deux revêtments $(Y,p)$ et $(Z,q)$ au-dessus de $X$, alors $\varphi$ induit pour tout élément $x$ de $X$ une application entre les fibres $p^{-1}(x) = \Phi_p(x)$ et $q^{-1}(x) = \Phi_q(x)$ et l'on vérifie immédiatement que cette application est un morphisme entre les foncteurs.

1.5. *Le foncteur* $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$.

Introduisons une notation : si $U$ est un ouvert simplement connexe de $X$ et si $x$ et $x'$ sont des points de $U$, notons $[x, x']_U$ l'unique classe d'homotopie dans $X$ de chemins allant de $x$ à $x'$ et à valeurs dans $U$. Soit $\Phi$ un objet de $\mathfrak{C}$. Posons

$$Y = \coprod_{x \in X} \Phi(x)$$

et soit $p$ l'application qui à l'élément $y$ de $Y$ fait correspondre l'élément $x$ de $X$ tel que $y \in \Phi(x)$. Si $U$ est un ouvert simplement connexe de $X$, nous poserons

$$\theta_{x',x}^{Y,U} = \Phi([x,x']_U).$$

La relation (a) est évidente.

Soit $\phi$ un morphisme entre les foncteurs $\Phi$ et $\Psi$, où $\Phi$ et $\Psi$ sont des objets de $\mathfrak{C}$, si $Y = \coprod_{x \in X} \Phi(x)$ et $Z = \coprod_{x \in X} \Psi(x)$, notons (par abus) $\phi : Y \to Y$ l'application définie par :

$$\forall x \in X,\ \forall y \in \Phi(x), \quad \phi(y) = \phi_x(y) \in \Psi(x),$$

où $\phi_x : \Phi(x) \to \Psi(x)$ provient de $\phi$. La relation (d) est évidente, et la relation (c) provient de la fonctorialité de $\phi$. Enfin, si $V$ et $U$ sont deux ouverts simplement connexes et si $V$ est contenu dans $U$, pour tous $x$ et $x'$ dans $V$, on a $[x,x']_U = [x,x']_V$ et donc $\theta_{x',x}^{Y,U} = \theta_{x',x}^{Y,V}$

1.6. *Le foncteur $H : \mathfrak{D} \to$* **REV**.

Soit $(Y,p)$, muni des applications $\theta_{\bullet,\bullet}^{Y,\bullet}$, un objet de $\mathfrak{D}$. Nous allons définir sur $Y$ une topologie qui en fait un revêtement de $X$. Soient $y \in Y$ et $x = p(y)$. Soit $U$ un voisinage ouvert simplement connexe de $x$. Posons :

$$V^U(y) = \{\theta_{x',x}^{Y,U}(y)\ ;\ x' \in U\}.$$

PROPOSITION 1. — *La famille $V^U(y)$, où $U$ décrit une base de voisinages ouverts simplement connexes de $x = p(y)$, est une base de voisinages de $y$ pour une topologie sur $Y$ qui en fait un revêtement de $X$ par $p$.*

*Démonstration.* — Soit en effet deux ouverts simplement connexes $U_1$ et $U_2$ contenant $x$ ; il existe un ouvert simplement connexe $U_3$ contenant $x$ tel que $U_1 \cap U_2 \supset U_3$. Pour tout élément $x'$ de $U_3$, on a :

$$\theta_{x',x}^{Y,U_1} = \theta_{x',x}^{Y,U_2} = \theta_{x',x}^{Y,U_3}.$$

Donc $V^{U_3}(y)$ est contenu dans $V^{U_1}(y) \cap V^{U_2}(y)$. Par ailleurs, $V^U(y)$ est un ouvert pour cette topologie : en effet si $y'$ appartient à $V^U(y)$, on a $V^U(y') = V^U(y)$. On a enfin

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in p(x)} V^U(y),$$

où $x$ est fixé dans $U$. Il en résulte que $p$ est une application continue.

On a par ailleurs les deux propriétés suivantes :

(i) Si $U$ est un ouvert simplement connexe de $X$ et si $y, y'$ sont deux éléments de $Y$ tels que $p(y)$ et $p(y')$ appartiennent à $U$, ou bien on a $V^U(y) = V^U(y')$, ou bien on a $V^U(y) \cap V^U(y') = \emptyset$.

(ii) Si $U$ et $V$ sont des ouverts simplement connexes, $V$ étant contenu dans $U$, et si $y$ et $z$ sont des éléments de $Y$ tels que $p(y)$ appartienne à $U$, $p(z)$ appartienne à $V$, et $z$ appartienne à $V^U(y)$, alors :

$$V^V(z) \subset V^U(y).$$

Il résulte de (i) que dans la formule

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{y \in p(x)} V^U(y),$$

les $V^U(y)$ .sont disjoints deux à deux. Enfin $p$, qui est une bijection de $V^U(y)$ sur $U$, est d'après (ii) une application ouverte et donc un homéomorphisme de $V^U(y)$ sur $U$. □

On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Les foncteurs $F$, $G$ et $H$ sont des équivalences de catégories et on a $H \circ G \circ F \sim \mathrm{id}$, $F \circ H \circ G \sim \mathrm{id}$ et $G \circ F \circ H \sim \mathrm{id}$, où le symbole $\sim$ désigne un isomorphisme entre foncteurs.*

*Démonstration.*

(a) $H \circ G \circ F \sim \mathrm{id}$. Partons d'un revêtement $p : Y \to X$ ; on lui associe le foncteur $\Phi_p$ décrit plus haut, puis l'élément de la catégorie $\mathfrak{D}$ dont l'ensemble sous-jacent est $Y$ muni de l'application $p$ à valeurs dans $X$. Il reste à voir que la topologie définie par $H$ sur $Y$ coïncide avec la topologie initiale de $Y$. Or ceci est clair puisque l'application $p$, dans les deux cas, est un homéomorphisme local. La vérification sur les morphismes est immédiate.

(b) $F \circ H \circ G \sim \mathrm{id}$. Soit $\Phi$ un objet de la catégorie $\mathfrak{C}$. On lui associe

$$Y = \coprod_{x \in X} \Phi(x)$$

muni de la topologie décrite dans la définition des foncteurs $G$ et $H$ et de l'application $p$ à valeurs dans $X$ qui en fait un revêtement de $X$. Il reste à vérifier que le foncteur $\Phi_p$ associé par $F$ à ce revêtement est isomorphe au foncteur initial $\Phi$. Pour ce qui est des objets c'est clair, puisque $\Phi_p(x)$ est par définition $p^{-1}(x)$, c'est-à-dire précisément $\Phi(x)$. Pour ce qui est des flèches, il faut montrer que si $\gamma$ est une classe d'homotopie à extrémités fixes de chemins dans $X$, on a $\Phi(\gamma) = \Phi_p(\gamma)$.

Montrons-le d'abord pour un chemin « petit ». Soient $U$ un ouvert simplement connexe de $X$, $x$ et $x'$ deux points de $U$ et $y$ un point de $Y$ au-dessus de $x$. Alors $\Phi_p([x,x']_U)(y)$ est l'extrémité d'un chemin relevant dans $Y$ le chemin $[x,x']_U$, et d'origine $y$. Or comme $U$ est un ouvert trivialisant pour le revêtement $p$, et que $V^U(y)$ s'envoie homéomorphiquement sur $U$ par $p$, l'extrémité en question est tout simplement $\theta^{Y,U}_{x,x'}(y)$, ce qui est $\Phi([x,x']_U)(y)$ si l'on revient à la définition du foncteur $G$. On a donc prouvé l'égalité $\Phi_p([x,x']_U) = \Phi([x,x']_U)$.

Pour passer au cas général, il suffit de recouvrir l'image d'un représentant d'une classe d'homotopie $\gamma$ de chemins par un nombre fini d'ouverts simplement connexes $U$ et de le décomposer en un produit de « petits » chemins du type $[x,x']_U$. Ici encore, la vérification sur les morphismes est immédiate.

(c) $G \circ F \circ H \sim \mathrm{id}$. Partons d'un élément de la catégorie $\mathfrak{D}$, soit $p: Y \to X$ muni d'applications $\theta^{Y,\bullet}_{\bullet,\bullet}$. Le foncteur $H$ en fait un revêtement topologique ; $F$ lui associe un foncteur $\Phi_p$ ; $G$ définit alors un élément de $\mathfrak{D}$ :

- comme ensemble, c'est $\coprod_{x\in X} \Phi_p(x) = Y$ ;
- appelons $\omega^{Y,\bullet}_{\bullet,\bullet}$ les bijections qui lui sont associées .

Si $U$ est un ouvert simplement connexe de $X$ et si $x$ et $x'$ sont des éléments de $U$, on a :

$$\omega^{Y,U}_{x,x'} = \Phi_p([x,x']_U).$$

Comme dans le point précédent, si $y$ appartient à $p^{-1}(x)$, $\Phi_p([x,x']_U)(y)$ est l'extrémité d'un relevé de $[x,x']_U$ dont l'origine est $y$, et un tel relevé se trouve entièrement dans $V^U(y)$ ; l'extrémité en est l'unique point de $V^U(y)$ au-dessus de $x'$, à savoir $\theta^{Y,U}_{x,x'}(y)$. On a donc $\Phi_p([x,x']_U) = \theta^{Y,U}_{x,x'}$ et donc $\omega^{Y,U}_{x,x'} = \theta^{Y,U}_{x,x'}$. Ici encore, la vérification sur les morphismes ne pose pas de problème. $\square$

REMARQUE 1. — Considérons dans la catégorie $\mathfrak{C}$ le foncteur suivant $\Phi$ qui dépend du choix d'un point $x_0$ de $X$ (qu'on suppose ici connexe) : à $x$, il associe $\Phi(x) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x_0, x)$ et à l'élément $\gamma$ de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x, x')$, il associe $\Phi(\gamma)$ qui est l'application de $\Phi(x)$ vers $\Phi(x')$ qui envoie $\lambda$ sur $\gamma \cdot \lambda$. Alors $H \circ G(\Phi)$ est un revêtement universel de $X$.

Montrons-le en utilisant le langage de la catégorie $\mathfrak{C}$. La propriété universelle du revêtement universel, traduite dans le langage de la catégorie $\mathfrak{C}$ s'exprime ainsi : pour tout foncteur $\Psi$ de $\tilde{\pi}(X)$ dans $E$ (la catégorie des ensembles) et tout élément $y_0$ de $\Psi(x_0)$, il existe un unique morphisme $\phi$ de $\Phi$ dans $\Psi$ qui envoie l'élément 1 de $\Phi(x_0) = \pi_1(X, x_0)$ sur l'élément $y_0$

de $\Psi(x_0)$. Dans notre exemple, l'application $\phi$ est ainsi définie :

$$\forall \gamma \in \Phi(x) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x_0, x), \qquad \Psi(\gamma) \in \mathrm{Hom}_E\big(\psi(x_0), \psi(x)\big), \quad \phi_x(\gamma) = \Psi(\gamma)(y_0).$$

On vérifie bien que :

$$\forall x, x' \in X,\ \forall \omega \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x, x'), \quad \phi_{x'} \circ \Phi(\omega) = \Phi(\omega) \circ \phi_x$$

Soient en effet $\gamma$ un élément de $\Phi(x) = \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x_0, x)$. On a alors

$$\phi_x(\gamma) = \Psi(\gamma)(y_0),$$

$$\Phi(\omega) \circ \phi_x(\gamma) = \Psi(\omega) \circ \Psi(\gamma)(y_0) = \Psi(\omega \cdot \gamma)(y_0).$$

De l'autre côté, $\Phi(\omega)(\gamma)$ appartient à $\Phi(x')$ et on a :

$$\phi_{x'}(\Phi(\omega)(\gamma)) = \Psi(\Phi(\omega)(\gamma))(y_0) = \Psi(\omega \cdot \gamma)(y_0).$$

REMARQUE 2. — Un revêtement étant un homéomorphisme local, un revêtement d'un espace topologique localement connexe par arcs localement simplement connexe est lui même localement connexe par arcs localement simplement connexe. Les descriptions précédentes pourront donc s'appliquer à des tours de revêtements.

## 2. Définition des familles de revêtements

### 2.1. Famille de revêtements.

Soit pr : $\mathbb{P}_1^{r+1} \to \mathbb{P}_1^r$ la projection sur les $r$ premières composantes. Le groupe symétrique $S_r$ opère sur $\mathbb{P}_1^{*r+1}(\mathbb{C})$ en permutant les $r$ premières coordonnées. Nous appellerons $\mathbb{P}_1^{*r+1}(\mathbb{C})_{\mathrm{sym}}$ le quotient sous cette action.

On définit de même $\mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}$ qui va de $\mathbb{P}_1^{*r+1}(\mathbb{C})_{\mathrm{sym}}$ sur $\mathbb{P}_1^{*r}(\mathbb{C})/S_r$.

Soit $A$ un ouvert connexe de $\mathbb{P}_1^{*r}/S^r$ ; posons :

$$\Omega_{\mathrm{sym}}(A) = \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{-1}(A).$$

Dans le cas particulier où $A = (\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_0\})^{*r}/S_r$ où $a_0$ désigne un point fixe de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on notera $\Omega_{\mathrm{sym}}$ à la place de $\Omega_{\mathrm{sym}}(A)$.

DÉFINITION. — On appelle *famille* (*restreinte*) de revêtements non ramifiés hors de $r$ points la donnée d'un revêtement :

$$\pi : Y \longrightarrow \Omega_{\mathrm{sym}}(A).$$

On parlera de *famille* (tout court) lorsque $A = \mathbb{P}_1^{*r}(\mathbb{C})/S_r$.

L'application

$$u_{\text{sym}} = \text{pr}_{\text{sym}} \circ \pi$$

est un fibré de Serre [Bir]. Pour tout point $\{\underline{a}\}$ de $A$ et tout élément $y \in Y$ au-dessus de $\{\underline{a}\}$, on a une suite exacte longue d'homotopie associé à $u_{\text{sym}}$ qui se termine par :

$$\pi_1\big(A, \{\underline{a}\}\big) \xrightarrow{\delta} \pi_0\big(u_{\text{sym}}^{-1}(\{\underline{a}\}), y\big) \longrightarrow \pi_0(Y, y) \to \{1\}.$$

On a même un peu mieux. Pour tout couple de points $\{\underline{a}\}$ et $\{\underline{a}'\}$ de $A$, on a une application $\omega_{\{\underline{a}\},\{\underline{a}'\}}$ qui va de

$$\text{Hom}_{\tilde{\pi}(A)}\big(\{\underline{a}\}, \{\underline{a}'\}\big)$$

dans l'ensemble des bijections de $\pi_0(u_{\text{sym}}^{-1}(\{\underline{a}\}))$ sur $\pi_0(u_{\text{sym}}^{-1}(\{\underline{a}'\}))$. Ces applications vérifient, pour $\{\underline{a}\}$, $\{\underline{a}'\}$, $\{\underline{a}''\}$ dans $A$ et pour $\gamma$ et $\gamma'$ dans $\text{Hom}_{\tilde{\pi}(A)}$ $(\{\underline{a}\}, \{\underline{a}'\})$ et dans $\text{Hom}_{\tilde{\pi}(A)}(\{\underline{a}'\}, \{\underline{a}''\})$ :

$$\omega_{\underline{a}'',\underline{a}}(\gamma' \circ \gamma) = \omega_{\underline{a}'',\underline{a}'}(\gamma') \circ \omega_{\underline{a}',\underline{a}}(\gamma).$$

D'où un foncteur de $\tilde{\pi}(A)$ dans $E$, qui à $\{\underline{a}\}$ fait correspondre $\pi_0(u_{\text{sym}}^{-1}(\{\underline{a}\}))$ et qui à $\gamma$ fait correspondre $\omega_{\underline{a}',\underline{a}}(\gamma)$. Ce foncteur définit un revêtement $K \xrightarrow{q} A$ muni d'une application $Y \xrightarrow{p} K$ qui est une filtration de Serre, appelée dans la suite *espaces des paramètres* associé à la famille. D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xleftarrow{\text{id}} & Y \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\
K & \xleftarrow{r} & K \times_A \Omega_{\text{sym}}(A) \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\
A & \xleftarrow{\text{pr}} & \Omega_{\text{sym}}(A).
\end{array}$$

On pose :

$$\pi = s \circ t.$$

Pour chaque point $z$ de $K$, $p^{-1}(z)$ est par $\pi$ un revêtement de

$$\{q(z)\} \times \big(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q(z)\}\big),$$

espace canoniquement homéomorphe à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q(z)\}$.

On dira de ce revêtement qu'il est le *revêtement* de la famille associé au point $z$ de $K$. Il est clair par construction que le revêtement associé à tout point de l'espace des paramètres $K$ est *connexe* (la fibre de $K$ au-dessus d'un point $\{a\}$ de $A$ est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de $u_{\mathrm{sym}}^{-1}(\{a\})$).

DÉFINITION. — On dira que la famille restreinte au-dessus de $A$ est *pointée au-dessus de* $a_0$, si $A$ est contenu dans $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ et si la famille est munie d'une section continue $\sigma$ de $p$ telle que

$$\forall z \in K, \quad \pi \circ \sigma(z) = \big(q(z), a_0\big).$$

DÉFINITION. — Un *morphisme* entre deux familles

$$Y \xrightarrow{\pi} \Omega_{\mathrm{sym}}(A) \quad \text{et} \quad Z \xrightarrow{\omega} \Omega_{\mathrm{sym}}(A)$$

est une application $\mu$ de $Y$ dans $Z$ qui est un morphisme de revêtements.

Il lui est naturellement associé une application continue $\lambda$ entre les espaces de paramètres $K$ et $L$ associés, qui est un morphisme de revêtements au dessus de $A$ et telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mu} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \xrightarrow{\lambda} & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\mathrm{id}} & A. \end{array}$$

On dira que $(\lambda, \mu)$ est un *morphisme de familles pointées* si $Y$ et $Z$ sont toutes deux pointées au-dessus de $a_0$ par les sections $\sigma$ et $\tau$ et si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\mu} & Z \\ {\scriptstyle\sigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\tau} \\ K & \xrightarrow{\lambda} & L \end{array}$$

### 2.2. Familles de $G$-revêtements.

Soit $G$ un groupe fini fixé.

Définition. — Un *G-revêtement* de $\mathbb{P}_1 - \{a_1 \cdots, a_r\}$ est la donnée d'un revêtement galoisien de $\mathbb{P}_1$ et d'un anti-isomorphisme entre $G$ et le groupe des automorphismes de ce revêtement.

Soit comme précédemment $A$ un ouvert connexe de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$.

Définition. — Une *famille* (*restreinte*) de $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points est la donnée d'une famille de revêtements

$$\pi : Y \longrightarrow \Omega_{\mathrm{sym}}(A)$$

telle que le revêtement

$$t : Y \to K \times_A \Omega_{\mathrm{sym}}(A)$$

soit galoisien et d'un anti-isomorphisme entre le groupe des automorphismes de ce revêtement et $G$.

Il est clair que chaque revêtement de la famille est alors muni d'une structure de $G$-revêtement.

## 3. Déformation d'un revêtement

La notion de déformation d'une classe d'isomorphisme de revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points distincts $a_1, \dots, a_r$ lorsque les points de ramification bougent est facile à exprimer. Soit $a_0$ un point base arbitraire distinct de $a_1, \dots, a_r$ ; une telle classe s'identifie à une classe d'isomorphisme de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}; a_0)$-ensembles.

Or si $\{U_1, \dots, U_r\}$ est une famille de $r$ disques disjoints contenant respectivement $a_1, \dots, a_r$, on a un isomorphisme canonique entre

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}; a_0\big) \quad \text{et} \quad \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - U_1 \cup \cdots \cup U_r; a_0\big).$$

Donc, pour tout couple de $r$-uplets $(a_1, \dots, a_r)$ et $(a_1', \dots, a_r')$ tels que, pour tout $i$ les points $a_i$ et $a_i'$ appartiennent tous deux à $U_i$,

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}; a_0\big) \quad \text{et} \quad \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1', \dots, a_r'\}; a_0\big)$$

sont canoniquement isomorphes. Ce qui permet d'associer naturellement à une classe d'isomorphisme de revêtements non ramifiés hors de $(a_1, \dots, a_r)$ une classe d'isomorphisme de revêtements non ramifiés hors de $(a_1', \dots, a_r')$ (voir [Ful]). Nous voulons définir ici des familles, c'est-à-dire suivre au cours de la déformation les points d'un revêtement de la famille.

### 3.1. Rétraction par déformation.

Soient $X$ et $X'$ deux espaces topologiques et $f$ une application continue de $X$ dans $X'$. Nous noterons $F_f$ le foncteur associé de $\tilde{\pi}(X)$ dans $\tilde{\pi}(X')$ qui associe à l'objet $x$ l'objet $f(x)$, et à la classe d'homotopie dans $X$ de chemins $\gamma$ associe la classe d'homotopie dans $X'$ de $f \circ \gamma$.

Proposition 2. — *Soient $X'$ un espace topologique, $X$ un sous-espace et $i$ l'inclusion de $X$ dans $X'$. Si $X$ est un rétracté par déformation de $X'$, alors $F_i$ est une équivalence de catégories entre $\tilde{\pi}(X)$ et $\tilde{\pi}(X')$.*

*Démonstration.* — L'hypothèse sur $X$ et $X'$ se traduit par l'existence d'une application continue $\theta : X' \times [0,1] \to X'$, telle que :

$$\begin{cases} \theta(\cdot, 0) = \mathrm{id}_X, \\ \theta(\cdot, 1) \text{ envoie } X' \text{ dans } X, \\ \forall t \in [0,1], \quad \theta(\cdot, t) \circ i = \mathrm{id}_X\,. \end{cases}$$

(a) *$F_i$ est essentiellement surjectif.* — Soit $x'$ un élément de $X'$ ; alors $\theta(x', \cdot)$ est un chemin continu dont l'origine est $x'$ et dont l'extrémité appartient à $X$.

(b) *$F_i$ est pleinement fidèle.* — Soient $x$ et $x'$ deux points de $X$. Il faut vérifier que $F_i$ réalise une bijection de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X)}(x, x')$ sur $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X')}(x, x')$. Soit donc $\gamma$ un représentant d'un élément de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(X')}(x, x')$ ; alors $\theta(\gamma(\cdot), \cdot)$ est une homotopie dans $X'$ entre $\gamma$ (pour $t = 0$) et un chemin à valeurs dans $X$ (pour $t = 1$) et à extrémités fixes $x$ et $x'$. Ceci prouve la surjectivité de $F_i$. Soient maintenant deux chemins $\gamma$ et $\gamma'$ à valeurs dans $X$, d'origine $x$ et d'extrémité $x'$. Supposons qu'ils soient homotopes dans $X'$ et soit $H$ une homotopie à extrémités fixes à valeurs dans $X'$ entre $\gamma$ et $\gamma'$ :

$$\begin{cases} H : [0,1] \times [0,1] \to X' \text{ est continue}\,; \\ \forall u \in [0,1], \quad H(0,u) = \gamma(u), \quad H(1,u) = \gamma'(u)\,; \\ \forall t \in [0,1], \quad H(t,0) = x, \quad H(t,1) = x'. \end{cases}$$

Considérons alors $\theta(H(t,u), s)$ et faisons varier le couple $(s,t)$ le long du bord du carré $[0,1] \times [0,1]$ :

$$\begin{cases} t = 0,\ 0 \le s \le 1, & \theta\big(H(0,u), s\big) = \theta(\gamma(u), s) = \gamma(u)\,; \\ 0 \le t \le 1,\ s = 1, & \theta\big(H(t,u), 1\big) \in X \text{ et } \theta\big(H(t,0), 1\big) = x \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \theta\big(H(t,1), 1\big) = x'\,; \\ t = 1,\ 1 \ge s \ge 0, & \theta\big(H(1,u), s\big) = \theta\big(\gamma'(u), s\big) = \gamma'(u). \end{cases}$$

Les deux chemins sont donc homotopes avec extrémités fixes dans $X$. $\square$

Application. — Dans la suite, nous considérerons la situation de $r$ disques disjoints $U_1, \ldots, U_r$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Soient $(U_1, \ldots, U_r)$ et $(V_1, \ldots, V_r)$ deux tels $r$-uplets et $(a_1, \ldots, a_r)$ un $r$-uplet de points tels que :

$$\forall i,\ 1 \le i \le r, \quad a_i \in V_i \subset U_i.$$

LEMME 1. — *L'espace* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ *est un rétracté par déformation de* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (V_1 \cup \cdots \cup V_r)$ *qui est lui même un rétracté par déformation de* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \dots, a_r\}$.

D'où des foncteurs, que nous noterons $F_{\{\underline{a}\},\{\underline{U}\}}$ et $F_{\{\underline{V}\},\{\underline{U}\}}$ de

$$\tilde{\pi}\big(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r)\big) \text{ dans } \tilde{\pi}\big(\mathbb{P}_1 - (a_1, \dots, a_r)\big)$$

et de

$$\tilde{\pi}\big(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r)\big) \text{ dans } \tilde{\pi}\big(\mathbb{P}_1 - (V_1, \dots, V_r)\big),$$

qui sont des équivalences de catégories et qui vérifient en plus

$$F_{\{a\},\{U\}} = F_{\{\underline{a}\},\{\underline{V}\}} \circ F_{\{\underline{V}\},\{\underline{U}\}},$$

$$F_{\{\underline{W}\},\{\underline{U}\}} = F_{\{\underline{W}\},\{\underline{V}\}} \circ F_{\{\underline{V}\},\{\underline{U}\}}$$

où $\underline{W} = (W_1, \dots, W_r)$ est un autre $r$-uplet de disques disjoints tel que, pour tout $i$, on ait $W_i \subset V_i \subset U_i$.

Soit encore $(U_1, \dots, U_r)$ comme précédemment et deux $r$-uplets

$$(a_1, \dots, a_r), \quad (a'_1, \dots, a'_r)$$

tels que, pour tout $i$, les points $a_i$ et $a'_i$ appartiennent à $U_i$. Posons

$$\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}} = F_{\{a'\},\{U\}} \circ F_{\{a\},\{U\}}{}^{-1},$$

qui est un isomorphisme entre les catégories

$$\tilde{\pi}_{\underline{a}}\big(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r)\big) \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}_{\underline{a}'}\big(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r)\big),$$

où $\tilde{\pi}_{\underline{a}}(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r))$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r))$ et les morphismes sont ceux de $\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1 - (a_1, \dots, a_r))$.

On démontre sans difficulté les propriétés suivantes.

PROPOSITION 3. — *Soient* $(U_1, \dots, U_r)$ *et* $(V_1, \dots, V_r)$ *deux r-uplets de disques disjoints et* $(a_1, \dots, a_r)$, $(a'_1, \dots, a'_r)$, $(a''_1, \dots, a''_r)$ *trois r-uplets de points distincts tels que :*

$$\forall i, \ 1 \le i \le r, \quad a_i, a'_i, a''_i \in V_i \subset U_i.$$

*On a les propriétés suivantes :*

(i) $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}''\},\{\underline{a}\}} = \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}''\},\{\underline{a}'\}} \circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$ ;

(ii) $\theta^{\{\underline{V}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}\big|_{\tilde{\pi}_{\underline{a}}(\mathbb{P}_1 - (U_1, \dots, U_r))} = \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$.

**3.2. Espaces des modules de revêtements.**

Nous allons utiliser les outils présentés dans les paragraphes précédents pour construire un espace topologique dont les points représentent les revêtements de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ non ramifiés hors de $r$ points. Dans toute la suite de ce paragraphe, nous *fixons* un point $a_0$ (point à l'infini). Si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ est un $r$-uplet de points distincts, on désignera par $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ un sous-groupe de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}, a_0)$.

Soit $H$ l'ensemble de tous les sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}, a_0)$ lorsque $\{\underline{a}\}$ parcourt $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_0\})^{*r}/S_r$ et

$$q : H \longrightarrow \big(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_0\}\big)^{*r}/S_r$$

l'application qui à un sous-groupe $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ associe $\{\underline{a}\}$. Nous utilisons la description donnée dans la catégorie $\mathfrak{D}$ pour munir $(H, q)$ d'une structure de revêtement de $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_0\})^{*r}/S_r$, en posant :

$$\theta^{H,\underline{U}}_{\underline{a}',\underline{a}}(\Gamma_{\underline{a}}) = \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\Gamma_{\underline{a}}).$$

La Proposition 3 assure que les applications $\theta^{H,\underline{U}}_{\underline{a}',\underline{a}}$ satisfont aux axiomes de la définition de $\mathfrak{D}$. Grâce au choix de $a_0$, à un point de $H$ est associé un revêtement précis de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r)$, à savoir celui décrit par le foncteur

$$\Phi_{\Gamma_{\underline{a}}} : \tilde{\pi}\big(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r)\big) \longrightarrow E,$$

qui envoie un objet $x$ sur

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r))}(a_0, x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$$

(les classes à gauche modulo $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$) et qui envoie l'élément $\gamma$ de

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r))}(x, x')$$

sur la bijection de

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r))}(a_0, x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$$

sur

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (a_1, \dots, a_r))}(a_0, x')/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$$

qui à $\lambda$, associe $\gamma \cdot \lambda$. L'espace $H$ ainsi défini est bien sûr très gros. On s'intéressera dans la suite à des parties de taille plus raisonnable, en particulier lorsqu'on voudra algébriser la situation.

**3.3. Familles de revêtements.**

Définissons

$$X = \coprod_{\Gamma_{\{\underline{a}\}} \in H} \coprod_{x \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\cdots,a_r)} \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\ldots,a_r))}(a_0,x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}},$$

muni de l'application $\pi : X \to \Omega_{\mathrm{sym}}$ qui à un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\ldots,a_r))}(a_0,x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$$

fait correspondre le point $(\{\underline{a}\},x)$.

Si $U_1,\ldots,U_r$ et O sont $r+1$ disques disjoints, les disques $U_i$ ne contenant pas $a_0$, soit

$$\Theta^{X,\underline{U}\times O}_{(\underline{a},x),(\underline{a}',x')}$$

la bijection de $\pi^{-1}(\{\underline{a}\},x)$ dans $\pi^{-1}(\{\underline{a}'\},x')$ définie par

$$\forall\,\Gamma_{\{\underline{a}\}} \in q^{-1}\big(\{\underline{a}\}\big),\ \forall\gamma \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\ldots,a_r))}(a_0,x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}},$$
$$\Theta^{X,\underline{U}\times O}_{(\{\underline{a}\},x),(\{\underline{a}'\},x')}(\gamma) = \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}([x,x']_0\cdot\gamma).$$

(On rappelle que $[x,x']_0$ désigne l'unique classe d'homotopie de chemins dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\ldots,a_r)$ à valeurs dans O et allant de $x$ à $x'$.) Toujours grâce à la PROPOSITION 3, on vérifie les axiomes de la catégorie $\mathfrak{D}$ pour les bijections $\Theta^{X,\bullet}_{\bullet,\bullet}$. D'où une topologie sur $X$ qui en fait un revêtement de $\Omega_{\mathrm{sym}}$ par $\pi$. On a encore une application $p$ de $X$ dans $H$ qui à un élément de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})-(a_1,\ldots,a_r))}(a_0,x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ fait correspondre $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$, et qui est clairement une fibration continue. On complète le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
X & \xleftarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & X \\
{\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\
H & \xleftarrow{\quad r\quad} & H\times_{\mathbb{P}_1-\{a_0\})^{*r}/S_r}\Omega_{\mathrm{sym}} \\
{\scriptstyle q}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle s} \\
\big(\mathbb{P}_1-\{a_0\}\big)^{*r}/S_r & \xleftarrow{\quad\mathrm{pr}\quad} & \Omega_{\mathrm{sym}}\,.
\end{array}$$

On peut résumer les résultats des paragraphes 3.2 et 3.3 dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2.

(i) *Les applications* $p$, $r$ *et* pr *sont des fibrations continues*; *les applications* $q$, $s$, $t$ *et* $\pi$ *définissent des revêtements topologiques.*

(ii) *Pour tout* $\{\underline{a}\}$ *dans* $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ *et pour tout* $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ *contenu dans* $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0)$ *et élément de* $q^{-1}(\{\underline{a}\})$, *l'image réciproque* $p^{-1}(\Gamma_{\{\underline{a}\}})$ *est par* $\pi$ *le revêtement de*

$$\{\underline{a}\} \times \big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}\big)$$

(*qui est un espace canoniquement isomorphe à* $\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}$) *associé au foncteur* $\Phi_{\Gamma_{\{\underline{a}\}}}$ *défini au* § 3.2.

(iii) *L'application* $p$ *admet une section continue* $\sigma$ *qui est définie par la relation suivante* : $\sigma(\Gamma_{\{\underline{a}\}})$ *est la classe de* 1 *dans*

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0\big)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}.$$

REMARQUE. — Pour les revêtements galoisiens de la famille (c'est-à-dire ceux pour lesquels $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ est distingué dans $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r, a_0\})$, l'existence de cette section permet d'identifier le groupe de monodromie en $a_0$ et le groupe des automorphismes du revêtement $p^{-1}(\Gamma_{\{\underline{a}\}})$.

Précisons comment opère la monodromie sur les revêtements de la famille.

LEMME 2. — *L'action du groupe* $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0)$ *par monodromie sur la fibre* $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ *du revêtement* $q^{-1}(\Gamma_{\{\underline{a}\}})$ *est donnée par la multiplication à gauche.*

*Démonstration.* — Soient $\omega$ un élément de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, x)$ et $\gamma$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\})}(a_0, x)/\Gamma_{\{\underline{a}\}}$.

On décompose $\omega$ en un produit de chemins élémentaires du type $[x, x']_O$ où $O$ est un disque dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}$. Il suffit de voir comment un tel chemin élémentaire se relève à partir de $\gamma$ dans le revêtement $q^{-1}(\Gamma_{\{\underline{a}\}})$ ou — ce qui revient au même — comment le chemin dans $\Omega_{\mathrm{sym}}$ constant et égal à $\{\underline{a}\}$ sur les $r$ premières composantes et à $[x, x']_O$ sur la dernière se relève dans $X$.

On revient à la définition de $\Theta^{X, \underline{U} \times O}_{(\{\underline{a}\}, x), (\{\underline{a}'\}, x')}$ pour constater que l'extrémité de ce relevé est

$$\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}\}, \{\underline{a}\}}\big([x, x']_O \cdot \gamma\big)$$

et, comme $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}\}, \{\underline{a}\}}$ est l'identité, cette extrémité est $[x, x']_O \cdot \gamma$, qui est le produit de $\gamma$ par $[x, x']_O$ à gauche. On fait alors le produit de ces chemins élémentaires pour arriver à la conclusion. □

### 3.4. Espace des modules des classes d'isomorphismes de revêtements.

Il est facile de montrer à partir du LEMME 2 que deux revêtements associés à deux groupes $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ et $\Gamma_{\{\underline{a}'\}}$ sont isomorphes si et seulement si $\Gamma_{\{\underline{a}\}}$ et $\Gamma_{\{\underline{a}'\}}$ sont conjugués dans $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0)$. (En effet, les groupes $\Gamma_{\underline{a}}$ et $\Gamma_{\underline{a}'}$ apparaissent comme les fixateurs dans l'action de monodromie de points de la fibre de $a_0$ dans ces deux revêtements.)

Par ailleurs, si $a_0$ et $a_0'$ sont deux points bases distincts et si $\alpha$ est une classe d'homotopie de chemins allant de $a_0$ à $a_0'$ dans l'espace $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}$, on a un isomorphisme $\widetilde{\alpha}$ de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0\big) \quad \text{sur} \quad \pi_1\big(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0'\big)$$

défini par :

$$\widetilde{\alpha}(\gamma) = \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}.$$

On en déduit une bijection entre les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0)$ et les classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\}, a_0')$, bijection qui ne dépend pas du choix de $\alpha$.

Il n'y aura donc pas d'ambiguïté à parler de classes de conjugaison de sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\})$ sans spécifier de point base.

On note $H_0$ l'ensemble de ces classes de conjugaisons, le point $\{\underline{a}\}$ variant dans $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ et $q_0$ l'application de $H_0$ dans $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ qui, à une classe d'isomorphisme de sous-groupes de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{a_1, \ldots, a_r\})$, fait correspondre le point $\{a_1, \ldots, a_r\}$. L'application $\theta^{H,\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$ définie au paragraphe 3.2. passe au quotient pour la relation de conjugaison et définit ainsi une bijection

$$\theta^{H_0,\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}} \quad \text{de} \quad q_0^{-1}\big(\{\underline{a}\}\big) \quad \text{sur} \quad q_0^{-1}\big(\{\underline{a}'\}\big),$$

qui satisfait aux axiomes de la catégorie $\mathfrak{D}$ et fait de $H_0$ un revêtement de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ dont les points représentent les classes d'isomorphisme de revêtements de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ non ramifiés hors de $r$ points.

### 3.5. Propriétés universelles de $H$ et de $H_0$.

Elles sont contenues dans les énoncés suivants.

THÉORÈME 3. — *La famille $X \to H$ est une famille universelle pour les revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points et pointés au-dessus de $a_0$.*

*Démonstration.* — Il s'agit de montrer que pour toute famille restreinte

$$\begin{array}{ccc}
Y & \xleftarrow{\ \mathrm{id}\ } & Y \\
{\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t'} \\
K' & \xleftarrow{\ r'\ } & K' \times_A \Omega_{\mathrm{sym}}(A) \\
{\scriptstyle q'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s'} \\
A & \xleftarrow{\ \mathrm{pr}\ } & \Omega_{\mathrm{sym}}(A)
\end{array}$$

pointée par $\sigma'$, il existe un morphisme unique $(\lambda', \mu')$ de familles pointées de $Y$ dans $X$ tel que $Y$ soit isomorphe à $\lambda'^* X$. Le choix de $\lambda'$ étant fait, l'unicité de $\mu'$ provient du fait que sur chaque revêtement $p'^{-1}(z)$ on a imposé l'image par $\mu'$ de $\sigma'(z)$ et du fait que $\mu'$ est un morphisme de revêtement. Soit $z$ un élément de $K'$ ; alors $p'^{-1}(z)$ est un revêtement de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q'(z)\}$ ; appelons $\Gamma_z$ le fixateur de $\sigma'(z)$ dans l'action de $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q'(z)\}; a_0)$ sur la fibre de $a_0$. Posons $\lambda'(z) = \Gamma_z$. Il suffit de montrer que $\lambda'$ est continue. Posons $\{\underline{a}\} = q'(z)$ et soit $U_1, \cdots, U_r, O$ des disques disjoints contenant respectivement $a_1, \cdots, a_r, a_0$. Notons comme précédemment :

$$\underline{U} = U_1 \times \cdots \times U_r.$$

Si $\{\underline{a}'\}$ est un autre point de $\{\underline{U}\}$, notons

$$[\underline{a}, \underline{a}']_{\underline{U}} \quad \big(\text{resp. } [(\underline{a}, a_0), (\underline{a}', a_0)]_{\underline{U} \times O}\big)$$

l'unique classe d'homotopie dans

$$(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r} \quad \big(\text{resp. dans } \Omega_{\mathrm{sym}}\big)$$

de chemins à valeurs dans $\underline{U}$ (resp. dans $\underline{U} \times O$) et allant de $\underline{a}$ à $\underline{a}'$ (resp. de $(\underline{a}, a_0)$ à $(\underline{a}', a_0)$). Soit $\xi : \{0,1\} \to \underline{U}$ un représentant de $[\underline{a}, \underline{a}']_{\underline{U}}$ ; on peut prendre comme représentant de $[(\underline{a}, a_0), (\underline{a}', a_0)]_{\underline{U} \times O}$ le chemin $\zeta : [0,1] \to \underline{U} \times O$ défini par

$$\zeta(t) = (\xi(t), a_0).$$

Notons $\lambda : [0,1] \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$ un représentant d'un élément $\gamma$ de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, a_0)$ ; c'est aussi un représentant de l'élément $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\}, \{\underline{a}\}}(\gamma)$ de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a'_1, \cdots, a'_r\}, a_0)$. Soit $\eta_{\underline{a}}$ le chemin à valeurs dans $\Omega_{\mathrm{sym}}$ défini par $\eta_{\underline{a}}(t) = (\underline{a}, \lambda(t))$ et $\eta_{\underline{a}'}$ le chemin défini par

$\eta_{\underline{a}'}(t) = (\underline{a}', \lambda(t))$. Soit $z'$ un point de $K'$ proche de $z$ avec $\underline{a}' = q'(z)$ appartenant à $\underline{U}$ ; il est l'extrémité du relevé dans $K'$ de $\xi$ partant de $z$ et $\sigma'(z')$ est l'extrémité du relevé dans $Y$ de $\zeta$ partant de $\sigma'(z)$. Le résultat de l'action de monodromie de $\gamma$ (resp. de $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\gamma)$ est l'extrémité du relevé de $\eta_{\underline{a}}$ (resp. $\eta_{\underline{a}'}$) partant de $\sigma'(z)$ (resp. de $\sigma'(z')$). Or on vérifie facilement la propriété suivante.

LEMME 3. — *Les chemins $\eta_{\underline{a}'} \cdot \zeta$ et $\zeta \cdot \eta_{\underline{a}}$ sont homotopes avec extrémités fixes $(\underline{a}, a_0)$ et $(\underline{a}', a_0)$. Autrement dit, on a :*

$$\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\gamma) \cdot \left[(\underline{a}, a_0), (\underline{a}', a_0)\right]_{\underline{U}\times O} = \left[(\underline{a}, a_0), (\underline{a}', a_0)\right]_{\underline{U}\times O} \cdot \gamma.$$

Il résulte du lemme précédent que si $z'$ est proche de $z$ au sens précédent, $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\gamma) \cdot \sigma'(z')$ est proche de $\gamma \cdot \sigma'(z)$ (on note ainsi l'action de la monodromie). En particulier, $\gamma$ fixe $\sigma'(z)$ si et seulement si $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\gamma)$ fixe $\sigma'(z')$. Il s'ensuit que l'on a $\Gamma_{z'} = \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}(\Gamma_z)$, ce qui montre la continuité de $\lambda'$. La continuité de $\mu'$ résulte elle aussi facilement du LEMME 3. $\square$

THÉORÈME 4. — *L'espace $H_0$ est un espace des modules grossier pour les classes d'isomorphisme de revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points.*

*Démonstration.* — On se donne une famille restreinte au-dessus de l'ouvert $A$ de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ de revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points, soit :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "t'"] \\
K' \arrow[d, "q'"'] & K' \times_A \Omega_{\mathrm{sym}}(A) \arrow[l, "r'"'] \arrow[d, "s'"] \\
A & \Omega_{\mathrm{sym}}(A). \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que l'application $\lambda'_0$ qui à un élément $z$ de $K'$ fait correspondre la classe de conjugaison dans $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q(z)\})$ du fixateur d'un point du revêtement $p'^{-1}(z)$ au-dessus de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) - \{q(z)\}$ par $\pi' = s' \circ t'$ dans l'action de la monodromie, est continue de $K'$ dans $H_0$

et rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} H_0 \arrow[d, "q_0"'] & K' \arrow[l, "\lambda'_0"'] \arrow[d, "q'_0"] \\ \mathbb{P}_1^{*r}/S_r & A. \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

La question étant locale, on peut supposer l'ouvert $A$ petit, par exemple un produit de disques ouverts disjoints quotienté par $S_r$,

$$A = (U_1 \times \cdots \times U_r)/S_r.$$

Soit $O$ un disque disjoint des précédents et $a_0$ un point de $O$. L'ouvert $\{\underline{U}\} \times O$ de $\Omega_{\mathrm{sym}}(A)$ est trivialisant pour $Y$ et donc $Y$ admet sur $A$ une section au dessus de $a_0$. On est alors ramené au cas d'une famille restreinte pointée au-dessus de $a_0$ et l'on peut appliquer le THÉORÈME 3. Le THÉORÈME 4 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante.

PROPOSITION 4. — *L'application $\rho$ de $H$ dans $H_0$ qui à un sous-groupe de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, a_0)$ fait correspondre sa classe de conjugaison est continue et est un morphisme de revêtements au-dessus de*

$$\big(\mathbb{P}_1 - \{a_0\}\big)^{*r}/S_r$$

*entre $H$ et $q_0^{-1}((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r)$.*

Cette proposition est claire. Il suffit de se rappeler la définition des topologies de $H$ et de $H_0$. $\square$

## 4. Action du groupe des tresses

Aux revêtements $H$ de $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ et $H_0$ de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$, et à tout point base $\{\underline{a}\}$ sont associées des actions de $\pi_1((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r, \{\underline{a}\})$ (groupe des tresses du plan) et de $\pi_1(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r, \{\underline{a}\})$ (groupe des tresses à $r$ brins de la sphère). Le but de ce paragraphe est de décrire ces actions. Considérons les deux fibrations suivantes :

$$(1)\quad \big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big) \longrightarrow \big(\Omega_{\mathrm{sym}}; (\{\underline{a}\}, a_0)\big) \longrightarrow \big((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big),$$

$$(2)\quad \big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big) \longrightarrow \big(\mathbb{P}_1^{*r+1}/S_r; (\{\underline{a}\}, a_0)\big) \longrightarrow \big(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big),$$

la flèche de droite étant la projection sur les $r$ premières composantes.

Il leur est associé deux suites longues d'homotopie :

$$
\begin{aligned}
(3)\quad 1 \to \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\} a_0\big) &\longrightarrow \pi_1\big(\Omega_{\mathrm{sym}}; (\{\underline{a}\}, a_0)\big) \\
&\longrightarrow \pi_1\big((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big) \to 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad 1 \to \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big) &\longrightarrow \pi_1\big(\mathbb{P}_1^{*r+1}/S_r; (\{\underline{a}\}, a_0)\big) \\
&\longrightarrow \pi_1\big(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big) \to 1.
\end{aligned}
$$

De plus, la première suite exacte est scindée : il existe une section $s$ qui à une tresse $\alpha$ à $r$ brins fait correspondre la tresse à $r+1$ brins qui est égale à $\alpha$ sur les $r$ premières composantes et qui est constante, égale à $a_0$ sur la dernière composante. Il s'ensuit que

$$\pi_1\big((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big)$$

agit par l'intermédiaire de $s$ par automorphisme intérieur sur

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big)$$

et cette action est fidèle [Bir]. La suite exacte (4) donne quant à elle un morphisme injectif de $\pi_1(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r; \{\underline{a}\})$ dans le groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0))$. La suite exacte (3) permet donc de définir une action du groupe des tresses du plan

$$\pi_1\big((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big)$$

sur l'ensemble des sous-groupes de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big),$$

c'est-à-dire sur la fibre de $\{\underline{a}\}$ dans $H$, à savoir $q^{-1}(\{\underline{a}\})$, et la suite exacte (4) permet de définir une action du groupe des tresses de la sphère

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big)$$

sur les classes de conjugaison de sous-groupes de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big),$$

c'est-à-dire sur la fibre $q_0^{-1}(\{\underline{a}\})$ de $\{\underline{a}\}$ dans $H_0$.

THÉORÈME 5. — *Les actions définies ci-dessus sont égales aux actions de monodromie de* $\pi_1((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\})$ *(resp.* $\pi_1(\mathbb{P}_1^{*r}/S_r; \{\underline{a}\})$*) sur les fibres* $q^{-1}(\{\underline{a}\})$ *(resp.* $q_0^{-1}(\{\underline{a}\})$*) de* $H$ *(resp.* $H_0$*) au-dessus de* $\{\underline{a}\}$.

*Démonstration.* — Il est clair que le résultat sur $H$ entraîne celui sur $H_0$. Soit donc $\alpha$ une tresse à $r$ brins, i.e. un élément de

$$\pi_1\big((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\}\big).$$

On recouvre un représentant de $s(\alpha)$ par un nombre fini d'ouverts du type $\underline{U} \times O$ (produit de disques disjoints) ; la tresse $s(\alpha)$ apparaît donc comme un produit fini de «chemins élémentaires» du type $[(\underline{a}, a_0), (\underline{a}', a_0)]_{\underline{U} \times O}$. On applique de façon itérée le LEMME 3 aux éléments $\gamma$ d'un sous-groupe $\Gamma_{\underline{a}}$ de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ ; on en déduit que l'on a

$$\alpha \cdot \gamma = s(\alpha) \cdot \gamma \cdot s(\alpha)^{-1}$$

et donc

$$\alpha \cdot \Gamma_{\underline{a}} = \Gamma_{\underline{a}}^{s(\alpha)},$$

où l'on a noté $\alpha \cdot \gamma$ l'action dans la monodromie de $\alpha$ sur $\gamma$ et où $\Gamma_{\underline{a}}^{s(\alpha)}$ désigne $s(\alpha)\ \Gamma_{\underline{a}} s(\alpha)^{-1}$.

On connaît l'action du groupe $\pi_1((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\})$ sur le groupe $\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big)$ (voir [Bir]). Ce dernier admet $r$ générateurs $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ avec l'unique relation $\gamma_1 \cdots \gamma_r = 1$. Le groupe des tresses s'identifie au groupe des automorphismes de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ vérifiant

$$\exists s \in S_r,\ \forall i,\ 1 \leq i \leq r, \quad \theta(\gamma_i) \text{ est conjugé de } \gamma_{s(i)}.$$

Dans [Bir], on trouvera une présentation du groupe des tresses par générateurs et relations.

## 5. Composantes de $H$ et de $H_0$

Soit $\phi : X \to \mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}$ un revêtement fini connexe. Soit $a_0$ un point fixé de $\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}$ ; on a un morphisme de groupes associé à ces données, d'image transitive,

$$f_{X,a_0} : \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}; a_0\big) \longrightarrow \text{ bijections de } \{\phi^{-1}(a_0)\}$$

qui décrit l'action de la monodromie. Soit maintenant $\pi : Y \to \Omega_{\text{sym}}$ une famille restreinte. A chaque revêtement $z$ de la famille est ainsi associé un morphisme $f_z$ de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{q'(z)\}; a_0)$ dans l'ensemble des bijections de $t'^{-1}(z, a_0)$. Posons $\{\underline{a}\} = q'(z)$. Soient $\alpha$ une tresse à $r$ brins, c'est-à-dire un élément de $\pi_1((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; \{\underline{a}\})$ et $s(\alpha)$ son relevé par la section $s$ définie au paragraphe 4. Alors $s(\alpha)$ agit sur la fibre de $Y$ au-dessus de $(\{\underline{a}\}, a_0)$ et induit donc une bijection de $t'^{-1}(z, a_0)$ sur $t'^{-1}(\alpha \cdot z, a_0)$, où l'on a noté $\alpha \cdot z$ l'image de $z$ dans l'action de monodromie de $\alpha$. On a alors les résultats suivants qui sont une conséquence immédiate du LEMME 3.

LEMME 4. — *Pour tout $y$ dans $t'^{-1}(z, a_0)$, pour tout élément $\gamma$ de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{q'(z)\}; a_0)$ et pour tout $\alpha$ dans $\pi_1((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r; q'(z))$, on a :*

$$s(\alpha) \cdot (\gamma \cdot y) = (\alpha \cdot \gamma) \cdot (s(\alpha) \cdot y).$$

COROLLAIRE. — *Si on note $\widetilde{\alpha}$ l'automorphisme de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{q'(z)\}; a_0)$ induit par $\alpha$ et $\widetilde{s(\alpha)}$ la bijection de $t'^{-1}(z, a_0)$ sur $t'^{-1}(\alpha \cdot z, a_0)$ induite par $s(\alpha)$, on a :*

$$f_z \circ \widetilde{\alpha}^{-1} = \widetilde{s(\alpha)} \cdot f_{\alpha \cdot z} \widetilde{s(\alpha)}.$$

Soient $\phi : X \to \mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r)$ comme précédemment un revêtement fini connexe de degré $N$ et $\{y_1, \ldots, y_N\} = \phi^{-1}(a_0)$ une numérotation des points de la fibre de $a_0$. Alors $f_{X,a_0}$ donne lieu à un morphisme encore noté $f_{X,a_0}$, d'image transitive de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \ldots, a_r\}; a_0)$ dans $S_N$ défini à conjugaison près par un élément de $S_N$.

On appellera *groupe de monodromie du revêtement en* $a_0$ l'image de $f_{X,a_0}$ vue comme sous-groupe de $S_N$. Le corollaire précédent exprime qu'il existe des numérotations des fibres $t'^{-1}(z, a_0)$ et $t'^{-1}(\alpha \cdot z, a_0)$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{q'(z)\}, a_0\big) & \xrightarrow{\ \widetilde{\alpha}\ } & \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{q'(z)\}, a_0\big) \\
{\scriptstyle f_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\alpha \cdot z}} \\
S_N & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & S_N
\end{array}$$

En particulier, le groupe de monodromie est un invariant dans chaque composante connexe de $H$. Par ailleurs, l'homomorphisme $f_z$ (à conjugaison près par un élément de $S_N$) ne dépend en fait que de la classe d'isomorphisme $\lambda_{0'}(z)$ du revêtement $p'^{-1}(z)$, ce qui permet de définir le symbole $f_{[z]}$, où $[z]$ est un élément de $H_0$. La relation du corollaire implique alors :

$$\forall\, [z] \in H_0, \quad f_{\alpha \cdot [z]} = f_{[z]} \circ \widetilde{\alpha}^{-1}.$$

DÉFINITION. — Si on se donne un groupe fini fixé $G$, un entier $N$ et une action transitive de $G \subset S_N$ sur $\{1, \dots, N\}$, donnée à équivalence près (c'est-à-dire à conjugaison près par un élément de $S_N$), nous noterons $H_G$ (resp. $H_{0,G}$) l'ensemble des éléments $z$ de $H$ (resp. l'ensemble des éléments $[z]$ de $H_0$) tels que l'action du groupe de monodromie du revêtement associé à $z$ (resp. à $[z]$) soit équivalente à la donnée de $G \subset S_N$.

D'après ce que nous venons de voir, $H_G$ (resp. $H_{0,G}$) est une union de composantes connexes de $H$ (resp. de $H_0$), ce qui en fait un revêtement fini de $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ (resp. de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$)). Si $a_1, \dots, a_r, a_0$ sont $r+1$ points distincts de $\mathbb{P}_1$, le groupe $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \dots, a_r\}; a_0)$ admet un système de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ liés par l'unique relation $\gamma_r \dots \gamma_1 = 1$. Soit $c_i(z)$ la classe de conjugaison dans $G$ de l'élément $f_z(\gamma_i)$. D'après ce qui précède, on a :

$$f_{\alpha \cdot z}(\gamma_i) = f_z\big(\widetilde{\alpha}^{-1}(\gamma_i)\big).$$

Ces classes de conjugaisons $c_i(z)$ sont donc aussi des invariants le long des composantes connexes de $H$ et de $H_0$. En particulier, le genre d'un revêtement de la famille qui se calcule, grâce à la formule de Riemann-Hurwitz, à partir de la donnée des classes $c_i(z)$, est un invariant le long des composantes connexes de $H$ et de $H_0$ (cf. [Fr]).

REMARQUE. — Le revêtement correspondant à $z$ est non ramifié au point $a_i$ si et seulement si $f_z(\gamma_i) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $c_i(z)$ est la classe de conjugaison triviale (celle de 1). Il résulte de ce qui précède que si le revêtement correspondant à $z$ (resp. la classe d'isomorphisme de revêtements correspondant à $[z]$) est effectivement ramifié en $a_1, \dots, a_r$, il en sera de même tout le long de la composante connexe de $z$ (resp. de $[z]$) dans $H$ (resp. dans $H_0$).

DÉFINITION. — Soit $G \subset S_N$ comme précédemment. Nous dirons que la famille restreinte $\pi : Y \to \Omega_{\mathrm{sym}}(A)$ est une *famille à monodromie* $G \subset S_N$ si tous les revêtements de la famille ont un groupe de monodromie isomorphe à $G$ avec une action sur la fibre équivalente à l'action donnée $G \subset S_N$.

Posons $X_G = p^{-1}(H_G)$. C'est clairement une famille à monodromie $G \subset S_N$ et l'on peut énoncer sur cette famille une propriété universelle qui est la conséquence immédiate des remarques précédentes et des THÉORÈMES 3, 4 et 5.

THÉORÈME 3′. — *La famille $X_G \to H_G$ est une famille universelle pour les revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points, pointés au-dessus de $a_0$ et à monodromie imposée $G \subset S_N$.*

THÉORÈME 4'. — *L'espace $H_{0,G}$ est un espace des modules grossiers pour les classes d'isomorphisme de revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$ points et à monodromie imposée $G \subset S_N$.*

## 6. Espaces des modules de $G$-revêtements

### 6.1. $G$-revêtements.

On rappelle la définition donnée dans le paragraphe 2.2.

DÉFINITION. — Soit $G$ un groupe fini.

- Un *$G$-revêtement* de

$$\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}$$

est la donnée d'un revêtement galoisien de groupe de Galois isomorphe à $G$ et d'un anti-isomorphisme $h$ entre le groupe d'automorphismes du revêtement et $G$.

- Un *isomorphisme* $\delta$ entre deux $G$-revêtements

$$\big(X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, h\big) \quad \text{et} \quad \big(X' \to \mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, h'\big)$$

est un isomorphisme de revêtements entre $X$ et $X'$ tel que l'isomorphisme $\tilde{\delta}$ entre $\mathrm{Aut}(X)$ et $\mathrm{Aut}(X')$ déduit de $\delta$ rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(X) & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & \mathrm{Aut}(X') \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h'} \\ G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \end{array}$$

Soit $(X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, h)$ un $G$-revêtement. La donnée d'un point base $a_0$ et d'un point $x_0$ dans la fibre de $a_0$ détermine un anti-isomorphisme entre les groupes $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)/\Gamma$ et $\mathrm{Aut}(X)$, où $\Gamma$ désigne le fixateur de $x_0$, et en composant avec $h$ un morphisme surjectif $f : \pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0) \to G$, dont le noyau est $\Gamma$. Soit $\gamma$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\})}(a_0, a_{0'})$ ; on note $\tilde{\gamma}$ l'isomorphisme entre

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big) \quad \text{et} \quad \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0'\big)$$

défini par conjugaison par $\gamma$. Définissons sur l'ensemble des homomorphismes surjectifs de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ sur $G$ (lorsque $a_0$ varie) une relation d'équivalence; si $f$ et $f'$ sont deux tels homomorphismes surjectifs, nous dirons que $f$ et $f'$ sont équivalents et nous noterons

$$f \sim f'$$

s'il existe $\gamma$ tel que $f' \circ \tilde{\gamma} = f$. On notera $[f]$ la classe d'équivalence de $f$ pour cette relation. La correspondance qui au $G$-revêtement $(X \to \mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}, h))$ associe $[f]$ ne dépend pas du choix de $a_0$ ni de celui de $x_0$ dans la fibre de $a_0$. Il est facile d'établir le résultat suivant.

PROPOSITION 5. — *La correspondance définie ci-dessus est une bijection entre les classes d'isomorphismes de $G$-revêtements et les classes d'équivalence de morphismes surjectifs de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ sur $G$.*

On peut de plus, $a_0$ étant fixé, faire correspondre dans l'autre sens à tout homomorphisme surjectif $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0) \to G$, un $G$-revêtement précis.

Posons $\Gamma_f = \mathrm{Ker}(f)$. C'est un point de $H$ et $p^{-1}(\Gamma_f) = X_f$ est un revêtement qui se trouve dans la famille $X$. La fibre de $a_0$ dans $X_f$ est $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)/\Gamma_f$. Le choix de la classe de 1 dans le quotient (que nous noterons $\bar{1}$) induit un anti-isomorphisme entre le groupe de monodromie $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)/\Gamma_f$ (agissant par multiplication à gauche sur lui-même considéré comme la fibre) et le groupe $\mathrm{Aut}(X_f)$. D'où un anti-isomorphisme entre $G$ et $\mathrm{Aut}(X_f)$ et donc une structure de $G$-revêtement sur $X_f$.

### 6.2. Espace des modules de $G$-revêtements.

Nous fixons dans ce paragraphe un point $a_0$ dans $\mathbb{P}_1$. Posons :

- $\underline{H} = \{(f, \{\underline{a}\})$ avec $f$ surjective, $f : \pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0) \to G$; $\underline{a}(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r\}$ et
- $\underline{q} : \underline{H} \to (\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ défini de façon évidente.

On a aussi une application naturelle $u : \underline{H} \to H$, qui à $f$ associe $\ker(f)$. On munit $\underline{H}$ d'une topologie qui en fait un revêtement de

$$\big(\mathbb{P}_1 - \{a_0\}\big)^{*r}/S_r.$$

Soient $\{\underline{U}\}$ un produit de disques ouverts disjoints dans $\mathbb{P}_1 - \{a_0\}$ quotienté par $S_r$ et $\{\underline{a}\}$ et $\{\underline{a}'\}$ deux points de $\{\underline{U}\}$. Alors $\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$ définit un isomorphisme de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ sur $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a'_1, \cdots, a'_r\}; a_0)$. Posons :

$$\theta^{\underline{H},\underline{U}}_{\underline{a}',\underline{a}}(f) = f \circ {\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}}^{-1}.$$

Si l'on note $\tilde{f}$ l'isomorphisme déduit de $f$ par passage au quotient par $\ker(f)$,

$$\tilde{f} : \pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big) / \ker(f) \xrightarrow{\sim} G,$$

l'action $\tilde{g}$ d'un élément $g$ de $G$ sur un point $\gamma$ de la fibre en $x$ du $G$-revêtement $X_f$ s'écrira :

$$\tilde{g}(\gamma) = \gamma \cdot \tilde{f}^{-1}(g).$$

On vérifie sans difficulté que ceci définit un objet de la catégorie $\mathfrak{D}$ et que l'application $u : \underline{H} \to H$ est continue.

### 6.3. Familles de $G$-revêtements.

Le point $a_0$ est toujours fixé. Posons :

$$\underline{X} = X \times_H \underline{H} = X_G \times_{H_G} \underline{H}.$$

Les espaces $X_G$ et $\underline{H}$ sont tous deux des revêtements de $H_G$. D'où une topologie sur $\underline{X}$ qui en fait un revêtement de $\underline{H}$ et de $X_G$. On peut d'ailleurs expliciter les bijections

$$\Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}.$$

Les éléments de $\underline{X}$ sont des couples $(\gamma, f)$, où :

$$\gamma \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\pi}(\mathbb{P}_1 - \{a_1,\ldots,a_r\})}(a_0, x) / \ker(f).$$

On a l'égalité :

$$\Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}(\gamma, f) = \big(\Theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},(\{\underline{a}\},}([x, x']_O \cdot \gamma), f \circ {\Theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}}^{-1}\big).$$

On a le diagramme commutatif suivant, où $\underline{p}$, $\underline{q}$, $\underline{r}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$ et $\underline{\pi} = \underline{s} \circ \underline{t}$ sont les flèches évidentes

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[d, "\underline{p}"'] & & \underline{X} \arrow[ll, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\underline{t}"] \\
\underline{H} \arrow[d, "\underline{q}"'] & & \underline{H} \times_{(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r} \Omega_{\mathrm{sym}} \arrow[ll, "\underline{r}"'] \arrow[d, "\underline{s}"] \\
(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r & & \Omega_{\mathrm{sym}}. \arrow[ll, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

Les applications $\underline{q}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$ et $\underline{\pi}$, définissent des revêtements. Chaque fibre $\underline{p}^{-1}(\underline{z})$, où $\underline{z}$ appartient à $\underline{H}$, est un $G$-revêtement. Donc $G$ agit sur ces fibres et donc sur $\underline{X}$ au-dessus de $\underline{H} \times_{(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r} \Omega_{\mathrm{sym}}$. Pour tout élément $g$ de $G$, notons $\tilde{g}$ cette action.

PROPOSITION 6. — *Pour tout $g \in G$, $\tilde{g}$ est continue et l'application $g \mapsto \tilde{g}$ est un isomorphisme de $G$ sur*

$$\mathrm{Aut}\big(\underline{X}/\underline{H} \times_{(\mathbb{P}_1-\{a_0\})^{*r}/S_r} \Omega_{\mathrm{sym}}\big).$$

*Démonstration.* — Comme il est clair que $\tilde{g}$ laisse fixe

$$\underline{H} \times_{(\mathbb{P}_1-\{a_0\})^{*r}} \Omega_{\mathrm{sym}}$$

et que le degré du revêtement $\underline{X}$ au-dessus de $\underline{H} \times_{(\mathbb{P}_1-\{a_0\})^{*r}} \Omega_{\mathrm{sym}}$ est égal au degré d'un revêtement quelconque de la famille, à savoir l'ordre de $G$, il suffit de démontrer que $\tilde{g}$ est continue pour tout élément $g$ de $G$. Et pour cela, de constater que l'action de $\tilde{g}$ commute aux applications

$$\Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}$$

qui définissent la topologie de $\underline{X}$ (deux points $(\gamma, f)$ et $(\gamma', f')$ de $\underline{X}$ sont proches s'ils se déduisent par une application $\Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}$ ; il s'agit de montrer qu'il en est de même de $\tilde{g}(\gamma, f)$ et de $\tilde{g}(\gamma', f')$).

Partons d'un élément $(\gamma, f)$ de $\underline{\pi}^{-1}(\underline{a}, x)$ :

$$\begin{aligned}
&\tilde{g} \circ \Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}(\gamma, f)\\
&\qquad = \tilde{g}\Big(\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}([x,x']_0\cdot\gamma), f\circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}{}^{-1}\Big)\\
&\qquad = \Big(\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}([x,x']_0\cdot\gamma)\cdot \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}(\tilde{f}^{-1}(g)), f\circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}{}^{-1}\Big)\\
&\qquad = \Big(\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}\big)\big([x,x']_0\cdot\gamma\cdot\tilde{f}^{-1}(g)\big), f\circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a},\}}{}^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

De l'autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
\Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)} \circ \tilde{g}(\gamma, f) &= \Theta^{\underline{X},\{\underline{U}\}\times O}_{(\{\underline{a}'\},x'),(\{\underline{a}\},x)}\big(\gamma\cdot\tilde{f}^{-1}(g), f\big)\\
&= \big(\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}([x,x']_0\cdot\gamma\cdot\tilde{f}^{-1}(g)), f\circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}{}^{-1}\big).
\end{aligned}$$

Il résulte de la PROPOSITION 6 que $\underline{X}$ est une famille restreinte de $G$-revêtements. □

### 6.4. Espace des classes d'isomorphismes de $G$-revêtements.

Notons $\underline{H}_0$ l'ensemble des couples $([f], \{\underline{a}\})$ formés d'un point $\{\underline{a}\}$ et d'une classe d'équivalence de morphismes surjectifs de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big)$$

sur $G$. On constate aisément que si deux tels morphismes sont équivalents au sens défini dans le paragraphe 6.1., leurs images par $\theta^{\underline{H},\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$ sont équivalentes. On en déduit donc une bijection

$$\theta^{\underline{H}_0,\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}'\},\{\underline{a}\}}$$

entre les classes d'équivalences de morphismes surjectifs de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0\big)$$

sur $G$ et les classes d'équivalences de morphismes surjectifs de

$$\pi_1\big(\mathbb{P}_1 - \{a'_1, \cdots, a'_r\}; a_0\big)$$

sur $G$. On vérifie sans difficulté qu'elles satisfont aux axiomes de définition de la catégorie $\mathfrak{D}$ et munissent ainsi $\underline{H}_0$ d'une topologie qui en fait un revêtement de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ par l'application $\underline{q}_0$ qui à une classe de morphismes surjectifs de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ sur $G$ fait correspondre le point $\{a_1, \cdots, a_r\}$ de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$.

PROPOSITION 7. — *L'application $\underline{\rho} : \underline{H} \to \underline{H}_0$, qui à un morphisme surjectif de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{a_1, \cdots, a_r\}; a_0)$ sur $G$ fait correspondre sa classe d'équivalence, est continue et est un morphisme de revêtements au-dessus de $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$ de $\underline{H}$ sur $\underline{q}_0^{-1}((\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/Sr)$. Les points de $\underline{H}_0$ sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphismes de G-revêtements non ramifiés hors de r points.*

*Démonstration.* — Il suffit de revenir à la définition des topologies sur $\underline{H}$ et $\underline{H}_0$. Le dernier point de la PROPOSITION 7 est une reformulation de la PROPOSITION 5.

### 6.5. Propriétés universelles de $\underline{H}$ et de $H_0$.

Elles sont contenues dans les énoncés suivants. Soit A un ouvert connexe de $(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r$.

THÉORÈME 6. — *Quelle que soit la famille restreinte de G-revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de r points et pointée par $\sigma'$ au dessus de $a_0$,*

$$\begin{array}{ccc}
\underline{Y}' & \xleftarrow{\ \mathrm{id}\ } & \underline{Y}' \\
{\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{t}'} \\
\underline{K}' & \xleftarrow{\ \underline{r}'\ } & \underline{K}' \times_A \Omega_{\mathrm{sym}}(A) \\
{\scriptstyle \underline{q}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{s}'} \\
A & \xleftarrow{\ \mathrm{pr}\ } & \Omega_{\mathrm{sym}}(A),
\end{array}$$

*il existe un morphisme unique* $(\underline{\lambda}', \underline{\mu}')$ *de familles pointées de revêtements de* $\underline{Y}'$ *dans* $\underline{X}$ *rendant les diagrammes suivants commutatifs*

$$\begin{tikzcd} \underline{Y}' \arrow[r, "\underline{\mu}'"] \arrow[d] & \underline{X} \arrow[d] \\ \underline{K}' \arrow[r, "\underline{\lambda}'"] \arrow[d] & \underline{H} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\mathrm{id}"] & A \end{tikzcd} \quad et \quad \begin{tikzcd} \underline{Y}' \arrow[r, "\underline{\mu}'"] & \underline{X} \\ \underline{K}' \arrow[r, "\underline{\lambda}'"] \arrow[u, "\underline{\sigma}'"] & \underline{H} \arrow[u, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

*et tels que* $\underline{Y}' \cong \underline{\lambda}'^{*}\underline{X} = \underline{X} \times_{\underline{H}} \underline{K}'$.

Si on se donne une famille restreinte de $G$-revêtements

$$\underline{Y}' \xrightarrow{\underline{\pi}'} \Omega_{\mathrm{sym}}(A)$$

comme précédemment, pour tout point $\underline{z}'$ de $\underline{K}'$ le choix d'un point $y'$ dans la fibre au-dessus de $a_0$ du revêtement $\underline{p}'^{-1}(\underline{z}')$ détermine un anti-isomorphisme entre le groupe de monodromie basé en $a_0$ de ce revêtement et le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(\underline{p}'^{-1}(\underline{z}')/\mathbb{P}_1 - \{\underline{q}'^{-1}(\underline{z}')\})$ et donc, composé avec l'anti-isomorphisme entre ce dernier et $G$ donné par la $G$-structure, un morphisme surjectif $f_{\underline{z}'}$, de $\pi_1(\mathbb{P}_1 - \{\underline{q}'(\underline{z}')\}, a_0)$ sur $G$. La classe d'équivalence de $f_{\underline{z}'}$ ne dépend pas du choix de $y'$ dans la fibre. On peut alors énoncer le théorème suivant, qui est l'analogue pour les $G$-revêtements du THÉORÈME 4.

THÉORÈME 7. — *L'espace* $\underline{H}_0$ *est un espace des modules grossiers pour les classes d'isomorphismes de* $G$*-revêtements de* $\mathbb{P}_1$ *non ramifiés hors de* $r$ *points.*

*Démonstration du théorème 6.* — La donnée de $f_{\underline{z}'}$, pour $\underline{z}'$ appartenant à $\underline{K}'$, dépend du choix d'un point $y'$ dans la fibre au-dessus de $a_0$ du revêtement $\underline{p}'^{-1}(\underline{z}')$. Choisissons $y' = \underline{\sigma}'(\underline{z}')$ et notons encore $f_{\underline{z}'}$ le morphisme associé à ce choix. L'application $\underline{\lambda}'$ est définie par

$$\underline{\lambda}'(\underline{z}') = f_{\underline{z}'}.$$

Il reste à montrer que l'application $\underline{\lambda}'$ est continue. La démonstration est parallèle à celle du THÉORÈME 3. On utilise le LEMME 3 qui entraîne que l'on a :

$$(1) \qquad \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}_2\},\{\underline{a}_1\}}(\gamma) \cdot \theta^{\underline{Y}',\underline{U}\times O}_{(\underline{a}_2,a_0),(\underline{a}_1,a_0)}\big(\underline{\sigma}'(\underline{z}'_1)\big) = \theta^{\underline{Y}',\underline{U}\times O}_{(\underline{a}_2,a_0),(\underline{a}_1,a_0)}\big(\gamma \cdot \underline{\sigma}'(\underline{z}'_1)\big).$$

Par ailleurs, la continuité de $\underline{\sigma}'$ s'exprime par la relation :

$$\theta^{\underline{Y}',\underline{U}\times O}_{(\underline{a}_2,a_0),(\underline{a}_1,a_0)}\big(\underline{\sigma}'(\underline{z}'_1)\big) = \underline{\sigma}'\big(\theta^{\underline{K}',\underline{U}}_{\underline{a}_2,\underline{a}_1}(\underline{z}'_1)\big). \tag{2}$$

La relation $g = f_{\underline{z}'_1}(\gamma)$ se traduit par :

$$\gamma \cdot \underline{\sigma}'(\underline{z}'_1) = \tilde{g} \cdot \underline{\sigma}'(\underline{z}'_1). \tag{3}$$

Les relations (1) et (3) et la continuité de $\tilde{g}$ entraînent :

$$\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}_2\},\{a_1\}}(\gamma) \cdot \theta^{\underline{Y}',\underline{U}\times O}_{(\underline{a}_2,a_0),(\underline{a}_1,a_0)}(\underline{\sigma}'(\underline{z}'_1)) = \tilde{g} \cdot \theta^{\underline{Y}',\underline{U}\times O}_{(\underline{a}_2,a_0),(\underline{a}_1,a_0)}\big(\underline{\sigma}'(\underline{z}'_1)\big). \tag{4}$$

Enfin cette dernière relation, alliée à (2), exprime que :

$$g = f_{\theta^{\underline{K}',\underline{U}}_{\underline{a}_2,\underline{a}_1}(\underline{z}'_1)}\big(\theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}_2\},\{a_1\}}(\gamma)\big). \tag{5}$$

Il vient donc

$$f_{\underline{z}'_1} = f_{\theta^{\underline{K}',\underline{U}}_{\underline{a}_2,\underline{a}_1}(\underline{z}'_1)} \circ \theta^{\{\underline{U}\}}_{\{\underline{a}_2\},\{a_1\}},$$

soit encore

$$\underline{\lambda}'\big(\theta^{\underline{K}',\underline{U}}_{\underline{a}_2,\underline{a}_1}(\underline{z}'_1)\big) = \theta^{\underline{H},\underline{U}}_{\underline{a}_2,\underline{a}_1}\big(\underline{\lambda}'(\underline{z}'_1)\big),$$

ce qui exprime la continuité de $\underline{\lambda}'$. L'unicité de $\underline{\mu}'$ est claire.

Remarque. — Le morphisme $\underline{\mu}'$ ainsi défini est un morphisme de familles pointées, mais n'est pas en général un morphisme de $G$-revêtements. Le Théorème 6 énonce une certaine propriété universelle de $\underline{X}$. Ce n'est pas néanmoins une famille universelle de $G$-revêtements.

*Démonstration du théorème 7.* — Il s'agit de montrer que pour toute famille restreinte de $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés hors de $r$

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y}' \arrow[d, "\underline{p}'"'] & \underline{Y}' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\underline{t}'"] \\
\underline{K}' \arrow[d, "\underline{q}'"'] & \underline{K}' \times_A \Omega_{\mathrm{sym}}(A) \arrow[l, "\underline{r}'"'] \arrow[d, "\underline{s}'"] \\
A & \Omega_{\mathrm{sym}}(A), \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

l'application $\underline{\lambda}'_0$ qui à un élément $\underline{z}'$ de $\underline{K}'$ fait correspondre la classe d'équivalence du morphisme $f_{\underline{z}'}$ est continue de $\underline{K}'$ dans $\underline{H}_0$ et rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \underline{H}_0 \arrow[d, "\underline{q}_0"'] & \underline{K}' \arrow[l, "\underline{\lambda}'_0"'] \arrow[d, "\underline{q}'"] \\ (\mathbb{P}_1)^{*r}/S_r & A. \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

La preuve est analogue à celle du THÉORÈME 4. On munit localement la famille $\underline{Y}'$ d'une section qui en fait localement une famille pointée de $G$-revêtements. On applique alors le THÉORÈME 6 et la PROPOSITION 7. □

## 7. Familles algébriques

On considère à partir de maintenant le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques comme plongé dans $\mathbb{C}$.

**7.1.** — Les espaces des modules et les familles définies plus haut apparaissent comme des revêtements topologiques de

$$(\mathbb{P}_1)^{*r}/S_r, \quad (\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r, \quad (\mathbb{P}_1)^{*r+1}/S_r \quad \text{ou} \quad \Omega_{\mathrm{sym}}.$$

Or ces espaces sont les ensembles de points complexes d'ouverts de Zariski de variétés algébriques à savoir $\mathbb{P}_1^r/S_r$ et $\mathbb{P}_1^{r+1}/S_r$. Le théorème de Grauert-Remmert (voir [Hart, app. B], [Grau.Rem], [Ray], [Ser1], [Ser2]) permet alors de les voir comme des revêtements algébriques de $\mathbb{P}_1^r/S_r$ et $\mathbb{P}_1^{r+1}/S_r$ définis sur $\mathbb{C}$ non ramifiés au-dessus de l'ouvert

$$(\mathbb{P}_1)^{*r}/S_r, \quad (\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r, \quad (\mathbb{P}_1)^{*r+1}/S_r \quad \text{ou} \quad \Omega_{\mathrm{sym}}.$$

Si dans les constructions précédentes, on prend $a_0$ rationnel sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, on peut d'après [Ser2] descendre le corps de définition à $\overline{\mathbb{Q}}$. Dans toute la suite, nous prendrons $a_0 \in P_1(\mathbb{Q})$, ce qui nous permet d'espérer descendre le corps de définition à $\mathbb{Q}$. Nous noterons

$$X_G^{\mathrm{alg}}, \quad H_G^{\mathrm{alg}}, \quad H_{0,G}^{\mathrm{alg}}, \quad \underline{X}^{\mathrm{alg}}, \quad H^{\mathrm{alg}}, \quad \underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$$

ces revêtements algébriques définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$. De même pour les morphismes introduits dans les paragraphes précédents.

### 7.2. Familles algébriques.

DÉFINITION. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas localement nœthériens sur un corps $k$ de caractéristique nulle. On dira qu'il définit un *revêtement algébrique* de $X$ sur $k$ si $f$ est un morphisme fini et plat au-dessus de $\mathrm{Spec}(k)$ (se reporter à [Ful] et [Gro] pour les propriétés des revêtements algébriques, en particulier pour la définition du lieu de ramification).

On note toujours

$$\mathrm{pr} : \mathbb{P}_1^{r+1}/S_r \longrightarrow \mathbb{P}_1^r/S_r$$

la projection sur les $r$ premières composantes. Si $A'$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}_1^r/S_r$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (typiquement $A' = (\mathbb{P}_1 - a_0)^{*r}/S_r$ où $a_0$ est rationnel sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et si $A = A' \cap \mathbb{P}_1^{*r}/S_r$, on notera :

$$\Omega_{\mathrm{sym}}(A) = \mathrm{pr}^{-1}(A') \cap \mathbb{P}_1^{*r+1}/S_r = \mathrm{pr}^{-1}(A) \cap \mathbb{P}_1^{*r+1}/S_r.$$

DÉFINITION. — On appelle *famille algébrique* (*restreinte*) de revêtements non ramifiés hors de $r$ points, la donnée de variétés algébriques (non nécessairement irréductibles) $Y, K$, et de morphismes $q$ et $t$ définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "t"] \\
K \arrow[d, "q"'] & K \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A') \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "s"] \\
A' & pr^{-1}(A'), \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

où $r$ et $s$ désignent les projections du produit $K \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A')$ sur $K$ et sur $\mathrm{pr}^{-1}(A')$ et $p = r \circ t$, tels que $t$ et $q$ soient des revêtements algébriques (ce qui entraîne que $s$ et $s \circ t$ le sont) et tel que $s \circ t$ soit non ramifié au dessus de $\Omega_{\mathrm{sym}}(A)$.

Soit $D \subset \mathbb{P}_1^r/S_r$ le lieu de ramification de $q$ (qui est sous ces hypothèses contenu dans la diagonale généralisée $\Delta$, i.e. l'ensemble des $r$-uplets non ordonnés dont deux coordonnées sont égales) et soit $z \in K$ tel que $q(z)$ ne soit pas dans $D$. Alors $p^{-1}(z)$ est par $t$ un revêtement algébrique de $\mathbb{P}_1$ dont le lieu de ramification est contenu dans $q(z)$.

Définition. — On appelle *famille algébrique* (*restreinte*) de $G$-revêtements non ramifiés hors de $r$ points, la donnée de variétés algébriques $\underline{Y}, \underline{K}$, et de morphismes $q$ et $\underline{t}$ définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y} \arrow[d, "\underline{p}"'] & \underline{Y} \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\underline{t}"] \\
\underline{K} \arrow[d, "\underline{q}"'] & \underline{K} \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A') \arrow[l, "\underline{r}"'] \arrow[d, "\underline{s}"] \\
A' & \mathrm{pr}^{-1}(A'), \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

où $\underline{r}$ et $\underline{s}$ désignent les projections du produit $\underline{K} \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A')$ sur $\underline{K}$ et sur $\mathrm{pr}^{-1}(A')$ et $\underline{p} = \underline{r} \circ \underline{t}$, tels que $\underline{t}$ et $\underline{q}$ soient des revêtements algébriques (ce qui entraîne que $\underline{s}$ et $\underline{s} \circ \underline{t}$ le sont), et tels que $\underline{s} \circ \underline{t}$ soit non ramifié au dessus de $\Omega_{\mathrm{sym}}(A)$ et tels que le revêtement

$$\underline{Y} \xrightarrow{\underline{t}} \underline{K} \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A')$$

soit galoisien, avec la donnée d'un anti-isomorphisme entre $G$ et le groupe des automorphismes de revêtement.

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 8. — *L'espace $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}$ (resp. $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$) est un espace des modules grossiers pour les classes d'isomorphismes de revêtements algébriques de $\mathbb{P}_1$ à monodromie imposée $G \subset S_N$ (resp. de $G$-revêtements algébriques de $\mathbb{P}_1$) non ramifiés hors de $r$ points.*

*Démonstration.* — Par construction, $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$ (resp $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$) est isomorphe en tant que revêtement de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ à $H_{0,G}$ (resp $\underline{H}_0$). On sait que les points de cet espace correspondent aux classes d'isomorphisme de revêtements topologiques à monodromie donnée $G \subset S_N$ (resp. de $G$-revêtements topologiques) de $\mathbb{P}_1$ non ramifiés en dehors de $r$ points. D'après le théorème d'existence de Riemann [Harth], ces classes d'isomorphismes topologiques correspondent bijectivement aux classes d'isomorphismes algébriques. Soit maintenant une famille restreinte algébrique de $G$-revêtements (diagramme page suivante), pour fixer les idées (le cas des familles à monodromie fixée se traite de la même façon).

Les points complexes de la famille constituent une famille topologique et le Théorème 7 assure que l'application $\underline{\lambda}_0$ qui à un élément $\underline{z}$ non ramifié de $\underline{K}'(\mathbb{C})$ associe le point de $\underline{H}_0(\mathbb{C})$ représentant la classe d'isomorphisme de $\underline{p}^{-1}(\underline{z})$ est un morphisme de revêtements au-dessus de $A$, qui s'étend de façon unique au-dessus de $A'$ en un morphisme de revêtements analytiques ramifiés. Composée avec l'isomorphisme entre $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$ et $\underline{H}_0$, l'application $\underline{\lambda}_0$ donne un morphisme de revêtements entre $\underline{K}'(\mathbb{C})$ et $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C})$. Le principe GAGA [Ser1] assure que ce morphisme de revêtements est algébrique. On le note $\underline{\lambda}_0^{\mathrm{alg}}$. Ce morphisme va de $\underline{K}'$ dans $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$, tous deux définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$, donc $\underline{\lambda}_0^{\mathrm{alg}}$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. □

$$\begin{tikzcd}
\underline{Y}' \arrow[d, "\underline{p}'"'] & \underline{Y}' \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\underline{t}'"] \\
\underline{K}' \arrow[d, "\underline{q}'"'] & \underline{K}' \times_{A'} \mathrm{pr}^{-1}(A') \arrow[l, "\underline{r}'"'] \arrow[d, "\underline{s}'"] \\
A' & pr^{-1}(A'). \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

### 7.3. Descente du corps de définition.

THÉORÈME 9. — *Les espaces des modules $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}$ des classes d'isomorphismes de revêtements de degré $N$ à monodromie imposée $G \subset S_N$ et $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$ des classes d'isomorphismes de $G$-revêtements de $\mathbb{P}_1$, non ramifiés hors de $r$ points, sont des revêtements algébriques définis sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{P}_1^r/S_r$, non ramifiés hors de $\mathbb{P}_1^{*r}/S_r$. De plus, pour tout élément $\tau$ de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *et tout élément $z$ (resp. $\underline{z}$) de $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}(\overline{\mathbb{Q}})$ (resp de $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}(\overline{\mathbb{Q}})$), la classe d'isomorphisme de revêtements (resp. de $G$-revêtements) représentée par $z^\tau$ (resp. $\underline{z}^\tau$) est la conjuguée par $\tau$ de celle représentée par $z$ (resp. $\underline{z}$).*

*Démonstration.* — Si $B$ est une variété algébrique définie sur $\mathbb{Q}$ et si $Z \xrightarrow{\phi} B$ est un revêtement algébrique défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on notera $Z^\tau \xrightarrow{\phi^\tau} B^\tau$ son conjugué par l'élément $\tau$ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ainsi, si

$$\begin{tikzcd}
X_G \arrow[d, "p"'] & X_G \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "t"] \\
H_G \arrow[d, "q"'] & H_G \times_{(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r} \Omega_{\mathrm{sym}} \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "s"] \\
(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r & \Omega_{\mathrm{sym}} \arrow[l, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

est la famille définie dans le paragraphe 5, avec $a_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$,

$$\begin{tikzcd}
X_G^\tau \arrow[d, "p^\tau"'] & & X_G^\tau \arrow[ll, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "t^\tau"] \\
H_G^\tau \arrow[d, "q^\tau"'] & & H_G^\tau \times_{(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r} \Omega_{\mathrm{sym}} \arrow[ll, "r^\tau"'] \arrow[d, "s^\tau"] \\
(\mathbb{P}_1 - \{a_0\})^{*r}/S_r & & \Omega_{\mathrm{sym}} \arrow[ll, "\mathrm{pr}"']
\end{tikzcd}$$

est encore une famille algébrique restreinte de revêtements non ramifiés hors de $r$ points. De plus il est clair que si $z$ appartient à $H_G(\overline{\mathbb{Q}})$, $p^{-1}(z)^\tau$ et $(p^\tau)^{-1}(z^\tau)$ sont isomorphes comme revêtements de $\mathbb{P}_1$. L'application $\omega'_\tau$ qui à $z^\tau$ fait correspondre le point de $H_{0,G}$ correspondant à la classe d'isomorphisme de $(p^\tau)^{-1}(z^\tau)$ est un morphisme algébrique d'après le THÉORÈME 8. Par ailleurs, si $z$ et $z'$ sont deux points de $H_G(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que $\rho^\tau(z^\tau) = \rho^\tau(z'^\tau)$ dans $H_{0,G}^\tau$, où $\rho$ désigne comme dans la PROPOSITION 4 le morphisme de $H$ dans $H_0$ qui à un point de $H$ fait correspondre le point de $H_0$ paramétrant sa classe d'isomorphisme, on en déduit que $\rho(z) = \rho(z')$ et donc que $p^{-1}(z)$ et $p^{-1}(z')$ sont isomorphes en tant que revêtements de $\mathbb{P}_1$, donc que $p^{-1}(z)^\tau$ et $p^{-1}(z')^\tau$ sont isomorphes, et de même pour $(p^\tau)^{-1}(z^\tau)$ et $(p^\tau)^{-1}(z'^\tau)$. On en déduit donc un morphisme $\omega_\tau$ de $H_{0,G}^\tau$ dans $H_{0,G}$, qui à l'élément $\rho(z)^\tau = \rho^\tau(z^\tau)$ de $H_{0,G}^\tau$ fait correspondre la classe d'isomorphisme de $(p^\tau)^{-1}(z^\tau)$. Par ailleurs, les morphismes $\omega_\tau$ vérifient la condition de descente de Weil. □

LEMME 5. — *Pour tout $\sigma$ et pour tout $\tau$ dans* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *on a les égalités* :

$$\omega_\sigma \circ \omega'^{\sigma}_{\rho} = \omega'_{\sigma\tau} \quad et \quad \omega_\sigma \circ \omega^\sigma_\tau = \omega_{\sigma\tau}.$$

*Démonstration.* — La deuxième égalité se déduit de la première et de la relation $\omega'_\tau = \omega_\tau \circ \rho^\tau$ qui provient de la définition de $\omega_\tau$. Il suffit de tester cette égalité sur les points non ramifiés. A un point non ramifié $z^\tau$ de $H_G^{\mathrm{alg}^\tau}$, $\omega'_\tau$ fait correspondre un point $\rho(z')$ de $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}$ tel que $p^{-1}(z')$ soit isomorphe à $p^{-1}(z)^\tau$. Si l'on conjugue par $\sigma$, le morphisme $\omega'^{\sigma}_\tau$ fait correspondre à $z^{\sigma\tau}$ le point $\rho^\sigma(z'^\sigma)$, auquel $\omega_\sigma$ associe le point $\rho(z'')$ tel que $p^{-1}(z'')$ soit isomorphe à $(p^{-1}(z'))^\sigma$. De l'autre côté, le morphisme $\omega'_{\sigma\tau}$ associe à $z^{\sigma\tau}$ le point $\rho(z''')$ tel que $p^{-1}(z''')$ soit isomorphe à $p^{-1}(z)^{\sigma\tau}$. Or $p^{-1}(z')$ est isomorphe à $(p^{-1}(z))^\tau$ et donc $p^{-1}(z'')$ est isomorphe à $(p^{-1}(z))^{\sigma\tau}$, i.e. à $p^{-1}(z''')$. Il s'ensuit que l'on a $\rho(z'') = \rho(z''')$, ce qu'il fallait démontrer. □

On sait alors par [Wei] que $H_{0,G}^{\mathrm{alg}}$ et que $q_0 : H_{0,G}^{\mathrm{alg}} \to \mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ sont définissables sur $\mathbb{Q}$, ce qui démontre la première partie du THÉORÈME 9. Plus précisément, il existe un revêtement $q_0^{\mathbb{Q}} : H_{0,G}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{P}_1^{*r}/S_r$ défini sur $\mathbb{Q}$ et un isomorphisme de revêtements $H_{0,G}^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\phi} H_{0,G}^{\mathrm{alg}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ tel que l'on ait $\phi^{-1} \circ \omega_\sigma \circ \phi^\sigma = \mathrm{id}$ pour tout $\sigma$ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Posons

$$\lambda'_\sigma = \phi^{-1} \circ \omega'_\sigma .$$

C'est le morphisme qui à un élément $z'^\sigma$ de $H_G^{\mathrm{alg}}$ fait correspondre le point de $H_{0,G}^{\mathbb{Q}}$ qui représente le revêtement $(p^\sigma)^{-1}(z'^\sigma)$. Il résulte de la relation précédente que $\lambda'_\sigma = (\phi^{-1} \circ \rho)^\sigma$. On en déduit que l'élément $z^\sigma$ représente le conjugué par $\sigma$ du revêtement représenté par $z$ ; ce qui achève la démonstration de la deuxième partie du THÉORÈME 9 pour les familles à monodromie fixée.

L'énoncé sur $\underline{H}_0$ se démontre de la même façon. On introduit l'application $\underline{\omega}_{\tau'}$ associée à un élément $\tau$ du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, qui à un élément $\underline{z}^\tau$ de $\underline{H}^\tau$ fait correspondre le point de $\underline{H}_0$ correspondant à la classe d'isomorphisme du $G$-revêtement $(\underline{p}^\tau)^{-1}(\underline{z}^\tau)$. C'est un morphisme algébrique. Comme ci-dessus les $G$-revêtements $\underline{p}^{-1}(\underline{z}^\tau)$ et $(\underline{p}^\tau)^{-1}(\underline{z}^\tau)$ sont isomorphes, la $G$-structure sur $\underline{p}^{-1}(\underline{z})^\tau$ étant définie à partir de celle de $\underline{p}^{-1}(\underline{z})$ par conjugaison par $\tau$. D'où un morphisme $\underline{\omega}_\tau$ de $\underline{H}_0^\tau$ dans $\underline{H}_0$ (le point $a_0$ variant dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$), qui satisfait à la condition de Weil. La deuxième partie de l'énoncé se démontre comme précédemment. Ceci achève la démonstration du théorème 9. $\square$

DÉFINITION. — Si $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_1$ est un $G$-revêtement défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et si

$$H = \left\{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\ ; X^\sigma \xrightarrow{\phi^\sigma} \mathbb{P}_1 \text{ isomorphe à } X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_1\right\},$$

on appelle *corps des modules* du $G$-revêtement $X \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}_1$ le corps $\overline{\mathbb{Q}}^H$ (voir [Fr]).

On peut alors énoncer le corollaire suivant qui est une conséquence immédiate du théorème précédent.

COROLLAIRE. — *Soit $\underline{z}$ un élément de $\underline{H}_0(\overline{\mathbb{Q}})$. Le corps des modules de la classe d'isomorphisme du $G$-revêtement représentée par $\underline{z}$ est égal à $\mathbb{Q}(\underline{z})$, le corps de rationalité de $\underline{z}$. Si de plus le centre du groupe $G$ est trivial, alors $\mathbb{Q}(\underline{z})$ est le corps de définition d' un revêtement de la classe d'isomorphisme représentée par $\underline{z}$.*

*Démonstration.* — On utilise la deuxième partie du THÉORÈME 9. Le point $\underline{z}^\tau$ représente le conjugué par $\tau$ du $G$-revêtement représenté par $\underline{z}$.

Ces $G$-revêtements sont isomorphes si et seulement si $\underline{z}^\tau = \underline{z}$. L'hypothèse que le centre de $G$ est trivial exprime que les $G$-revêtements de la famille n'ont pas d'automorphisme non trivial. Il est alors clair que le corps des modules est alors égal au corps de définition.

On sait par ailleurs que tout groupe fini $G$ est quotient d'un groupe fini dont le centre est trivial (voir [Fr-Völ]). Le problème de trouver un $G$-revêtement de $\mathbb{P}_1$ défini sur $\mathbb{Q}$ (forme régulière sur $\mathbb{Q}(T)$ du problème inverse de Galois) se ramène donc à montrer l'existence de points rationnels sur les espaces $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$ définis plus haut [Fr-Völ]. Fried et Völklein montrent d'ailleurs, en utilisant un résdultat de Conway-Parker et un lemme de théorie des groupes, qu'on peut se placer dans la situation où $\underline{H}_0^{\mathrm{alg}}$ a une composante irréductible définie sur $\mathbb{Q}$, quitte à remplacer $G$ par un groupe plus gros dont il est le quotient [Fr-Völ].

## BIBLIOGRAPHIE

[Big-Fr] Biggers (R.), Fried (M.). — *Moduli spaces of Covers of* $\mathbb{P}_1$ *and the Hurwitz Monodromy Group*, J. Reine Angew. Math., t. **335**, 1982, p. 87–121.

[Bir] Birman (J.S.). — *Braids, links, and mapping class groups.* — Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.

[Car] Cartan (H.). — *Cours de topologie algébrique.* — Polycopié de la Faculté des Sciences de Paris, 1969.

[De-Fr] Dèbes (P.) et Fried (M.). — *Non rigid situations in constructive Galois theory*, Pacific J. Math., t. **163**, 1, 1994, p. 81–122.

[Dou] Douady (R.) et Douady (A.). — *Théories galoisiennes.* — CEDIC, Nathan, 1979.

[Fr] Fried (M.). — *Fields of definition of function fields and Hurwitz families; Groups as Galois groups*, Communications in Algebra, t. **5** (1), 1977, p. 17–82.

[Fr-Völ] Fried (M.) and Völklein (H.). — *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Math. Ann., t. **290**, 1991, p. 771–800.

[Ful] Fulton (W.). — *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Annals of Math., t. **90**, 1969, p. 542–575.

[Gr-Re] GRAUERT (H.) und REMMERT ( R.). — *Komplex Räume*, Math. Ann., t. **136**, 1958, p. 245–318.

[Gro] GROTHENDIECK (A.). — *Séminaire de géométrie algébrique, SGA1.* — IHES, 1960–61.

[Hart] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry.* — Springer Verlag, 1977.

[Hur] HURWITZ (A.). — *Riemannsche Flächen mit gegebenem Veizweigungspunkten*, Mathemetische Werke, Band, t. **1**, p. 321–383.

[Mat] MATZAT (H.). — *Constructive Galois theorie*, Lecture Notes in Math., t. **1284**, 1986.

[Ray] RAYNAUD (M.). — *Géométrie algébrique et géométrie analytique, SGA1, XII*, Lecture Note, Springer Verlag, t. **224**, 1971, p. 311–343.

[Ser1] SERRE (J.-P.). — *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, t. **6**, 1956, p. 1–42.

[Ser2] SERRE (J.-P.). — *Topics in Galois Theory*, cours à Harward, notes written by Henri Darmon, Jones and Bartlett Publ., Boston, (1992).

[Wei] WEIL (A.). — *The field of definition of a variety*, Amer. J. Math. 78 (1956), p. 509–524; dans Oeuvres complètes (Collected papers) II, Springer Verlag, 291–306.